



Universidade Federal de Alagoas - UFAL

TESE DE DOUTORADO



INSTITUTO DE FÍSICA

Programa de Pós-Graduação em Física

**Aspectos quânticos da
Eletrodinâmica Quântica com
operadores de dimensão $d = 5$**

Ricardo Andrés Martínez von Dossow

Orientador: Dr. Tiago Mariz

Maceió-AL
Junho de 2022

TESE DE DOUTORADO

**Aspectos quânticos da
Eletrodinâmica Quântica com
operadores de dimensão $d = 5$**

Ricardo Andrés Martínez von Dossow

Tese apresentada ao Programa de Pós
Graduação em Física do Instituto de Física
da Universidade Federal de Alagoas, como
parte dos requisitos para a obtenção do título
de Doutor em Física.

Orientador: Dr. Tiago Mariz

Maceió-AL
Junho de 2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M385a Martínez von Dossow, Ricardo Andrés.
Aspectos quânticos da eletrodinâmica quântica com operadores de
dimensão $d=5$ / Ricardo Andrés Martínez von Dossow. – 2022.
107 f.

Orientador: Tiago Mariz.
Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 96-107.

1. Violação da simetria em Lorentz. 2. Modelo Padrão Estendido. 3.
Eletrodinâmica quântica. 4. Modelo de Horava-Lifshitz. I. Título.

CDU: 537.8



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

**“Aspectos quânticos da Eletrodinâmica Quântica com
operadores de dimensão $d=5$ ”**

por

Ricardo Andrés Martínez von Dossow

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Albert Yu. Petrov, Universidade Federal da Paraíba; Alesandro Ferreira dos Santos da Universidade Federal de Mato Grosso e Job Saraiva Furtado Neto, da Universidade Federal do Cariri, consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

Maceió, 20 de junho de 2022.

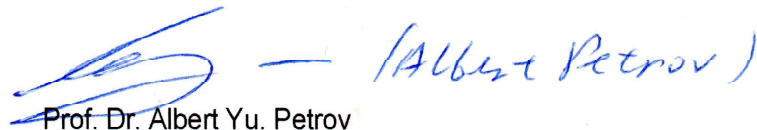

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento

Documento assinado digitalmente

gov.br

PAULO CESAR AGUIAR BRANDAO FILHO
Data: 21/06/2022 17:21:11-0300
Verifique em <https://verificador.itl.br>

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho


Prof. Dr. Albert Yu. Petrov


Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos


Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto

Dedicatória

Dedicado aos meus pais, Carlos e Joanna.

Em memória do Professor Francisco Antonio Peña Campos
“... Eres eterno como el tiempo y floreceras en cada primavera...”

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a minha família, por seu apoio e amor incondicional. Sem eles, nada disso seria possível.

Quero agradecer também ao professor Tiago Mariz pela orientação, e aos professores Albert Petrov (UFPB) e José Roberto Nascimento (UFPB) por sua colaboração no desenvolvimento dos trabalhos desta tese.

Agradeço também aos professores Dimiter Hadjimichef (UFRGS), Rudnei O. Ramos (UERJ) e Carla Göbel (PUC-RIO) por terem me aceitado como aluno especial nas disciplinas de Teoria Quântica de Campos II, Teoria de Campos à Temperatura Finita e Partículas Elementares respectivamente, me dando a oportunidade de complementar minha formação durante o confinamento devido à pandemia, cursando disciplinas optativas em seus respectivos programas de pos-graduação.

Agradeço a Elaine, por seu amor e companhia e por ser um pilar fundamental na minha vida, fazendo com que meus dias sejam mais leves e felizes. Agradeço por seu apoio, preocupação, ajuda, compreensão, paciência e incentivo.

Agradeço também aos colegas da sala 4, pelas conversas e vivências, e por tornar mais agradável minha passagem pelo instituto (e fora dele), em especial a Carlos, Clayson, Daniel, Francisco, Jonathan, Rubbens e Douglas (*in memoriam*).

Agradeço também aos colegas e amigos do Chile, pelo incentivo e apoio à distância, em especial ao professor Francisco Peña, que infelizmente já não está neste mundo, deixando uma grande saudade, mas ao mesmo tempo valiosos ensinamentos, tanto da física quanto da vida e que nunca esquecerei.

Agradeço também aos funcionários do IF, em especial à secretaria, sempre muito solícitos, e aos professores pelas aulas ministradas.

Finalmente agradeço a CAPES e FAPEAL pelo apoio financeiro.

Resumo

O estudo da violação de simetria de Lorentz em teoria de campos tem ganhado muita atenção nos últimos anos, principalmente a partir da descoberta de que em teoria de cordas temos a possibilidade do surgimento de quebras espontâneas de simetria de Lorentz ao tomarmos o limite à baixas energias. Esses estudos motivaram a construção do modelo padrão estendido (MPE), que é, na verdade, uma extensão do modelo padrão (MP) usual, no qual se adicionam todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e de CPT, respeitando a invariância de calibre. O MPE mínimo contém apenas termos renormalizáveis, enquanto o MPE não mínimo inclui todos os termos não renormalizáveis.

Na primeira parte deste trabalho, estudamos a extensão não mínima da Eletrodinâmica Quântica (EDQ), considerando todos os operadores de violação de Lorentz (VL) de dimensão de massa $d = 5$, e investigamos a possibilidade da geração do termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) e sua contraparte de altas derivadas em primeira ordem nas constantes de acoplamento não mínimas. Demonstramos explicitamente que não há geração do termo CFJ quando adotamos o esquema da regularização dimensional. Além disso, mostramos que as partes divergentes do termo de altas derivadas podem ser eliminadas ao considerarmos certas relações de proporcionalidade entre os coeficientes.

Na segunda parte, consideramos a extensão de Horava-Lifshitz (HL) com $z = 3$ da EDQ, no qual incluímos o vetor axial $b_{0,i}$ que quebra a simetria CPT. Para este modelo, calculamos o termo CFJ em distintos esquemas de regularização e encontramos que o termo CFJ é finito, porém, ambíguo, pois depende do esquema de regularização empregado. Finalmente, calculamos o termo CFJ deste modelo utilizando a metodologia da integral funcional, no qual encontramos mais uma vez que o termo CFJ é finito, porém indeterminado.

Palavras Chave: Violação da Simetria de Lorentz, Simetria CPT, Modelo Padrão Estendido, Eletrodinâmica Quântica, Correções Quânticas, Termo de CFJ, Teorias de Horava-Lifshitz

Abstract

The study of Lorentz symmetry violation in field theory has gained a lot of attention in recent years, mainly from the discovery that in string theory we have the possibility of spontaneous breaking of Lorentz symmetry when we take the low energy limit. These studies motivated the construction of the standard model extension (SME), which is, in fact, an extension of the usual standard model (SM), in which all possible terms that violate the Lorentz and CPT symmetries are added, respecting the gauge. The minimal SME contains only renormalizable terms, while the non-minimal SME includes all non-renormalizable terms.

In the first part of this work, we studied the non-minimal extension of Quantum Electrodynamics (QED), considering all Lorentz violation operators (LV) of mass dimension $d = 5$, and investigated the possibility of generating the Carroll-Field-Jackiw (CFJ) and its higher derivative counterpart on the non-minimal coupling constants. We explicitly demonstrate that there is no generation of the CFJ term when we adopt the dimensional regularization scheme. Furthermore, we show that the divergent parts of the higher derivative terms can be eliminated by considering certain proportionality relationships between the coefficients.

In the second part, we consider the Horava-Lifshitz (HL) like QED with $z = 3$, in which we include the axial vector $b_{0,i}$ that breaks the CPT symmetry. For this model, we calculated the CFJ term in different regularization schemes and found that the CFJ term is finite, however, ambiguous, since it depends on the regularization scheme used. Finally, we calculate the CFJ term of this model using the functional integral approach, in which we find once again that the CFJ term is finite, but undetermined.

Keywords: Lorentz symmetry breaking, CPT Symmetry, Standard Model Extension, Quantum Electrodynamics, Quantum Corrections, CFJ Term, Horava-Lifshitz theories

Conteúdo

1	Introdução	9
2	O Modelo Padrão Estendido	15
2.1	Introdução	16
2.2	EDQ estendida mínima	17
2.3	Simetrias de Lorentz e CPT	19
2.4	O Modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw	24
2.5	Correções quânticas	26
3	Eletrodinâmica quântica estendida não mínima	33
3.1	Introdução	34
3.2	O Modelo	35
3.3	Expansão derivativa	39
3.4	Parametrização de Feynman	43
3.5	Conclusões	47
4	Teorias de Horava-Lifshitz	49
4.1	Introdução	50
4.2	Campo escalar livre	51
4.3	EDQ de Horava-Lifshitz $z=3$	56
5	Eletrodinâmica de HL $z=3$ com quebra de simetria CPT	62
5.1	Introdução	63
5.2	O Modelo	63
5.3	Cálculo do termo CFJ induzido	68
5.3.1	Integral Funcional	73
5.3.2	Teoria Completa	84
5.4	Conclusões	85
6	Conclusões Finais e Perspectivas	87
	Apêndice	90
	Bibliografia	96

CAPÍTULO 1

Introdução

O Modelo Padrão (MP) da Física de Partículas e a Relatividade Geral (RG) são dois pilares fundamentais da física moderna, que apesar de serem incompatíveis entre si, compartilham uma propriedade fundamental: ambas teorias são invariantes sob as transformações de Lorentz, a saber, *boost* (mudança na velocidade ou empurrão) e rotações. Uma outra simetria fundamental conservada no MP é a simetria CPT, na qual

- C é conjugação de carga: troca partículas por antipartículas;
- P é inversão espacial (paridade): transforma um objeto em sua imagem especular e de cabeça para baixo; e
- T é reversão do tempo: muda a direção do fluxo do tempo.

Esta simetria está estreitamente relacionada com a simetria de Lorentz através do teorema CPT [1, 2, 3], o qual diz que uma teoria quântica de campos local (como a Eletrodinâmica Quântica ou o MP) invariante de Lorentz também deve ser invariante sob transformações de CPT. Por outro lado, também pelo "teorema anti-CPT" [4], que estabelece que uma teoria que quebra a simetria de CPT necessariamente quebra também a simetria de Lorentz, porém a recíproca não é verdadeira, ou seja, é possível ter violações de Lorentz sem quebrar CPT. A conservação da simetria de CPT no MP implica que certas propriedades das partículas e suas respectivas anti-partículas são idênticas (em módulo) [5], como por exemplo, massa, tempo de vida ou carga, o que tem sido testado experimentalmente com grande precisão.

O MP descreve as partículas fundamentais e como elas interagem entre si através de três das quatro forças fundamentais da natureza (força fraca, força forte e força eletromagnética), ficando fora a força gravitacional, pois ainda não temos uma teoria quântica da gravidade, além do que, na maioria dos fenômenos microscópicos, é desprezível devido a sua baixa intensidade quando comparada com as outras forças (veja tabela 1.1).

Força	Intensidade
Forte	1
Eletromagnética	10^{-2}
Fraca	10^{-5}
Gravitacional	10^{-40}

Tabela 1.1: Intensidade das forças fundamentais relativas à força forte.

Apesar do MP ser uma teoria muito bem sucedida e precisa nas suas predições, é uma teoria incompleta, pois além de não dar uma descrição quântica da força gravitacional ainda tem outras questões em aberto, como por exemplo:

- O que é matéria escura?
- O que aconteceu com a antimatéria depois do big bang?
- Por que há três gerações de quarks e léptons com distintas escalas de massa?
- De onde provém a massa dos neutrinos?

A relatividade geral explica os fenômenos relacionados com a gravidade, os quais na sua maioria são em grandes escalas. Assim como o MP, a RG também possui grande sucesso em suas predições, porém em alguns fenômenos, tais como buracos negros (radiação de Hawking [6], entropia de Bekenstein-Hawking [7, 8]) e no suposto estado inicial de alta densidade do universo (big bang, física do universo primordial, cosmologia quântica), a força gravitacional torna-se importante na escala microscópica e se faz necessário ter uma descrição quântica da gravidade para poder explicar esses fenômenos. Ao tentarmos quantizar a gravidade através da teoria quântica de campos nos deparamos com o problema de que a constante de acoplamento gravitacional tem dimensão negativa em unidades de massa, a saber, $[G_N] = -2$. Assim, a teoria é não renormalizável segundo o argumento de contagem de potências, portanto, aparecem quantidades infinitas que não podem ser removidas. Para resolver o problema da gravidade quântica, têm-se postulado

várias teorias, das quais podemos citar a gravidade quântica de laços [9], geometria não comutativa [10], gravidade de Horava-Lifshitz [11] ou teoria de cordas [12]. Um aspecto importante que compartilham estas teorias é que todas têm como um possível efeito a quebra de simetria de Lorentz, o que tem motivado o estudo de teorias de campos efetivas nas quais violações de Lorentz são permitidas. Assim, a partir destas ideias é possível pensar que existe um novo domínio da física na escala de Planck (veja tabela 1.2), no qual violações da simetria de Lorentz são permitidas e que tanto o MP como a RG são limites de baixas energias desta nova teoria fundamental.

Tamanho/Velocidade	$v \ll 3 \times 10^8 m/s$	$v \approx 3 \times 10^8 m/s$
$L \gg 10^{-10} m$	Mecânica Clássica	Mecânica Relativística
$10^{-10} m \approx L > 10^{-35} m$	Mecânica Quântica	Teoria Quântica de Campos
$L \approx 10^{-35} m$ ou menor		Gravidade Quântica?

Tabela 1.2: Domínios da física.

Em 1989, Kostelecky e Samuel [13] demonstraram que no limite de baixas energias de uma Teoria de Cordas surgem quebras espontâneas da simetria de Lorentz, dado que algum campo tensorial ou vetorial adquire um valor esperado no vácuo não nulo, e como resultado a simetria de Lorentz é espontaneamente quebrada. A partir destas ideias, Colladay e Kostelecky [14, 15] iniciaram o desenvolvimento do Modelo Padrão Estendido (MPE), uma teoria de campos efetiva, ou seja, o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental, na qual se introduzem todos os termos possíveis que quebram a simetria de Lorentz, e que podem ou não quebrar também a simetria CPT, em todos os setores da lagrangiana original do MP e posteriormente da RG [16]. Estes novos termos são caracterizados por coeficientes de violação de Lorentz (VL), os quais são tensores constantes interpretados como campos de fundo e que seriam vestígios de uma teoria mais fundamental com quebra de simetria de Lorentz. A inclusão destes termos na lagrangiana do MP acarreta em uma mudança nas relações de dispersões e nas interações, o qual por sua vez, faz com que processos proibidos no MP agora sejam permitidos, como

por exemplo, a radiação de Cherenkov no vácuo $e^- \rightarrow e^- \gamma$ [17, 18], divisão de fótons no vácuo $\gamma \rightarrow N\gamma$, com $N = 2, 3, 4, \dots$ [19], ou decaimento do fóton $\gamma \rightarrow f + \bar{f}$ [20], assim como também traz alterações nos resultados usuais de processos como espalhamento Bhabha [21], espalhamento Moller [22], espalhamento Compton [23], etc. Comparando os resultados teóricos com dados experimentais obtidos em aceleradores de partículas ou em observações astrofísicas, é possível por limites superiormente nos coeficientes de violação de Lorentz. Desde 2008, é anualmente atualizada uma tabela na qual se tabulam os limites dos coeficientes de violação de Lorentz do MPE nos diferentes setores da teoria [24].

Uma outra abordagem para o estudo da quebra da simetria de Lorentz é a considerada por Horava para a construção de sua teoria de gravidade quântica renormalizável [11]. Nesta abordagem, Horava, baseando-se no escalonamento de Lifshitz [25], assume que, à altas energias, tempo e espaço escalam como $t \rightarrow b^z t$ e $x \rightarrow bx$, gerando assim uma anisotropia no espaço-tempo, a qual é controlada pelo expoente dinâmico crítico z , e que quebra a invariância de Lorentz. A gravidade de Horava se caracteriza por apresentar altas derivadas espaciais, mantendo as derivadas temporais como no caso usual, evitando o surgimento de fantasmas e garantindo, assim, a unitariedade. O escalonamento de Lifshitz faz com que os campos mudem sua dimensão canônica de massa a qual passa a depender explicitamente de z . Consequentemente a dimensão de massa da constante de acoplamento também muda, tornando-se assim a teoria renormalizável para $z = 3$. Mesmo resolvendo o problema da renormalizabilidade, esta teoria ainda possui alguns problemas, como por exemplo no limite de baixas energias, quando $z \rightarrow 1$, não é recuperada exatamente a teoria de Einstein, de modo que ainda precisam ser realizados mais estudos neste sentido. Dentro da metodologia de Horava-Lifshitz, alguns autores esperam que a simetria de Lorentz surja como um fenômeno emergente, o que poderia explicar como a simetria de Lorentz está presente no nosso mundo.

Nesta tese, estudaremos a indução radiativa do termo CFJ na EDQ estendida não mínima, considerando todos os operadores de dimensão 5 que violam a simetria de Lorentz

e CPT. Realizaremos este cálculo em um laço em diferentes esquemas de regularização, tais como expansão derivativa e parametrização de Feynman. Estudaremos também a possibilidade de eliminar as divergências presentes na teoria, considerando relações entre os coeficientes. Além disto, estudaremos a extensão de Horava-Lifshitz (HL) $z = 3$ da EDQ com a inclusão de um termo que viola a simetria CPT, cujo coeficiente de violação de Lorentz (VL) é dado pelo vetor axial $b_{0,i}$. As teorias de HL [26] são caracterizadas pela presença de altas derivadas espaciais no termo cinético da lagrangiana, enquanto que as derivadas temporais têm a mesma forma que nas teorias relativísticas usuais. Para a EDQ HL $z = 3$, também estudaremos a possibilidade de induzir radiativamente o termo CFJ utilizando distintos esquemas de regularização, assim como também a metodologia da integral funcional [27]. Durante o desenvolvimento desta tese, adotaremos o sistema de unidades naturais $c = \hbar = k_B = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ e a métrica do espaço-tempo de Minkowski caracterizada pela assinatura $(1,-1,-1,-1)$.

CAPÍTULO 2

O Modelo Padrão Estendido

Conteúdo

2.1	Introdução	16
2.2	EDQ estendida mínima	17
2.3	Simetrias de Lorentz e CPT	19
2.4	O Modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw	24
2.5	Correções quânticas	26

2.1 Introdução

O MPE é uma extensão ao MP da física de partículas usual acoplado à RG, no qual se adicionam todos os possíveis operadores que violam as simetrias de Lorentz e CPT, satisfazendo todas as outras propriedades do MP, tais como a invariância de calibre, conteúdo de partículas, conservação da energia e momento, etc. Os operadores novos que aparecem no MPE são classificados de acordo com a sua dimensão de massa e seu comportamento frente às transformações CPT. Estes termos são formados por duas partes: uma, é um coeficiente de violação de Lorentz, e a outra, é um operador formado pelos campos básicos do MP. Estes termos têm a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{SME} = \text{coef. VL} \times \text{operador de campos } d\text{-dimensional.} \quad (2.1)$$

Ao trabalhar com unidades naturais, a dimensão de massa da lagrangiana é $[\mathcal{L}] = 4$. Portanto, a dimensão de massa do coef. VL é $4 - d$, i.e, $[\text{coef. VL}] = 4 - d$, sendo d a dimensão dos operadores de VL. Pelo argumento de contagem de potências, temos uma teoria

- Super-renormalizável se $[\text{coef. VL}] > 0$,
- Renormalizável $[\text{coef. VL}] = 0$,
- Não Renormalizável se $[\text{coef. VL}] < 0$.

Portanto:

- Se $d \leq 4 \rightarrow$ teoria renormalizável, MPE mínimo,
- Se $d > 4 \rightarrow$ teoria não renormalizável, MPE não mínimo.

Estes coeficientes de violação de Lorentz são tensores constantes, interpretados como campos de fundo e que violam a invariância de Lorentz de partícula, pois dão origem à direções espaço-temporais privilegiadas. É importante destacar que o MPE é um esquema

em que a violação de Lorentz é motivada pela quebra espontânea de simetria, no qual campos de fundo surgem de um valor esperado no vácuo não nulo de campos mais básicos que pertencem a uma teoria mais fundamental, como por exemplo, teoria de cordas [13, 28, 29, 30].

O MPE mínimo contém todos os operadores que são renormalizáveis, segundo o argumento de contagem de potências. Assim, apenas operadores com dimensão de massa $d \leq 4$ são permitidos, os quais são um número finito.

O MPE não mínimo inclui um número infinito de termos cujos operadores de campo têm dimensão de massa $d \geq 5$ e, portanto, são não renormalizáveis. Muitos destes termos têm sido explicitamente construídos nos últimos anos; por exemplo, os termos de dimensão $d = 5, 6$ na EDQ [31, 32, 33] e recentemente em [34], onde foi apresentado um método geral para construir termos invariantes de calibre em teorias de campos, incluindo EDQ e Cromodinâmica Quântica (CDQ). Do ponto de vista fenomenológico, é possível impor limites aos coeficientes associados a operadores não mínimos através de observações astrofísicas, em que os efeitos produzidos por estes operadores passam a ser dominantes [24, 35, 36, 37, 38, 39].

2.2 EDQ estendida mínima

A extensão mínima da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) [15] é descrita pela lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{4}(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\Gamma^\nu D_\nu - M)\psi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

na qual $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, D_μ é a derivada covariante usual e

$$\Gamma^\nu \equiv \gamma^\nu + c^{\mu\nu}\gamma_\mu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\mu + e^\nu + if^\nu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\mu}, \quad (2.3)$$

$$M \equiv m + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

A violação de Lorentz é controlada pelos coeficientes reais $a_\mu, b_\mu, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}, e_\mu, f_\mu, g_{\lambda\mu\nu}, H_{\mu\nu}$ no setor fermiônico, e por $(k_{AF})_\mu, (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ no setor bosônico.

O segundo termo da lagrangiana (2.2) contém um operador com dimensão de massa $d = 4$. Portanto, $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é adimensional e exibe as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, dadas por

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = - (k_F)_{\lambda\kappa\mu\nu} = - (k_F)_{\kappa\lambda\nu\mu}, \quad (2.5)$$

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} + (k_F)_{\kappa\nu\lambda\mu} + (k_F)_{\kappa\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.6)$$

e duplo traço nulo, i.e,

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Assim, o tensor $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ possui 19 componentes independentes. Este termo é equivalente ao termo tipo *Aether* [40],

$$\mathcal{L}_{Aether} = c (b^\mu F_{\mu\nu})^2, \quad (2.8)$$

onde os parâmetros constantes $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}, c$ e b_μ se relacionam da seguinte forma,

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = -c (\eta_{\kappa\mu} b_\lambda b_\nu + \eta_{\lambda\nu} b_\kappa b_\mu - \eta_{\kappa\nu} b_\mu b_\lambda + \eta_{\lambda\mu} b_\kappa b_\nu). \quad (2.9)$$

O terceiro termo de (2.2) é um termo tipo Chern-Simons, cujo coeficiente $(K_{AF})^\mu$ tem dimensão de massa $d = 1$.

Por outro lado, os termos do setor fermiônico contidos em M têm dimensão de massa $d = 1$, enquanto os coeficientes contidos em Γ^ν são adimensionais. Os coeficientes a_μ, e_μ e f_μ podem ser removidos da lagrangiana através de uma certa redefinição espinorial, sobrevivendo apenas os coeficientes $c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$ (totalmente simétricos), $g_{\lambda\mu\nu}$ (totalmente antissimétrico), b_μ e $H_{\mu\nu}$. Os do setor bosônico podem ser induzidos através de correções quânticas a partir dos termos do setor fermiônico apenas pelos coeficientes b_μ e $c_{\mu\nu}$, tal

que

$$(K_{AF})_{\mu} \propto b_{\mu} \quad (2.10)$$

$$(K_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \propto g_{\mu\lambda}c_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}c_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}c_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}c_{\mu\rho}. \quad (2.11)$$

Estes coeficientes têm sido limitados superiormente através de dados obtidos em experimentos envolvendo oscilação de neutrinos [41, 42, 43], káons [44, 45], prótons e nêutrons [46, 47, 48], elétrons [49, 50], múons [51, 52] e fótons [53, 54, 55], dentre outros. Para uma relação completa, veja [24].

2.3 Simetrias de Lorentz e CPT

A Teoria da Relatividade Especial (RE) [56], proposta por Einstein em 1905, fundamenta-se em seus dois postulados:

- O Princípio da Relatividade, que afirma que as leis físicas devem ser as mesmas em quaisquer referenciais inerciais.
- A Constância da Velocidade da Luz, que afirma que velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, quando medida a partir de qualquer referencial inercial. Esse valor independe da velocidade do observador ou da fonte emissora de luz.

As transformações que relacionam dois referenciais inerciais, de modo a respeitar os postulados da RE, são chamadas de Transformações de Lorentz. Estas transformações consistem em rotações e *boost* (ou empurrões).

As transformações de Lorentz podem ser classificadas em dois tipos:

- Transformações de observador ou de coordenadas que correspondem a uma rotação ou *boost* (ou uma combinação de ambos) do sistema de referência do observador. Neste caso, campos constantes e campos dinâmicos são transformados.

- Transformações de partícula que correspondem a uma rotação ou *boost* (ou uma combinação de ambos) da partícula ou do sistema físico em consideração sobre um sistema de referência dado. Neste caso, apenas campos dinâmicos são transformados.

No vácuo, estas duas transformações (também chamadas, neste caso, de passiva e ativa respectivamente) são equivalentes. Porém, na presença de um campo de fundo constante, isto não se cumpre, pois no caso das transformações de partícula, o campo de fundo não é transformado.

Portanto, podemos dizer que a lagrangiana do MPE é invariante sob transformações de observador, mas não sob transformações de partícula.

Outra simetria fundamental do Modelo Padrão é a simetria CPT, onde C é a conjugação de cargas (troca partícula por sua respectiva anti-partícula), P é inversão de paridade, e T a reversão temporal

$$C : e \rightarrow -e, \quad (2.12)$$

$$P : \vec{x} \rightarrow -\vec{x}, \quad (2.13)$$

$$T : t \rightarrow -t. \quad (2.14)$$

Individualmente, estas transformações podem ou não representar uma simetria, porém sua aplicação conjunta sim, o que está bem testado experimentalmente.

Para entendermos como operam estas transformações, vamos considerar inicialmente as equações de Maxwell com fonte, escritas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.15)$$

Primeiramente, é fácil observarmos que a conjugação de carga transformará a corrente de positiva para negativa, ou seja,

$$C j^\mu C^{-1} = -j^\mu. \quad (2.16)$$

A transformação de paridade altera o sentido de propagação da corrente, mas a densidade

de carga permanece invariante. Portanto,

$$Pj^\mu P^{-1} = j_\mu. \quad (2.17)$$

A inversão temporal tem o mesmo efeito, ou seja,

$$Tj^\mu T^{-1} = j_\mu. \quad (2.18)$$

A transformação CPT conjunta fica

$$CPTj^\mu CPT^{-1} = -j^\mu. \quad (2.19)$$

Analogamente, podemos ver as transformações da derivada ∂_μ , a qual claramente não muda ante a conjugação de carga,

$$\begin{aligned} C\partial_\mu C^{-1} &= \partial_\mu, \\ P\partial_\mu P^{-1} &= \partial^\mu, \\ T\partial_\mu T^{-1} &= -\partial^\mu. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A partir das equações de Maxwell (2.15), podemos deduzir como transformar o campo A_μ

$$\begin{aligned} CA_\mu C^{-1} &= -A_\mu, \\ PA_\mu P^{-1} &= A^\mu, \\ TA_\mu T^{-1} &= A^\mu. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vamos analisar agora o caso dos campos fermiônicos. As transformações, neste caso,

são dadas por [57, 58]

$$\begin{aligned} C\psi(x)C^{-1} &= i\eta_c\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T(x), \\ C\bar{\psi}(x)C^{-1} &= i\eta_c^*\psi^T\gamma^2\gamma^0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} P\psi(x)P^{-1} &= \eta_p\gamma^0\psi(t, -\vec{x}), \\ P\bar{\psi}(x)P^{-1} &= \eta_p^*\bar{\psi}(t, -\vec{x})\gamma^0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} T\psi(x)T^{-1} &= \eta_t\gamma^1\gamma^3\psi(-t, \vec{x}), \\ T\bar{\psi}(x)T^{-1} &= -\eta_t^*\bar{\psi}(-t, \vec{x})\gamma^1\gamma^3. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Note que η_c, η_p e η_t são fatores de fase, tal que $|\eta_c|^2 = |\eta_p|^2 = |\eta_t|^2 = 1$.

Vamos analisar o comportamento sobre estas transformações do termo $b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, pertencente ao setor fermiônico da EDQ estendida mínima, que como veremos mais adiante, é responsável pela geração do termo com violação de CPT (CPT ímpar) do setor bosônico da EDQ estendida mínima (2.2). Sob conjugação de carga, este termo transforma-se como

$$Cb_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi C^{-1} = \begin{cases} -b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = 0. \\ b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = i. \end{cases} \quad (2.25)$$

Sob inversão de paridade, transforma-se como

$$Pb_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi P^{-1} = \begin{cases} -b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = 0. \\ b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = i, \end{cases} \quad (2.26)$$

e sob inversão temporal, transforma-se como

$$Tb_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} = \begin{cases} b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = 0. \\ -b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, & \text{para } \mu = i. \end{cases} \quad (2.27)$$

A partir dos resultados acima, podemos construir a seguinte tabela indicando quais simetrias são conservadas e quais são quebradas por este termo de VL:

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$b_0 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_5 \psi$	+	-	+	-	+	-	-
$b_i \bar{\psi} \gamma^i \gamma_5 \psi$	+	+	-	+	-	-	-

Tabela 2.1: Simetrias discretas do termo $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$

É possível estender esta análise para todos os termos de VL da QED estendida (2.2), encontrando os seguintes resultados:

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k}, c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
a_0, e_0, f_i	-	+	+	-	-	+	-
a_j, e_j, f_0	-	-	-	+	+	+	-
H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}	-	+	-	-	+	-	+
H_{0j}, d_{00}, d_{jk}	-	-	+	+	-	-	+

Tabela 2.2: Simetrias discretas na EDQ estendida mínima

É importante destacar que qualquer coeficiente de VL com número de índices par não viola CPT, enquanto que coeficientes VL com número de índices ímpar quebra a simetria CPT, tal como pode ser visto na tabela 2.2. Note que violação de Lorentz não implica violação de CPT, porém violação de CPT implica em quebra da simetria de Lorentz [4], exceto em certos tipos de teorias de campos não locais, discutidos em [59], em que a simetria CPT é quebrada enquanto a simetria de Lorentz é preservada.

2.4 O Modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw

O termo de CPT ímpar do setor bosônico da EDQ estendida (2.2) foi introduzido originalmente na EDQ por Carroll, Field e Jackiw [60], como analogia ao termo de Chern-Simons em 2+1 dimensões do espaço-tempo. Este termo tem a forma:

$$\mathcal{L}_{CFJ} = -\frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (2.28)$$

em que $(k_{AF})_{\mu}$ é um 4-vetor constante com dimensão de massa. Assim, o modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw é caracterizado pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}A_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Vamos verificar o comportamento da lagrangiana frente a uma transformação de calibre, i.e, $A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda$, onde Λ é um escalar. Note que $\delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\Lambda$, e portanto, $\delta F^{\mu\nu} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{MCFJ} &= \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu}\partial_{\nu}\Lambda, \\ &= \frac{1}{2}\partial_{\nu}\left((k_{AF})_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu}\Lambda\right) - \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}\left(\partial_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)\Lambda. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como $\partial_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ (equações homogêneas de Maxwell), então

$$\delta\mathcal{L}_{MCFJ} = \frac{1}{2}\partial_{\nu}\left((k_{AF})_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu}\Lambda\right), \quad (2.31)$$

portanto, a lagrangiana muda numa derivada total, ou seja, a lagrangiana não é invariante de calibre, porém a ação $S = \int d^4x\mathcal{L}_{MCFJ}$ sim.

Vamos agora calcular as equações de campo através das equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_{\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{MCFJ}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\mu})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_{MCFJ}}{\partial A_{\mu}} = 0, \quad (2.32)$$

de onde obtemos as seguintes equações:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (k_{AF})_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Estas equações não são mais do que as equações não homogêneas de Maxwell, as quais tem sido modificadas por causa do termo que viola a simetria de Lorentz, enquanto que as equações homogêneas continuam da mesma forma que na QED usual, ou seja,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.34)$$

que expressas na sua forma vetorial, são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{k}_{AF} \cdot \vec{B}, \quad (2.35)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} = -\vec{k}_{AF} \times \vec{E} - k_{0AF} \vec{B}, \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.37)$$

$$\partial_0 \vec{B} = -\nabla \times \vec{E}. \quad (2.38)$$

A partir da equação (2.33), podemos escrever a equação de movimento de A^μ no espaço dos momentos como

$$[g_{\mu\nu} p^2 + ik^\rho \epsilon_{\rho\nu\lambda\mu} p^\lambda] A^\mu = 0, \quad (2.39)$$

o que nos leva à seguinte relação de dispersão modificada para os fótons:

$$p^4 + k^2 p^2 - (k \cdot p)^2 = 0, \quad (2.40)$$

em que $p = (\omega, \vec{p})$ é o 4-vetor de onda. Esta relação de dispersão prediz birrefringência da luz no vácuo. Para mais detalhes, veja [60].

2.5 Correções quânticas

Uma área importante de estudo, vastamente examinada na literatura, é a geração radiativa dos termos que violam a simetria de Lorentz pertencentes ao MPE. Além da importância deste estudo do ponto de vista fenomenológico, também é interessante porque permite conectar coeficientes de violação de Lorentz de diferentes setores da teoria, permitindo transferir os limites destes coeficientes de um setor a outro. O primeiro trabalho neste sentido, foi desenvolvido no final dos anos 90, no qual Kostelecky e Jackiw [61] mostraram que o termo de CFJ pode ser induzido radiativamente pelo termo de interação fermiônica $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ do MPE mínimo. Note que na tabela 2.2, os coeficientes b_μ e $(k_{AF})_\mu$ possuem o mesmo comportamento frente às transformações CPT. O termo CFJ tem recebido muita atenção pelo fato de apresentar uma dependência explícita no esquema de regularização utilizado, pois mostra ser ambíguo; para mais detalhes, veja por exemplo, [27, 61, 62, 63, 64, 65]. A partir do trabalho de Jackiw e Kostelecky, tem-se desenvolvido toda uma metodologia para induzir termos de violação de Lorentz no setor fotônico, como, por exemplo, o termo CPT par tipo *aether* [40, 66, 67, 68] que também é ambíguo, o termo de Myers-Pospelov ou o termo CFJ de altas derivadas [69, 70], a partir de termos de interação de campos fermiônicos apropriados.

Vamos então descrever brevemente uma metodologia para gerar o termo CFJ a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m - \cancel{b}\gamma_5) \psi, \quad (2.41)$$

na qual utilizamos a notação $\cancel{A} = \gamma^\mu A_\mu$. Primeiramente, vamos reescrever o termo CFJ (2.28) como

$$\mathcal{L}_{CFJ} = C e^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho. \quad (2.42)$$

Assim, vamos induzir na ação efetiva um termo quadrático no campo A_μ , com uma

derivada e linear em b_μ . A ação efetiva S_{ef} é definida com o funcional gerador como

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{\int d^4x \mathcal{L}} = e^{iS_{ef}}. \quad (2.43)$$

Para a lagrangiana (2.41), temos a seguinte ação efetiva

$$S_{ef} = -i\text{Trln}(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5 - e\mathcal{A}), \quad (2.44)$$

em que Tr é o traço sobre o espaço das coordenadas e sobre as matrizes de Dirac. A ação efetiva pode ser reescrita como

$$S_{ef} = -i\text{Trln}[(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5)(1 - (\not{p} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1}e\mathcal{A})], \quad (2.45)$$

mas, utilizando o fato de que

$$\ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B), \quad (2.46)$$

$$\ln(1 - X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n, \quad (2.47)$$

podemos rescrever a ação efetiva como

$$S_{ef} = S_{ef}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}, \quad (2.48)$$

em que

$$S_{ef}^{(0)} = -i\text{Trln}(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5), \quad (2.49)$$

e

$$S_{ef}^{(n)} = \frac{i}{n} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} e\mathcal{A} \right]^n. \quad (2.50)$$

É fácil ver que o termo (2.49) não contribui para o termo CFJ, pois não depende do campo A_μ . Como o termo CFJ é quadrático no campo A_μ , este pode ser encontrado apenas para

$n = 2$ em (2.50), que fica

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} e\mathcal{A} \right]^2 \\ &= \frac{i}{2} e^2 \text{Tr} (G(p) \mathcal{A} G(p) \mathcal{A}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

com

$$G(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5}. \quad (2.52)$$

Agora, com o fim de facilitar o cálculo do traço sobre os operadores de coordenada, vamos mover os operadores $A(x)$ para a direita utilizando a relação $A_\mu(x)G(p) = G(p - i\partial)A_\mu(x)$, por tanto

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{i}{2} e^2 \text{Tr} (G(p) \gamma^\mu G(p - i\partial) \gamma^\nu A_\mu A_\nu). \quad (2.53)$$

Lembrando que o traço de operador $\hat{\mathcal{O}}$ é dado por

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{O}} = \text{tr} \int d^4x \langle x | \hat{\mathcal{O}} | x \rangle. \quad (2.54)$$

Inserindo a relação de completeza $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle\langle p| = 1$, temos

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{O}} = \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \langle x | \hat{\mathcal{O}} | p \rangle \langle p | x \rangle, \quad (2.55)$$

e sabendo que $\langle x | p \rangle = -\langle p | x \rangle = e^{ixp}$, encontramos

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{O}} = \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{O}. \quad (2.56)$$

Com isto, podemos reescrever (2.51) como

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{i}{2} e^2 \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^\mu(x) G(p) \gamma^\nu A_\mu(x) A_\nu(x) \quad (2.57)$$

ou melhor

$$S_{ef}^{(2)} = \int d^4x \Pi^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \quad (2.58)$$

em que $\Pi^{\mu\nu}$ é o tensor de auto energia de 1-laço, dado por

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{2} e^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^\mu G(p - i\partial) \gamma^\nu. \quad (2.59)$$

A partir deste ponto, podemos resolver este problema através de distintos métodos. Primeiramente, utilizando que

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots, \quad (2.60)$$

podemos reescrever $\Pi^{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & \frac{i}{2} e^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (S(p) \not{b} \gamma_5 S(p) \gamma^\mu S(p - i\partial) \gamma^\nu \\ & + S(p) \gamma^\mu S(p - i\partial) \not{b} \gamma_5 S(p - i\partial) \gamma^\nu), \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (2.62)$$

Vamos expandir os propagadores $S(p - i\partial)$ até a primeira ordem na derivada utilizando novamente (2.60), de onde obtemos

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & \frac{i}{2} e^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [S(p) \gamma^\mu S(p) i \not{\partial} S(p) \not{b} \gamma_5 S(p) \gamma^\nu \\ & + S(p) \gamma^\mu S(p) \not{b} \gamma_5 S(p) i \not{\partial} S(p) \gamma^\nu \\ & + S(p) \not{b} \gamma_5 S(p) \gamma^\mu S(p) i \not{\partial} S(p) \gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Utilizando a propriedade cíclica do traço, vamos colocar as matrizes γ_5 no final de cada

contribuição. Assim,

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} = & \frac{i}{2}e^2\text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [S(p)\gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)i\not{\partial}S(p)\not{b}\gamma_5 \\ & + S(p)i\not{\partial}S(p)\gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{b}\gamma_5 \\ & + S(p)\gamma^\mu S(p)i\not{\partial}S(p)\gamma^\nu S(p)\not{b}\gamma_5].\end{aligned}\quad (2.64)$$

Para calcularmos o traço das matrizes de Dirac vamos usar que

$$\text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma_5) = 4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},\quad (2.65)$$

assim, obtemos

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} = & -2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} [(-3(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}b_\lambda\partial_\rho \\ & + 4(\epsilon^{\alpha\nu\lambda\rho}p^\mu p_\alpha b_\lambda\partial_\rho + \epsilon^{\mu\lambda\rho\alpha}p^\nu p_\alpha b_\lambda\partial_\rho + \epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha}p_\alpha b_\lambda p^\beta\partial_\beta))].\end{aligned}\quad (2.66)$$

Note que dentro dos colchetes, temos um termo proporcional a m^2 , cuja integral é finita. Também temos termos proporcionais a p^2 , os quais possuem uma divergência superficial logarítmica. Para resolver estas integrais, vamos utilizar os procedimentos usuais da regularização dimensional. Para isto, vamos passar de um espaço 4-dimensional para um espaço D-dimensional. Então

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D},\quad (2.67)$$

em que μ é um parâmetro de massa arbitrário. Utilizando também a identidade

$$\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p^2 f(p^2),\quad (2.68)$$

obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = -2ie^2\mu^{D-4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} \left[\left(\frac{12 - 3D}{D} \right) p^2 + 3m^2 \right] \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho. \quad (2.69)$$

Ao realizarmos esta integral, encontramos um valor nulo, ou seja, não há geração do termo CFJ, portanto as divergências foram eliminadas entre si. Por outro lado, se em (2.63) tivéssemos levado as matrizes γ_5 para a direita utilizando o anticomutador $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, o traço teria resultado diferente, a saber

$$\Pi_5^{\mu\nu} = -2ie^2\mu^{D-4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} \left[(3m^2 + p^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho + 4\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_\alpha b_\lambda p^\lambda \partial_\rho \right]. \quad (2.70)$$

Utilizando novamente a simetrização (2.68), temos

$$\Pi_5^{\mu\nu} = -2ie^2\mu^{D-4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} \left[3m^2 + \left(\frac{D-4}{D} \right) p^2 \right] \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho. \quad (2.71)$$

Diferente do caso anterior, ao integrar obtemos um termo finito não nulo dado por

$$\Pi_5^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho, \quad (2.72)$$

ou seja, neste caso as divergências anularam-se entre si dando lugar a um resultado finito não nulo.

Por outro lado, se na eq. (2.66) utilizarmos a identidade (2.68) antes de passar a D dimensões, ou seja, utilizando que

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^2 f(p^2), \quad (2.73)$$

obtemos um resultado diferente, dado por

$$\Pi^{\mu\nu} = -6im^2 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho. \quad (2.74)$$

Neste caso, os termos divergentes anularam-se entre si, restando apenas o termo finito, que nos dá como resultado

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{3e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}b_\lambda\partial_\rho. \quad (2.75)$$

Note que não existe nenhum motivo que indique qual opção é correta, se utilizarmos (2.68) ou (2.73). Portanto, temos uma ambiguidade no termo CFJ. Até o momento, não temos uma resposta concreta para explicar esta ambiguidade, mas em [71] é argumentado que está relacionada com a anomalia quiral (veja apêndice A), que por sua vez está relacionada com a corrente quiral j_μ^5 , a qual, por definição, pode conter um termo aditivo do tipo $c\tilde{F}^{\mu\nu}A_\nu$, cuja constante c é indeterminada. Por outro lado, temos termos divergentes que anulam-se entre si, ou seja, temos uma expressão do tipo $\infty - \infty$, o qual não está bem definido. Além disto, é importante dizer que a lagrangiana CFJ não é invariante de calibre (apenas a ação), como é mostrado na equação (2.31), o que sugere que a melhor escolha seria o valor nulo, como discutido em [72, 73]; no entanto, não é uma resposta definitiva. Esta ambiguidade também emerge a temperatura finita como é mostrado em [74]. Também surgem ambiguidades quando tentamos induzir outros termos, como por exemplo, o termo CFJ não abeliano [75], onde a integral a ser resolvida é exatamente a mesma que a da equação (2.71). Também surge ambiguidade no termo CPT par tipo Aether [76], no termo CFJ de altas derivadas [69], entre outros [77, 78].

CAPÍTULO 3

Eletrodinâmica quântica estendida não mínima

Conteúdo

3.1	Introdução	34
3.2	O Modelo	35
3.3	Expansão derivativa	39
3.4	Parametrização de Feynman	43
3.5	Conclusões	47

3.1 Introdução

No início do desenvolvimento do MPE, os estudos se focaram principalmente nos termos de violação de Lorentz mínimos por serem renormalizáveis. Porém, o estudo de termos não mínimos tem ganhado atenção nos últimos anos, pois a adição de termos não mínimos na lagrangiana do MP é plausível pelo fato de que a própria gravidade é não renormalizável, além de ser interessante desde o ponto de vista fenomenológico, pois podem estar associados a novos fenômenos e abre a possibilidade de poder obter limites nos coeficientes VL a partir de novos experimentos. Um estudo pioneiro a considerar uma extensão não mínima da QED foi realizado em [32], no qual é introduzido um termo CPT ímpar de dimensão $d = 5$ na equação de Dirac, chamado de acoplamento magnético, dado por

$$\mathcal{L}_{LV} = gu_{\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha}\psi\epsilon^{\alpha\beta\lambda\delta}F_{\lambda\delta}, \quad (3.1)$$

sendo g a constante de acoplamento cuja dimensão de massa é $[g] = -1$, o que implica que o termo (3.1) seja não renormalizável. No contexto das correções quânticas, em [40] foi estudada a indução radiativa do termo CPT par tipo *aether* [79] através do operador (3.1), ao passo que em [69, 76] foi considerada uma extensão da QED na qual além de (3.1) temos o termo de VL mínimo $\bar{\psi}\not{\beta}\gamma_5\psi$, onde é estudada a indução do termo de Myers-Pospelov [80], do termo CFJ de altas derivadas e do termo CPT par tipo *aether*. Um dos resultados mais interessantes destes trabalhos é que estas correções quânticas, mesmo vindo de termos não renormalizáveis, apresentam resultados finitos. Este fato nos motiva a estudar correções quânticas numa extensão da QED incluindo termos não mínimos, além de que, mesmo existindo vários trabalhos considerando extensões não mínimas do MP, poucos termos distintos têm sido estudados no contexto das correções quânticas. Portanto, neste capítulo, vamos estudar a indução radiativa do termo de CFJ dado na equação (2.28) em 1-laço em uma extensão não mínima da eletrodinâmica quântica, onde consideraremos, pela primeira vez na literatura, todos os termos que violam a simetria de Lorentz de dimensão de massa $d = 5$ dados em [31, 34].

3.2 O Modelo

O modelo da EDQ estendida não mínima que inclui todos os operadores de dimensão $d = 5$, é descrito pela lagrangiana

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2}m^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{1}{2}im_5^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} - \frac{1}{2}a^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{1}{2}b^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} - \frac{1}{4}H^{(5)\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{1}{2}m_F^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}F_{\alpha\beta}\psi - \frac{1}{2}im_{5F}^{(5)\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5F_{\alpha\beta}\psi - \frac{1}{2}a_F^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu F_{\alpha\beta}\psi \\
 &\quad - \frac{1}{2}b_F^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu F_{\alpha\beta}\psi - \frac{1}{4}H_F^{(5)\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\psi,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, $D_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ieA_\mu\psi$ e

$$\begin{aligned}
 iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi &= \frac{1}{2}(iD_\alpha iD_\beta + iD_\beta iD_\alpha)\psi \\
 &= -\partial_\alpha\partial_\beta\psi - ie[A_\beta\partial_\alpha + A_\alpha\partial_\beta + \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)]\psi + e^2 A_\alpha A_\beta\psi.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Os coeficientes representados por tensores constantes de ordem ímpar (com número ímpar de índices) quebram a simetria CPT, enquanto que os de ordem par a preservam. Portanto, apenas os termos envolvendo tensores de ordem ímpar vão ser considerados, pois o termo CFJ é CPT ímpar. Podemos justificar também esta escolha pelo fato de que só tensores de ordem ímpar ao serem contraídos com a métrica de Minkowski $g^{\mu\nu}$ ou com o tensor de Levi-Civita em $3 + 1$ dimensões $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ podem gerar um vetor axial constante, presente na estrutura do termo CFJ. Assim, a lagrangiana (3.2) se reduz a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2}a^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{1}{2}b^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu iD_{(\alpha}iD_{\beta)}\psi + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{1}{2}a_F^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_\mu F_{\alpha\beta}\psi - \frac{1}{2}b_F^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu F_{\alpha\beta}\psi.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Escrevendo a derivada covariante de forma explícita e utilizando (3.3), podemos reescrever a lagrangiana (3.4) como segue:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}[i\cancel{\partial} + (a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu\partial_\alpha\partial_\beta - m \\
 &\quad - e\cancel{A} + ie(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu\nabla_\alpha A_\beta \\
 &\quad - 2e(a_F^{(5)\mu\alpha\beta} + b_F^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu\partial_\alpha A_\beta \\
 &\quad - e^2(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu A_\alpha A_\beta]\psi,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que foi introduzido $\nabla_\alpha A_\beta \equiv 2A_\beta\partial_\alpha + (\partial_\alpha A_\beta)$. Note que $a^{(5)\mu\alpha\beta}$ e $b^{(5)\mu\alpha\beta}$ são tensores simétricos em α, β , enquanto que $a_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ e $b_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ são antissimétricos em α, β .

Uma vez reescrita a lagrangiana de uma forma mais conveniente, vamos calcular a ação efetiva S_{eff} , a qual se relaciona com o funcional gerador fermiônico Z através de

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi e^{i\int d^4x \mathcal{L}_\psi} = e^{iS_{eff}}. \tag{3.6}$$

Inserindo a lagrangiana (3.5) em (3.6) e integrando nos campos espinoriais, obtemos a ação efetiva para o campo de calibre, dada por

$$\begin{aligned}
 S_{eff} &= -i\text{Tr} \ln[\cancel{p} - (a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu p_\alpha p_\beta - m \\
 &\quad - e\cancel{A} + e(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu\nabla_\alpha(p, k)A_\beta \\
 &\quad + 2ie(a_F^{(5)\mu\alpha\beta} + b_F^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu k_\alpha A_\beta \\
 &\quad - e^2(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu A_\alpha A_\beta],
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde, no espaço dos momentos, $\nabla_\alpha(p, k) = 2p_\alpha + k_\alpha$, $i\partial_\alpha\psi = p_\alpha\psi$, e $i\partial_\alpha A_\beta = k_\alpha A_\beta$. Aqui, Tr representa o traço sobre as matrizes de Dirac como também sobre o espaço das coordenadas. Podemos expandir a equação (3.7) em série de potências dos campos

externos, utilizando (2.47) e portanto, podemos reescrever a ação efetiva como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}, \quad (3.8)$$

em que $S_{\text{eff}}^{(0)} = -i\text{Tr} \ln G^{-1}(p)$ e

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(n)} = & \frac{i}{n} \text{Tr} \{ G(p) [e\mathcal{A} - e(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu \nabla_\alpha(p, k)A_\beta \\ & - 2ie(a_F^{(5)\mu\alpha\beta} + b_F^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu k_\alpha A_\beta \\ & + e^2(a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu A_\alpha A_\beta] \}^n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com

$$G(p) = \frac{1}{\not{p} - (a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta}\gamma_5)\gamma_\mu \not{p}_\alpha \not{p}_\beta - m}. \quad (3.10)$$

Como estamos interessados no termo CFJ induzido, necessitamos trabalhar apenas com termos de primeira ordem nos coeficientes $a^{(5)\mu\alpha\beta}$, $b^{(5)\mu\alpha\beta}$, $a_F^{(5)\mu\alpha\beta}$, $b_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ e de segunda ordem em A_μ . Após calcularmos o traço sobre o espaço de coordenadas, usando a identidade chave do método da expansão derivativa $A_\mu(x)G(p) = G(p-k)A_\mu(x)$ [81] e integrando sobre os momentos, obtemos duas contribuições para a ação quadrática em A_μ , dadas por

$$S_{\text{eff}}^{(1)} = i \int d^4x \Pi_1^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad (3.11)$$

com

$$\Pi_1^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (a^{(5)\lambda\mu\nu} + b^{(5)\lambda\mu\nu}\gamma_5)\gamma_\lambda, \quad (3.12)$$

e

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{i}{2} \int d^4x (\Pi_2^{\mu\nu} + \Pi_3^{\mu\nu} + \Pi_4^{\mu\nu} + \Pi_5^{\mu\nu} + \Pi_6^{\mu\nu}) A_\mu A_\nu, \quad (3.13)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu} &= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (a^{(5)\kappa\lambda\mu} + b^{(5)\kappa\lambda\mu} \gamma_5) \gamma_\kappa \nabla_\lambda(p, k) \\ &\quad \times G(p-k) \gamma^\nu, \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3^{\mu\nu} &= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^\mu G(p-k) (a^{(5)\kappa\lambda\nu} + b^{(5)\kappa\lambda\nu} \gamma_5) \\ &\quad \times \gamma_\kappa \nabla_\lambda(p-k, -k), \end{aligned} \quad (3.14b)$$

$$\Pi_4^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^\mu G(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.14c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^{\mu\nu} &= -2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (a_F^{(5)\kappa\lambda\mu} + b_F^{(5)\kappa\lambda\mu} \gamma_5) \gamma_\kappa k_\lambda \\ &\quad \times G(p-k) \gamma^\nu, \end{aligned} \quad (3.14d)$$

$$\begin{aligned} \Pi_6^{\mu\nu} &= -2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^\mu G(p-k) (a_F^{(5)\kappa\lambda\nu} + b_F^{(5)\kappa\lambda\nu} \gamma_5) \\ &\quad \times \gamma_\kappa (-k_\lambda). \end{aligned} \quad (3.14e)$$

Agora, para encontrarmos o termo CFJ devemos isolar termos de primeira ordem nos coeficientes VL. Para isto, vamos utilizar a expansão do propagador $G(p)$, dada por

$$G(p) = S(p) + S(p) (a^{(5)\mu\alpha\beta} + b^{(5)\mu\alpha\beta} \gamma_5) \gamma_\mu p_\alpha p_\beta S(p) + \dots, \quad (3.15)$$

na qual $S(p) = (\not{p} + m)^{-1}$, tal que obtemos os seguintes termos:

$$\Pi_1^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) (a^{(5)\lambda\mu\nu} + b^{(5)\lambda\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\lambda, \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu} &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) (a^{(5)\alpha\kappa\mu} + b^{(5)\alpha\kappa\mu} \gamma_5) \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p, k) \\ &\quad \times S(p-k) \gamma^\nu, \end{aligned} \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3^{\mu\nu} &= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p-k) (a^{(5)\alpha\kappa\nu} + b^{(5)\alpha\kappa\nu} \gamma_5) \\ &\quad \times \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p-k, -k), \end{aligned} \quad (3.16c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_4^{\mu\nu} &= e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [S(p) (a^{(5)\alpha\kappa\lambda} + b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5) \gamma_\alpha p_\kappa p_\lambda S(p) \gamma^\mu S(p-k) \gamma^\nu \\ &\quad + S(p) \gamma^\mu S(p-k) (a^{(5)\alpha\kappa\lambda} + b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5) \gamma_\alpha (p-k)_\kappa (p-k)_\lambda \\ &\quad \times S(p-k) \gamma^\nu], \end{aligned} \quad (3.16d)$$

$$\Pi_5^{\mu\nu} = -2ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) (a_F^{(5)\alpha\kappa\mu} + b_F^{(5)\alpha\kappa\mu} \gamma_5) \gamma_\alpha k_\kappa S(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.16e)$$

$$\begin{aligned} \Pi_6^{\mu\nu} &= -2ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p-k) (a_F^{(5)\alpha\kappa\nu} + b_F^{(5)\alpha\kappa\nu} \gamma_5) \\ &\quad \times \gamma_\alpha (-k_\kappa). \end{aligned} \quad (3.16f)$$

Note que o termo $\Pi_1^{\mu\nu}$ é nulo, pois pelas propriedades de simetria nos índices dos coeficientes VL, os produtos destes com os traços são nulos.

3.3 Expansão derivativa

Agora, vamos calcular o termo induzido CFJ. Para isto, vamos empregar o método da expansão derivativa [81, 83, 84] e ficar apenas com o termo que possui derivada de primeira ordem, que é suficiente e necessário para o nosso objetivo. Para obtermos o termo CFJ, precisamos ter o tensor de Levi-Civita contraído com um vetor axial e é claro que tanto para $a^{(5)\mu\alpha\beta}$ como para $b_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ não vamos ter tal estrutura. De fato, nem $a^{(5)\mu\alpha\beta}$ nem $b_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ podem ser representados na forma de um vetor axial constante multiplicado por um tensor invariante, o tensor de Levi-Civita (para $a^{(5)\mu\alpha\beta}$) ou a métrica de Minkowski (para $b_F^{(5)\mu\alpha\beta}$). Assim, só nos restam os termos proporcionais a $b^{(5)\alpha\kappa\mu}$ e $a_F^{(5)\alpha\kappa\mu}$. Agora,

utilizando a expansão

$$S(p-k) = S(p) + S(p)\not{k}S(p) + \dots, \quad (3.17)$$

obtemos $\Pi_2^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu} = \Pi_{2,1}^{\mu\nu} + \Pi_{2,2}^{\mu\nu}$, onde

$$\Pi_{2,1}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) b^{(5)\alpha\kappa\mu} \gamma_5 \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p, k) S(p) \gamma^\nu, \quad (3.18a)$$

$$\Pi_{2,2}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) b^{(5)\alpha\kappa\mu} \gamma_5 \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p, 0) S(p) \not{k} S(p) \gamma^\nu, \quad (3.18b)$$

assim como $\Pi_3^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu} = \Pi_{3,1}^{\mu\nu} + \Pi_{3,2}^{\mu\nu}$, com

$$\Pi_{3,1}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) b^{(5)\alpha\kappa\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p-k, -k), \quad (3.19a)$$

$$\Pi_{3,2}^{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) \not{k} S(p) b^{(5)\alpha\kappa\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \nabla_\kappa(p, 0), \quad (3.19b)$$

e $\Pi_4^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} = \Pi_{4,1}^{\mu\nu} + \Pi_{4,2}^{\mu\nu} + \Pi_{4,3}^{\mu\nu} + \Pi_{4,4}^{\mu\nu} + \Pi_{4,5}^{\mu\nu}$, com

$$\Pi_{4,1}^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5 \gamma_\alpha p_\kappa p_\lambda S(p) \gamma^\mu S(p) \not{k} S(p) \gamma^\nu, \quad (3.20a)$$

$$\Pi_{4,2}^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) \not{k} S(p) b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5 \gamma_\alpha p_\kappa p_\lambda S(p) \gamma^\nu, \quad (3.20b)$$

$$\Pi_{4,3}^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5 \gamma_\alpha (-k_\kappa) p_\lambda S(p) \gamma^\nu, \quad (3.20c)$$

$$\Pi_{4,4}^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5 \gamma_\alpha p_\kappa (-k_\lambda) S(p) \gamma^\nu, \quad (3.20d)$$

$$\Pi_{4,5}^{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \gamma_5 \gamma_\alpha p_\kappa p_\lambda S(p) \not{k} S(p) \gamma^\nu, \quad (3.20e)$$

e finalmente, $\Pi_5^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{\text{CFJ5}}^{\mu\nu} = \Pi_{5,1}^{\mu\nu}$ e $\Pi_6^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{\text{CFJ6}}^{\mu\nu} = \Pi_{6,1}^{\mu\nu}$, onde

$$\Pi_{5,1}^{\mu\nu} = -2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) a_F^{(5)\alpha\kappa\mu} \gamma_\alpha k_\kappa S(p) \gamma^\nu, \quad (3.21a)$$

$$\Pi_{6,1}^{\mu\nu} = -2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^\mu S(p) a_F^{(5)\alpha\kappa\nu} \gamma_\alpha (-k_\kappa). \quad (3.21b)$$

Calculando os traços nas matrizes de Dirac, fazendo a substituição $d^4p/(2\pi)^4 \rightarrow \mu^{4d}d^Dp/(2\pi)^D$ e utilizando as identidades

$$\int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p^2 f(p^2), \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p_\kappa p_\lambda p_\mu p_\nu f(p^2) &= \frac{g_{\kappa\lambda}g_{\mu\nu} + g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}}{D(D+2)} \\ &\times \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} p^4 f(p^2), \end{aligned} \quad (3.22b)$$

encontramos que as contribuições para o termo CFJ são

$$\Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu} = \frac{8ie^2}{D} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^2} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} g_\lambda^\mu k^\beta \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\nu, \quad (3.23a)$$

$$\Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu} = -\frac{8ie^2}{D} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^2} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} g_\lambda^\nu k^\beta \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\mu, \quad (3.23b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} &= \frac{4ie^2}{D} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^2} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\times (3g_{\lambda\kappa} k^\beta \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + k_\kappa \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\lambda} + k_\lambda \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\kappa}) \\ &- \frac{16ie^2}{D(D+2)} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - m^2)^3} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\times (3g_{\lambda\kappa} k_\beta \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - g_\kappa{}^\mu k_\beta \epsilon^{\nu\beta}{}_{\lambda\alpha} - g_\lambda{}^\mu k_\beta \epsilon^{\nu\beta}{}_{\kappa\alpha} \\ &+ g_\kappa{}^\nu k_\beta \epsilon^{\mu\beta}{}_{\lambda\alpha} + g_\lambda{}^\nu k_\beta \epsilon^{\mu\beta}{}_{\kappa\alpha} + k_\kappa \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\lambda} + k_\lambda \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\kappa}), \end{aligned} \quad (3.23c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ5}}^{\mu\nu} &= -\frac{8ie^2}{D} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\times (2p^2 - D(p^2 - m^2)) g_\alpha{}^\nu k_\kappa g_\lambda{}^\mu, \end{aligned} \quad (3.23d)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ6}}^{\mu\nu} &= \frac{8ie^2}{D} \mu^{D-4} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\times (2p^2 - D(p^2 - m^2)) g_\alpha{}^\mu k_\kappa g_\lambda{}^\nu, \end{aligned} \quad (3.23e)$$

com $\Pi_{\text{CFJ}}^{\mu\nu} = \Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ5}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ6}}^{\mu\nu}$. Agora, vamos calcular estas contribuições uma por uma, utilizando regularização dimensional. Primeiro, os tensores $\Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu}$

e $\Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu}$ tornam-se

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu} &= b^{(5)\alpha\kappa\lambda} 2^{2-D} \pi^{-\frac{D}{2}} e^2 \mu^{4-D} m^{D-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &\quad \times k^\beta (g_\lambda^\mu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\nu - g_\lambda^\nu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\mu), \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde a função gamma $\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$ diverge para $D = 4$. Agora, do tensor $\Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} &= -b^{(5)\alpha\kappa\lambda} 2^{1-D} \pi^{-\frac{D}{2}} e^2 \mu^{4-D} m^{D-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &\quad \times k^\beta (g_\lambda^\mu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\nu + g_\kappa^\mu \epsilon_{\alpha\beta\lambda}{}^\nu - g_\lambda^\nu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\mu - g_\kappa^\nu \epsilon_{\alpha\beta\lambda}{}^\mu). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando o fato de que $b^{(5)\alpha\kappa\lambda}$ é um tensor simétrico, tal que, $b^{(5)\alpha\lambda\kappa} = b^{(5)\alpha\kappa\lambda}$, podemos rescrever $\Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} &= -b^{(5)\alpha\kappa\lambda} 2^{2-D} \pi^{-\frac{D}{2}} e^2 \mu^{4-D} m^{D-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &\quad \times k^\beta (g_\lambda^\mu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\nu - g_\lambda^\nu \epsilon_{\alpha\beta\kappa}{}^\mu). \end{aligned} \quad (3.26)$$

As contribuições restantes $\Pi_{\text{CFJ5}}^{\mu\nu}$ e $\Pi_{\text{CFJ6}}^{\mu\nu}$ vão se anular após a integração em p para qualquer valor de D , isto é

$$\Pi_{\text{CFJ5}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ6}}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.27)$$

Assim, é fácil de observarmos que a soma de todas as contribuições é exatamente zero no limite $D \rightarrow 4$:

$$\Pi_{\text{CFJ}}^{\mu\nu} = \Pi_{\text{CFJ2}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ3}}^{\mu\nu} + \Pi_{\text{CFJ4}}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.28)$$

Por outro lado, podemos notar que usando a simetrização $p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{1}{4} g_{\mu\nu} p^2$ e $p_\kappa p_\lambda p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{1}{24} (g_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} + g_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu}) p^4$, em vez de (3.22), encontramos um resultado não nulo, dado

por

$$\Pi_{\text{CFJ}}^{\mu\nu} = -\frac{e^2 m^2}{4\pi^2} (3b^\alpha - 2a_F^\alpha) k_\beta \epsilon_\alpha^{\beta\mu\nu}, \quad (3.29)$$

em que assumimos que nossos tensores constantes de terceira ordem têm a forma

$$b^{(5)\mu\alpha\beta} = b^\mu g^{\alpha\beta} + b^\alpha g^{\mu\beta} + b^\beta g^{\mu\alpha}, \quad (3.30a)$$

$$a_F^{(5)\mu\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} a_F^\gamma. \quad (3.30b)$$

Como definido em [34], a única restrição sobre os coeficientes $b^{(5)\mu\alpha\beta}$ e $a_F^{(5)\mu\alpha\beta}$ é sua simetria ou antissimetria em relação ao segundo e terceiro índices. Neste caso, no entanto, ao fazermos a escolha (3.30), exigimos que sejam completamente caracterizados por um único vetor axial, o qual se justifica pelo fato de que desejamos obter o termo CFJ, que é completamente descrito por tal vetor, assim como também por uma questão de simplicidade. Em princípio, este cálculo, assim como também estudos de outras correções quânticas que surgem em nossa teoria, podem ser feitos para uma forma arbitrária desses coeficientes.

Vemos também que o nosso resultado parece ser ambíguo. No entanto, mais estudos são necessários a respeito. Como veremos a seguir, nenhum termo CFJ é gerado no esquema da parametrização de Feynman, utilizando regularização dimensional e a simetrização (3.22).

3.4 Parametrização de Feynman

Agora, vamos realizar os cálculos utilizando o método da parametrização de Feynman, a qual é implementada com o uso da seguinte relação:

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta^{(2)}(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{(xA+yB)^{n+1}}. \quad (3.31)$$

Utilizaremos regularização dimensional para o cálculo das integrais, mas, ao contrário do caso anterior, teremos propagadores exatos. Vamos também considerar termos de ordem superior, já que, como vimos anteriormente, os termos de ordem mínima são nulos. Assim, após o cálculo do traço e de introduzirmos o parâmetro de Feynman x , obtemos para os termos proporcionais a $b^{(5)\alpha\kappa\lambda}$

$$\Pi_{2b}^{\mu\nu} = 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda^\mu (k_\kappa + 2q_\kappa)}{(p^2 - M^2)^2} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \epsilon_\alpha^{\nu\sigma\tau} k_\sigma q_\tau, \quad (3.32a)$$

$$\Pi_{3b}^{\mu\nu} = 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda^\nu (3k_\kappa - 2q_\kappa)}{(p^2 - M^2)^2} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \epsilon_\alpha^{\mu\sigma\tau} k_\sigma q_\tau, \quad (3.32b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b,1}^{\mu\nu} &= -4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \, 2x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{q_\kappa q_\lambda}{(p^2 - M^2)^3} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times \left((m^2 - q^2) \epsilon_\alpha^{\mu\nu\sigma} k_\sigma + (2k \cdot q + m^2 - q^2) \epsilon_\alpha^{\mu\nu\sigma} q_\sigma \right. \\ &\quad \left. - 2q^\nu \epsilon_\alpha^{\mu\sigma\tau} k_\sigma q_\tau + 2q^\mu \epsilon_\alpha^{\nu\sigma\tau} k_\sigma q_\tau \right), \end{aligned} \quad (3.32c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b,2}^{\mu\nu} &= 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \, 2(x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(k_\kappa - q_\kappa)(k_\lambda - q_\lambda)}{(p^2 - M^2)^3} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times \left(-(k^2 + m^2 - q^2) \epsilon_\alpha^{\mu\nu\sigma} q_\sigma + 2((k^\nu - q^\nu) \epsilon_\alpha^{\mu\sigma\tau} \right. \\ &\quad \left. + (q^\mu - k^\mu) \epsilon_\alpha^{\nu\sigma\tau}) k_\sigma q_\tau + 2(k \cdot q + m^2 - q^2) \epsilon_\alpha^{\mu\nu\sigma} k_\sigma \right), \end{aligned} \quad (3.32d)$$

e para os termos proporcionais a $a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda}$

$$\begin{aligned} \Pi_{5a_F}^{\mu\nu} &= -8ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{k_\kappa g_\lambda^\mu}{(p^2 - M^2)^2} a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times \left(g_\alpha^\nu (k \cdot q + m^2 - q^2) - q_\alpha (k^\nu - 2p^\nu) - k_\alpha q^\nu \right), \end{aligned} \quad (3.33a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{6a_F}^{\mu\nu} &= 8ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{k_\kappa g_\lambda^\nu}{(p^2 - M^2)^2} a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times \left(g_\alpha^\mu (k \cdot q + m^2 - q^2) - q_\alpha (k^\mu - 2q^\mu) - k_\alpha q^\mu \right), \end{aligned} \quad (3.33b)$$

em que $q_\mu = p_\mu + (1-x)k_\mu$ é o momento interno deslocado e $M^2 = m^2 + x(x-1)k^2$. Ao fazermos o mesmo procedimento com os termos proporcionais ao coeficiente $b_F^{(5)\alpha\kappa\lambda}$, o resultado, após o cálculo do traço, contém apenas potências ímpares do momento interno p , e portanto as integrais sobre o momento, que correspondem às contribuições deste

termo para a ação efetiva, são nulas.

Agora, definindo $\Pi_b^{\mu\nu} = \Pi_{2b}^{\mu\nu} + \Pi_{3b}^{\mu\nu} + \Pi_{4b,1}^{\mu\nu} + \Pi_{4b,2}^{\mu\nu}$ e $\Pi_{a_F}^{\mu\nu} = \Pi_{5a_F}^{\mu\nu} + \Pi_{6a_F}^{\mu\nu}$, utilizando a equação (3.22) e separando os termos divergentes das equações (3.32) e (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_b^{\mu\nu} = & -\frac{e^2 m^2}{4\pi^2 \epsilon'} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} (g_\kappa^\mu k^\beta \epsilon^\nu_{\lambda\alpha\beta} - g_\lambda^\mu k^\beta \epsilon^\nu_{\kappa\alpha\beta} + g_\lambda^\nu k^\beta \epsilon^\mu_{\kappa\alpha\beta} - g_\kappa^\nu k^\beta \epsilon^\mu_{\lambda\alpha\beta}) \\
 & + \frac{e^2 k^2}{24\pi^2 \epsilon'} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} (2g_{\kappa\lambda} k^\beta \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + 2k_\lambda \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\kappa} + 2k_\kappa \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\lambda} + g_\kappa^\mu k_\beta \epsilon^{\nu\beta}_{\lambda\alpha} \\
 & + g_\lambda^\nu k_\beta \epsilon^{\mu\beta}_{\kappa\alpha} - g_\kappa^\nu k_\beta \epsilon^{\mu\beta}_{\lambda\alpha} - g_\lambda^\mu k_\beta \epsilon^{\nu\beta}_{\kappa\alpha}) - \frac{e^2}{12\pi^2 \epsilon'} b^{(5)\alpha\kappa\lambda} (2k_\kappa k_\lambda k^\beta \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \\
 & - k^\nu (k_\lambda k_\beta \epsilon^{\mu\beta}_{\kappa\alpha} + k_\kappa k_\beta \epsilon^{\mu\beta}_{\lambda\alpha}) + k^\mu (k_\lambda k_\beta \epsilon^{\nu\beta}_{\kappa\alpha} + k_\kappa k_\beta \epsilon^{\nu\beta}_{\lambda\alpha})) \\
 & + \textit{termos finitos}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Pi_{a_F}^{\mu\nu} = & -\frac{e^2}{3\pi^2 \epsilon'} a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda} k_\kappa (g_\lambda^\mu k_\alpha k^\nu - k^2 g_\alpha^\nu g_\lambda^\mu + g_\lambda^\nu (k^2 g_\alpha^\mu - k_\alpha k^\mu)) \\
 & + \textit{termos finitos},
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

em que $\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m}{\mu}$, com $\epsilon = 4 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$. Então, levando em conta as decomposições dos coeficientes $b^{(5)\alpha\kappa\lambda}$ e $a_F^{(5)\alpha\kappa\lambda}$, dadas nas equações (3.30), obtemos

$$\Pi_{b+a_F}^{\mu\nu} = \Pi_b^{\mu\nu} + \Pi_{a_F}^{\mu\nu} = -\frac{e^2 k^2}{3\pi^2 \epsilon'} (2a_F^\alpha - b^\alpha) k_\beta \epsilon_\alpha^{\beta\mu\nu} + \textit{termos finitos}, \tag{3.36}$$

que tem a estrutura do termo CFJ de altas derivadas (veja por exemplo, [69, 85]). Finalmente, com o objetivo de eliminar os termos divergentes, podemos considerar, por exemplo, $a_F^\kappa = \frac{1}{2} b^\kappa$. Com esta escolha a divergência é eliminada e as contribuições finitas tomam a forma

$$\Pi_{b+a_F}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[k^2 + 6m^2 - \frac{24m^4}{\sqrt{k^2(4m^2 - k^2)}} \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2} - 1} \right) \right] b_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{3.37}$$

Podemos verificar facilmente a equação (3.28), pois considerando o limite $k^2 \ll m^2$ ($m \neq 0$) na equação (3.37) acima, obtemos

$$\Pi_{b+a_F}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{60\pi^2 m^2} k^4 b_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{m^2}\right), \quad (3.38)$$

o que significa que o termo CFJ correspondente a esta contribuição é zero, assim como também o termo CFJ de altas derivadas.

Agora, vamos estudar a contribuição do coeficiente $a^{(5)\alpha\kappa\lambda}$, o qual após o cálculo do traço e da introdução do parâmetro de Feynman x , fica

$$\begin{aligned} \Pi_{2a}^{\mu\nu} &= -4e^2 \mu^{D-4} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda^\mu (k_\kappa + 2q_\kappa)}{(p^2 - M^2)^2} \\ &\quad \times a^{(5)\alpha\kappa\lambda} (g_\alpha^\nu (k \cdot q + m^2 - q^2) - q_\alpha (k^\nu - 2q^\nu) - k_\alpha q^\nu), \end{aligned} \quad (3.39a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3a}^{\mu\nu} &= 4e^2 \mu^{D-4} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g_\lambda^\nu (3k_\kappa - 2q_\kappa)}{(p^2 - M^2)^2} \\ &\quad \times a^{(5)\alpha\kappa\lambda} (g_\alpha^\mu (k \cdot q + m^2 - q^2) - q_\alpha (k^\mu - 2q^\mu) - k_\alpha q^\mu), \end{aligned} \quad (3.39b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4a,1}^{\mu\nu} &= 4e^2 \mu^{D-4} \int_0^1 dx \, 2x \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{q_\kappa q_\lambda}{(p^2 - M^2)^3} a^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times (k_\alpha (m^2 - q^2) g^{\mu\nu} - (g_\alpha^\mu (k^\nu - q^\nu) + g_\alpha^\nu (k^\mu - q^\mu)) (m^2 - q^2) \\ &\quad + q_\alpha (g^{\mu\nu} (2k \cdot q + m^2 - q^2) - 2k^\nu q^\mu - 2q^\nu (k^\mu - 2q^\mu))), \end{aligned} \quad (3.39c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4a,2}^{\mu\nu} &= 4e^2 \mu^{D-4} \int_0^1 dx \, 2(x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(k_\kappa - q_\kappa)(k_\lambda - q_\lambda)}{(p^2 - M^2)^3} a^{(5)\alpha\kappa\lambda} \\ &\quad \times ((-k^2 + 2k \cdot q + m^2 - q^2) (q^\nu g_\alpha^\mu + q^\mu g_\alpha^\nu) \\ &\quad - 2k_\alpha (g^{\mu\nu} (k \cdot q + m^2 - q^2) - k^\nu q^\mu - q^\nu (k^\mu - 2q^\mu))) \\ &\quad + q_\alpha (g^{\mu\nu} (k^2 + m^2 - q^2) - 2k^\nu q^\mu - 2q^\nu (k^\mu - 2q^\mu)), \end{aligned} \quad (3.39d)$$

em que novamente $q_\mu = p_\mu + (1-x)k_\mu$ e $M^2 = m^2 + x(x-1)k^2$. Então, após integrar, obtemos como resultado $\Pi_a^{\mu\nu} = \Pi_{2a}^{\mu\nu} + \Pi_{3a}^{\mu\nu} + \Pi_{4a,1}^{\mu\nu} + \Pi_{4a,2}^{\mu\nu}$, dado por

$$\begin{aligned} \Pi_a^{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{3\pi^2 \epsilon'} a^{(5)\alpha\kappa\lambda} k_\kappa (g_\lambda^\mu k_\alpha k^\nu - k^2 g_\alpha^\nu g_\lambda^\mu + g_\lambda^\nu (k^2 g_\alpha^\mu - k_\alpha k^\mu)) \\ &\quad + \text{termos finitos.} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta expressão se anula ao considerarmos que $a^{(5)\alpha\kappa\lambda}$ é simétrico nos últimos dois índices. Desse modo, se escolhermos, por exemplo,

$$a^{(5)\alpha\kappa\lambda} = a^\kappa g^{\alpha\lambda} + a^\lambda g^{\alpha\kappa}, \quad (3.41)$$

a parte finita também é anulada, isto é, $\Pi_a^{\mu\nu} = 0$. Finalmente, reescrevendo $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_a^{\mu\nu} + \Pi_b^{\mu\nu} + \Pi_{aF}^{\mu\nu} + \Pi_{bF}^{\mu\nu}$, obtemos uma contribuição de altas derivadas na ação efetiva no setor CPT ímpar, dado por

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[k^2 + 6m^2 - \frac{24m^4}{\sqrt{k^2(4m^2 - k^2)}} \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2} - 1} \right) \right] b_\alpha k_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (3.42)$$

Portanto, podemos concluir que o termo CFJ também não é gerado ao utilizarmos a parametrização de Feynman no desenvolvimento dos cálculos, assim como no resultado (3.28), calculado no esquema anterior.

Isto permite afirmarmos que o termo CFJ nulo parece ser o resultado mais natural. Além disto, é importante destacar que as contribuições divergentes podem ser canceladas impondo relações de proporcionalidade entre os coeficientes a_F^μ e b^μ .

3.5 Conclusões

Neste capítulo, estudamos a geração do termo CFJ como correção quântica na extensão não mínima da EDQ considerando operadores de dimensão $d = 5$. Ao resolvermos este problema utilizando o método da expansão derivativa, deparamos-nos com o fato de que se utilizarmos a relação $p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{p^2}{D}$, obtemos um resultado nulo para o termo CFJ, ao passo que se utilizarmos $p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{p^2}{4}$, encontramos um resultado não nulo, porém também finito. Situação já identificada na literatura [63, 86, 87] e que parece ser natural desde que temos integrais superficialmente divergentes que se anulam entre si. Ao utilizarmos a parametrização de Feynman e regularização dimensional, encontramos que não há geração do termo CFJ, mas sim um termo divergente com a estrutura do termo CFJ de altas

derivadas mais termos finitos. Para uma relação entre os coeficientes de VL a_F^α e b^α apropriada, este termo divergente pode ser eliminado ficando apenas com as contribuições finitas, que também têm a forma de um termo CFJ de altas derivadas. O resultado nulo para o termo CFJ parece ser o mais adequado, pois segundo é argumentado em [72, 73], o termo CFJ nulo aparenta ser mais consistente fisicamente, primeiramente porque o termo CFJ não é invariante de calibre, apenas sua contribuição à ação. Por outro lado se o vector constante b_μ é promovido a um campo, ou se estendemos a teoria a um espaço-tempo curvo, o termo CFJ não é mais invariante de calibre

Uma conclusão importante deste estudo é a confirmação de que termos com acoplamentos não mínimos (não renormalizáveis) podem produzir resultados finitos, tal como acontece com o acoplamento magnético (3.1) ao gerar o termo tipo *aether* finito e um termo com três derivadas, como é mostrado em [40, 69, 76]. Outra conclusão importante é que conseguimos gerar termos CPT ímpares finitos de altas derivadas através de um acoplamento diferente daquele utilizado em [69].

CAPÍTULO 4

Teorias de Horava-Lifshitz

Conteúdo

4.1	Introdução	50
4.2	Campo escalar livre	51
4.3	EDQ de Horava-Lifshitz $z=3$	56

4.1 Introdução

Em 2009, Horava propôs uma teoria de Gravidade Quântica [11], baseando-se no escalonamento anisotrópico introduzido por Lifshitz em 1941, no contexto das transições de fase na matéria condensada [25]. O escalonamento de Lifshitz é dado por

$$t \rightarrow b^z t, \quad x \rightarrow bx, \quad (4.1)$$

em que z é chamado de expoente dinâmico crítico e controla a anisotropia do espaço-tempo, sendo que para valores de $z \neq 1$, a simetria de Lorentz é explicitamente quebrada. Este escalonamento implica numa mudança das dimensões canônicas das coordenadas espaço-temporais, as quais, em unidades de massa, são dadas por

$$[t] = -z, \quad [x] = -1. \quad (4.2)$$

Como consequência deste escalonamento, a ação da teoria gravitacional envolve duas derivadas temporais, como no caso usual, porém $2z$ derivadas espaciais, o que acarreta que, para $z = 3$, a teoria da gravidade torna-se renormalizável segundo o argumento de contagem de potências, pois a dimensão de massa da constante de acoplamento é zero. Além disto, a teoria de Horava é livre de fantasmas pelo fato de apresentar altas derivadas apenas nas coordenadas espaciais, solucionando assim um dos empecilhos das teorias de altas derivadas estudadas anteriormente, as quais solucionavam o problema da renormalização da gravidade, porém violavam a unitariedade [88]. Contudo, na teoria proposta por Horava, quando tomamos o limite de baixas energias não obtemos exatamente a teoria da gravidade de Einstein usual como esperado; portanto, mais estudos precisam ser feitos. Nas referências [89, 90, 91, 92], podem ser encontradas revisões sobre a teoria gravitacional de Horava.

Dada a possibilidade de melhorar o comportamento ultravioleta e de aumentar o número de termos de interação renormalizáveis possíveis, é que surgiu o interesse por

estudar outras teorias na extensão de Horava-Lifshitz (HL), podendo citar, por exemplo, estudos de modelos com interação de 4 férmions com $z = 2$ ou $z = 3$ [93, 94, 95], ou no caso do modelo de Gross-Neveu com z qualquer [96], do modelo sigma não linear [97], modelo CP^{N-1} [98], do campo escalar [99], da EDQ para $z = 2$ e $z = 3$ [100, 101, 102], entre outros. Estudos sobre o potencial efetivo podem ser encontrados em [103, 104, 105]. Para uma revisão geral sobre teorias tipo Horava-Lifshitz, ver [26, 106].

Neste capítulo discutiremos as principais características das teorias tipo HL através do estudo do campo escalar livre. Posteriormente, faremos uma breve revisão da extensão de HL da Eletrodinâmica Quântica. Esta teoria foi estudada em [100] para $z = 2$, onde foi mostrado que as correções quânticas para o propagador do fóton são nulas. Além disto, em [102] é mostrado que não existe anomalia quiral para qualquer valor de z par; portanto, não é interessante para o nosso estudo o caso em que z é par. Por outro lado, para $z = 3$ a teoria apresenta correções quânticas não nulas [101] e anomalia quiral [107, 108], assim, existe a possibilidade de gerar o termo de Carroll-Field-Jackiw na EDQ de HL com $z = 3$, que será abordado no capítulo 5.

4.2 Campo escalar livre

Para começar o estudo das teorias tipo HL e suas consequências, vamos considerar o campo escalar livre em $d + 1$ dimensões espaço-temporais, cuja ação no caso isotrópico ($z = 1$) é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^d x \left[\dot{\phi}^2 - \phi \Delta \phi - m^2 \phi^2 \right], \quad (4.3)$$

com $\Delta = \partial_i \partial^i$. As dimensões canônicas em unidade de massa das coordenadas são $[x] = [t] = -1$. Como estamos trabalhando em unidades naturais, temos que $[S] = 1$. Então

$$[\phi] = \frac{D - 1}{2}. \quad (4.4)$$

Ao fazermos o escalonamento de Lifshitz, as dimensões canônicas mudam, como é mostrado em (4.2). Assim, $[dtd^d x] = -z - d$, $[\partial_t] = t$ e $[\partial_i] = 1$, e portanto

$$[\phi] = \frac{d - z}{2}. \quad (4.5)$$

Note que existe uma inconsistência no segundo termo de (4.3), pois este levaria a uma dimensão de massa diferente para o campo escalar ϕ . Para resolvermos este problema é necessário acrescentar termos com altas derivadas espaciais, neste caso, até a ordem $2z$, o que por sua vez traz uma melhora no comportamento ultravioleta da teoria. Assim, a ação mais geral para o campo escalar livre na extensão de HL é dada por

$$S_{HL} = \frac{1}{2} \int dt d^d x \left(\dot{\phi}^2 - \phi \left[\sum_{n=1}^z \Lambda_n^{2(z-n)} \Delta^n \right] \phi - m^{2z} \phi^2 \right), \quad (4.6)$$

em que $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$ e $[m] = [\Lambda_n] = 1$. O propagador do campo é dado por

$$G(p_0, \vec{p}) = \frac{i}{p_0^2 - \sum_{n=1}^z \Lambda_n^{2(z-n)} |\vec{p}|^{2n} - m^{2z} + i\epsilon}, \quad (4.7)$$

e a relação de dispersão correspondente é

$$\begin{aligned} \omega^2 &= m^{2z} + \sum_{n=1}^z \Lambda_n^{2(z-n)} |\vec{p}|^{2n} \\ &= m^{2z} + \Lambda_1^{2(z-1)} |\vec{p}|^2 + \Lambda_2^{2(z-2)} |\vec{p}|^4 + \dots + |\vec{p}|^{2z}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que ω é a frequência. É fácil ver que esta relação de dispersão não é invariante de Lorentz no ultravioleta em que o termo dominante é $|\vec{p}|^{2z} \Rightarrow \omega^2 \approx |\vec{p}|^{2z}$. Por outro lado, se $\Lambda_1 \neq 0$, podemos escrever

$$\bar{\omega}^2 = \bar{m}^2 + |\vec{p}|^2 + \frac{\Lambda_2^{2(z-2)}}{\Lambda_1^{2(z-1)}} |\vec{p}|^4 + \dots, \quad (4.9)$$

em que

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\Lambda_1^{(z-1)}}, \quad \bar{m} = \frac{m^z}{\Lambda_1^{(z-1)}}. \quad (4.10)$$

A relação de dispersão (4.9) pode ser interpretada como uma modificação da relação de dispersão invariante de Lorentz usual com termos de ordem superior nos momentos, os quais poderiam surgir como efeitos da gravidade quântica. No limite de baixas energias, com $|\vec{p}|^2 \ll \Lambda_1^{2(z-1)}$, recuperamos aproximadamente a relação de dispersão usual

$$\bar{\omega}^2 \approx \bar{m}^2 + |\vec{p}|^2, \quad (4.11)$$

ou seja, no limite de baixas energias a invariância de Lorentz é aproximadamente recuperada e o valor do expoente dinâmico crítico $z \rightarrow 1$. À medida que a energia aumenta, os termos de ordem superior no lado direito de (4.9) começam a ser não desprezíveis.

Um aspecto importante é que, como mencionamos anteriormente, pelo fato de ter uma mudança na dimensão de massa do campo ϕ temos a possibilidade de ter novos termos de interação renormalizáveis. Primeiramente, vamos considerar um termo de auto interação de n pontos dado por

$$S_n = \lambda_n \int dt d^d x \phi^n. \quad (4.12)$$

De (4.5) e (4.2) temos que a dimensão da constante de acoplamento é dada por

$$[\lambda_n] = \frac{z(2+n) + d(2-n)}{2}, \quad (4.13)$$

sendo que para $[\lambda_n] \geq 0$ o termo de interação é renormalizável. Por exemplo, para o caso $d = 3$, temos que para $z = 1$,

$$[\lambda_n] = 4 - n,$$

para $z = 2$,

$$[\lambda_n] = \frac{10 - n}{2},$$

e para $z = 3$

$$[\lambda_n] = 6.$$

Assim, para o caso isotrópico ($z = 1$), o termo de auto interação de maior ordem renormalizável é $\lambda_4\phi^4$. Para $z = 2$, podemos ter até $\lambda_{10}\phi^{10}$, enquanto que para $z = 3$ (ou no caso geral, para $z \geq d$ para qualquer d), o termo de interação será renormalizável para qualquer n . Vamos considerar agora um termo de interação com derivadas do tipo

$$S_{a,n} = \int dt d^d x \lambda_{a,n} \partial_i^a \phi^n, \quad (4.14)$$

sendo que a constante de acoplamento tem dimensões

$$[\lambda_{a,n}] = \frac{z(2+n) + d(2-n) - 2a}{2}, \quad (4.15)$$

e portanto temos que, no caso em que $d = 3$, para $z = 1$,

$$[\lambda_n] = 4 - (n + a),$$

para $z = 2$,

$$[\lambda_n] = \frac{10 - (n + 2a)}{2},$$

e para $z = 3$,

$$[\lambda_n] = 6 - a.$$

Logo, para que os termos de interação do tipo (4.14) sejam renormalizáveis temos que: no caso isotrópico, deve-se satisfazer $n + a \leq 4$; para o caso $z = 2$, deve-se satisfazer $n + 2a \leq 10$, aumentando as possibilidades; e para $z = 3$, deve-se satisfazer $a \leq 6$. De modo geral, para $z = d$, com d qualquer, $a \leq 2z$ deve ser satisfeito.

Finalmente vamos considerar a teoria $\lambda\phi^4$ na extensão de HL com $z = 3$ em (3+1)

dimensões, a qual é caracterizada pela seguinte ação

$$S_{HL} = \frac{1}{2} \int dt d^3x \left(\dot{\phi}^2 - \phi [\Lambda_1^4 \Delta + \Lambda_2^2 \Delta^2 + \Delta^3 + m^6] \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right). \quad (4.16)$$

A correção do propagador do campo escalar em um laço é representado pelo diagrama de Feynman da fig. 4.1, e é dado por

$$I \propto \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0^2 - \Lambda_1^4 |\vec{p}|^2 - \Lambda_2^2 |\vec{p}|^4 - |\vec{p}|^6 - m^6 + i\epsilon}. \quad (4.17)$$

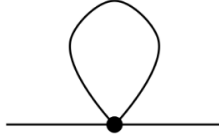


Figura 4.1: Diagrama de Feynman da correção a 1-laço do propagador do campo escalar na teoria $\lambda\phi^4$.

Após realizarmos uma rotação de Wick e integrar em p_0 , obtemos

$$I \propto \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1^4 |\vec{p}|^2 + \Lambda_2^2 |\vec{p}|^4 + |\vec{p}|^6 + m^6}}. \quad (4.18)$$

No limite em que $\mathbf{p} \rightarrow \infty$, temos

$$I \propto \int \frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{p}} \quad (4.19)$$

em que, por simplicidade, temos considerado que $|\vec{p}| = \mathbf{p}$. A eq. (4.19) nos mostra que a integral I é logaritmicamente divergente. Por outro lado, no caso isotrópico usual, a integral no espaço euclidiano é dada por

$$I' \propto \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \propto \int dp p, \quad (4.20)$$

o que nos mostra que esta integral é quadraticamente divergente. Portanto, podemos concluir que ao trabalharmos na extensão de HL melhoramos o comportamento ultravioleta da teoria, pois abaixamos o grau de divergência superficial da integral em questão.

Note que para um valor de z ainda maior é possível fazer com que a integral (4.18) seja convergente.

4.3 EDQ de Horava-Lifshitz $z=3$

Agora vamos estudar brevemente a extensão de HL da Eletrodinâmica Quântica com $z = 3$ em $(3 + 1)$, que é descrita pela lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{a_3^2}{4}F_{ij}\Delta^2 F^{ij} + \bar{\psi} [i\gamma^0(\partial_0 - ieA_0) \\ & + b_1 (i\gamma^i(\partial_i - ieA_i)) + b_3 (i\gamma^i(\partial_i - ieA_i))^3 - m^3] \psi, \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que $\Delta = \partial_i\partial^i$. Ao realizarmos a análise dimensional da teoria levando em consideração (4.2), temos que as dimensões de massa são

$$\begin{aligned} [A_0] &= 2, & [A_i] &= 0, & [m] &= [e] = 1, \\ [\psi] &= \frac{3}{2}, & [b_1] &= 2, & [a_3] &= [b_3] = 0. \end{aligned}$$

A ação associada à lagrangiana (4.21) é invariante sob as transformações de calibre

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{ie\alpha}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-ie\alpha} \\ A_{0,i} &\rightarrow A_{0,i} + \partial_{0,i}\alpha. \end{aligned}$$

Para o cálculo do propagador do fóton, vamos utilizar o seguinte termo de fixação de gauge [104]

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2} [(a_3\Delta)^{-1}\partial_0 A^0 + a_3\Delta\partial_i A^i]^2. \quad (4.22)$$

Embora este termo seja não local, é análogo ao calibre de Feynman na EDQ HL $z = 3$. Adicionando este termo na lagrangiana, encontramos os seguintes propagadores para o

fóton

$$D_{00}(k) = -\frac{ia_3^2 k^4}{k_0^2 - a_3^2 k^6}, \quad (4.23)$$

$$D_{ij}(k) = -\frac{-ig_{ij}}{k_0^2 - a_3^2 k^6}, \quad (4.24)$$

e para férmions

$$S(k) = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + b_3 \not{k} k^2 - m^3} = i \frac{\gamma^0 k_0 + b_3 \not{k} k^2 + m^3}{k_0^2 - b_3^2 k^6 - m^6} \quad (4.25)$$

em que $\not{k} \equiv k_i \gamma_i$ e $k^2 = |\vec{k}|^2$.

Vamos calcular agora as correções quânticas da função de dois pontos do campo de calibre, as quais são representadas pelos diagramas de Feynman da figura 4.2, seguindo o mesmo procedimento adotado no capítulo anterior para o cálculo de correções quânticas.

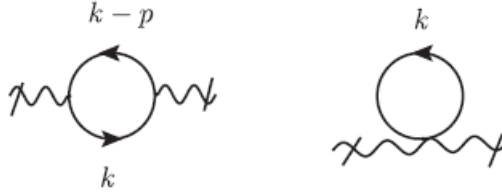


Figura 4.2: Correções quânticas a 1-laço para a função de dois pontos do campo de calibre.

Primeiramente, o segundo gráfico da figura 4.2 não contribui ao termo de Maxwell pois o vértice deste gráfico contém apenas termos lineares no momento externo e, portanto, não gera termos quadráticos em $F_{\mu\nu}$. Este diagrama serve apenas para cancelar contribuições que não são invariantes de calibre provenientes de outros gráficos [101].

Escrevendo a ação efetiva como (3.8), encontramos que as contribuições para a função de dois pontos vão ser obtidas na ação efetiva para $n = 2$

$$S_{ef}^{(2)}[A] = \frac{i}{2} \int d^4p (A_0(-p)A_0(p)\Pi^{00}(p) + A_0(-p)A_i(p)\Pi^{0i}(p) + A_i(-p)A_j(p)\Pi^{ij}(p)) \quad (4.26)$$

em que $\Pi^{00}(p) = \Pi_1^{00} + \Pi_2^{00}$, com

$$\Pi_1^{00} = e^2 \mu^{d-3} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \text{tr} [\gamma^0 S(K) \gamma^0 S(k-p)] \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_2^{00} = & -ie^2 b_1 \mu^{3-d} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \text{tr} [\not{k} S(k) \gamma_0 S(k-p) \gamma_0 S(k) \\ & + S(k) \gamma_0 S(k-p) (\not{k} - \not{p}) S(k-p) \gamma_0] \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que μ é um parâmetro com dimensão de massa que é introduzido para fixar a dimensão da integral ao seu valor em três dimensões espaciais. Para resolver estas integrais, vamos utilizar o método da expansão derivativa nos momentos externos,

$$\Pi_{00}(p) = \Pi_{00} + \frac{p_i p_j}{2} \frac{\partial^2 \Pi^{00}}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{p=0} + \dots \quad (4.29)$$

e integraremos sobre as coordenadas esféricas d-dimensionais. Assim, ao resolvermos as integrais acima, encontramos

$$\Pi^{00} = -i\alpha_1 \vec{p}^2, \quad (4.30)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{e^2 a_3^{\frac{2-d}{3}} \mu^{3-d} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3(2\pi)^{\frac{1}{2}(d+1)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} + \frac{e^2 b_1 a_3^{\frac{1-d}{3}} \mu^{3-d} m^{d-7} \Gamma\left(\frac{7}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+8}{6}\right)}{3(2\pi)^{\frac{1}{2}(d+1)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}, \quad (4.31)$$

onde temos que, para $d = 3$, o termo α_1 é finito. A seguinte contribuição é

$$\begin{aligned} \Pi_{0i}(p) = & e\mu^{3-d} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \text{tr} \left\{ V_{3i}(k, -p) S(k) \gamma^0 S(k-p) - ib_1 V_{3j}^{(2)}(k, -p) \right. \\ & \left. \times [S(k) \not{k} S(k) \gamma_0 S(k-p) + S(k) \gamma_0 S(k-p) (\not{k} - \not{p}) S(k-p)] \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned}
 V_{3i} &= V_{3i}^{(1)} + V_{3i}^{(2)}, \\
 V_{3i}^{(1)} &= eb_1\gamma_i, \\
 V_{3i}^{(2)} &= eb_3 \left(-\gamma_i(\vec{p} + \vec{k})^2 + \not{p}\gamma_i\not{k} - 2\not{k}k_i \right).
 \end{aligned}$$

Integrando, temos como resultado

$$\Pi_{0i}(p) = -i\alpha_1 p_0 p_i. \quad (4.33)$$

Por último, temos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{ij} &= \mu^{d-3} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \text{tr} \left\{ V_{3i}(k, -p) S(k) V_{3j}(k-p, p) S(k-p) \right. \\
 &\quad \left. - ib_1 V_{3i}^{(2)}(k, -p) \left[S(k) \not{k} S(k) V_{3j}^{(2)}(k-p, p) S(k-p) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - S(k) V_{3j}^{(2)}(k-p, p) S(k-p) (\not{k} - \not{p}) S(k-p) \right] \right\}. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

Após integrar, obtemos como resultado

$$\Pi_{ij} = -i\alpha_1 p_0^2 \delta_{ij} + i\alpha_2 (p_i p_j - \vec{p}^2 \delta_{ij}) + i\alpha_3 (p_i p_j - \vec{p}^2 \delta_{ij}) \vec{p}^2, \quad (4.35)$$

em que o último termo provém da derivada à quarta com respeito ao momento externo de (4.34) que aparece na expansão derivativa. As constantes α_2 e α_3 são dadas por

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= -\frac{e^2 a_3^{\frac{4-d}{3}} \mu^{3-d} m^{d-1} d(d-2) \Gamma\left(\frac{1}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+2}{6}\right)}{12(2\pi)^{\frac{1}{2}(d+1)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \\
 &\quad - \frac{e^2 b_1 a_3^{\frac{3-d}{3}} \mu^{3-d} m^{d-3} (d-2)(d-4) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+6}{6}\right)}{6(2\pi)^{\frac{1}{2}(d+1)} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}, \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

e

$$\alpha_3 = \frac{e^2 a_3^{\frac{6-d}{3}} 2^{\frac{5-d}{2}} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \mu^{3-d} m^{d-3} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6}\right)}{5\Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right)}. \quad (4.37)$$

Note que tanto α_2 quanto α_3 possuem uma divergência quando $d = 3$. Para deixar isto em evidência e realizar o processo de renormalização posteriormente, vamos reescrever estes termos como

$$\alpha_2 = \frac{b_1 e^2}{6\pi^2(d-3)} + \text{termos finitos} \quad (4.38)$$

$$\alpha_3 = \frac{6a_3 e^2}{5\pi^2(d-3)} + \text{termos finitos}. \quad (4.39)$$

Finalmente, temos que a lagrangiana efetiva no setor fotônico puro é dada por

$$\mathcal{L}_\gamma^{ef} = \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}\alpha_2 F_{ij}F_{ij} - \frac{1}{4}\alpha_3 F_{ij}\Delta F_{ij} - \frac{a_3^2}{4}F_{ij}\Delta^2 F_{ij}. \quad (4.40)$$

Como podemos ver, temos induzido dois termos divergentes do tipo $a_1 F_{ij}F_{ij}$ e $a_2 F_{ij}\Delta F_{ij}$ que vão contribuir com a função de dois pontos do campo de calibre e que não estão presentes na lagrangiana original (4.21). Para realizar o processo de renormalização e eliminar estas divergências, precisamos ter estes termos presentes na lagrangiana "nua". Sendo assim, vamos definir a nova lagrangiana, cujo setor fotônico puro é dado por

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{a_1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{a_2}{4}F_{ij}\Delta F^{ij} - \frac{a_3^2}{4}F_{ij}\Delta^2 F^{ij}, \quad (4.41)$$

onde, por simplicidade, vamos tratar os parâmetros a_1 e a_2 perturbativamente; assim, estes termos não vão contribuir aos propagadores livres. Para escrever a lagrangiana renormalizada, vamos fazer as seguintes reparametrizações

$$A_0 = Z^{1/2}A_{0r}, \quad A_i = Z^{1/2}A_{ir} \quad \text{e} \quad a_i = \frac{Z_{a_i}}{Z}a_{ir} \quad \text{com } i = 1, 2, \quad (4.42)$$

então, a lagrangiana renormalizada fica

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{Z}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{a_{1r}Z_{a_1}}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{a_{2r}Z_{a_2}}{4}F_{ij}\Delta F^{ij} - \frac{a_3^2 Z}{4}F_{ij}\Delta^2 F^{ij}. \quad (4.43)$$

Agora vamos eliminar as divergências. Para isto, vamos escrever

$$Z_{a_1} = 1 + \delta Z_{a_1}, \quad \text{com} \quad a_{1r} \delta Z_{a_1} = \frac{b_1 e^2}{6\pi^2(d-3)}, \quad (4.44)$$

e

$$Z_{a_2} = 1 + \delta Z_{a_2}, \quad \text{com} \quad a_{2r} \delta Z_{a_2} = \frac{6a_3 e^2}{5\pi^2(d-3)}, \quad (4.45)$$

ao passo que a lagrangiana efetiva a 1-laço renormalizada no setor fotônico puro fica dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma = & \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}(a_{1r} + \alpha_{2Fin})F_{ij}F^{ij} \\ & - \frac{1}{4}(a_{2r} + \alpha_{3Fin})F_{ij}\Delta F^{ij} - \frac{a_3^2}{4}F_{ij}\Delta^2 F^{ij}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

em que $\alpha_{2Fin} = \alpha_2 - \frac{b_1 e^2}{6\pi^2(d-3)}$ e $\alpha_{3Fin} = \alpha_3 - \frac{6a_3 e^2}{5\pi^2(d-3)}$ são as partes finitas de (4.38) e (4.39), respectivamente. Os termos cujos coeficientes contem a_{1r} ou a_{2r} não vão induzir novas divergências na teoria e podem ser tratados como pequenas perturbações da ação clássica. Mais detalhes sobre este trabalho são encontrados em [101].

CAPÍTULO 5

Eletrodinâmica de HL $z=3$ com quebra de simetria CPT

Conteúdo

5.1	Introdução	63
5.2	O Modelo	63
5.3	Cálculo do termo CFJ induzido	68
5.3.1	Integral Funcional	73
5.3.2	Teoria Completa	84
5.4	Conclusões	85

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, temos considerado duas abordagens diferentes para introduzir a quebra de simetria de Lorentz. Na primeira, temos o Modelo Padrão Estendido, onde introduzimos novos termos nos distintos setores da lagrangiana do Modelo Padrão. Estes termos são proporcionais a vetores ou, no geral, tensores constantes que dão origem a direções espaço-temporais privilegiadas, quebrando assim a invariância de Lorentz. Na segunda, consideramos as teorias de Horava-Lifshitz, onde a quebra é devida à anisotropia do espaço-tempo.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a possibilidade de incorporar consistentemente essas duas teorias num contexto geral da quebra de simetria de Lorentz. Para isto, vamos introduzir na lagrangiana da EDQ HL $z = 3$ um termo proporcional a um vetor axial que quebra a simetria CPT em analogia com o modelo da EDQ usual com violação de Lorentz e CPT [61]. Posteriormente vamos analisar a possibilidade de induzir um termo do tipo CFJ através de correções quânticas utilizando diferentes metodologias no desenvolvimento dos cálculos.

5.2 O Modelo

Vamos considerar a extensão de HL da EDQ com $z = 3$ incluindo o vetor axial $b_{0,i}$ constante, que quebra a simetria CPT. Neste modelo, devido à anisotropia do espaço-tempo, surge naturalmente um termo cuja estrutura é equivalente à de um dos termos de violação de Lorentz não mínimos de dimensão $d = 5$ do Modelo Padrão Estendido. A lagrangiana do setor fermiônico deste modelo é dada por

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(iD_0\gamma^0 + c_1i\mathcal{D} + c_3(i\mathcal{D})^3 - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 - d_1\not{b}\gamma_5 + d_2(\not{b}\mathcal{D}\mathcal{D})\gamma_5)\psi, \quad (5.1)$$

onde estamos agora utilizando a notação $\mathcal{D} = \gamma^i D_i$ (o mesmo para os outros vetores), com $(\not{b}\mathcal{D}\mathcal{D}) = (bDD)_{ijk}\gamma^i\gamma^j\gamma^k$, e $D_{0,i} = \partial_{0,i} + ieA_{0,i}$. Utilizando a mesma metodologia

aplicada em [93], definimos

$$(bDD)_{ijk} = \lambda_1 b_i D_j D_k + \lambda_2 b_j D_i D_k + \lambda_3 b_k D_i D_j. \quad (5.2)$$

A escolha do expoente dinâmico crítico $z = 3$ se deve ao fato de ser o primeiro valor não trivial de z para o qual é possível encontrar resultados não nulos para contribuições a 1-laço na EDQ HL, onde inclusive surge a anomalia quiral [107, 108]. Por outro lado, o termo $\bar{\psi}(\not{b}\not{D}\not{D})\gamma_5\psi$ não é mais do que uma forma particular do termo de dimensão cinco $b^{(5)\mu\alpha\beta}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu D_{(\alpha}D_{\beta)}\psi$, introduzido em [31, 34], e que foi tratado no capítulo 3; porém, neste caso consideramos apenas a parte espacial do operador por causa da dimensão do vetor b_i , pois só acompanhado de duas derivadas esse vetor tem dimensão de massa $d = 1$, necessária para obter uma forma consistente e covariante do termo CFJ. Note que para $c_3 = d_2 = 0$ e $c_1 = d_1 = 1$, a lagrangiana (5.1) é equivalente à lagrangiana da QED estendida com quebra de simetria de Lorentz usual estudada em [61].

Neste trabalho, primeiramente vamos considerar, por simplicidade, o caso particular da lagrangiana (5.1), em que $c_1 = d_1 = 0$ e $c_3 = d_2 = 1$, e calcularemos a geração do termo CFJ. Depois vamos considerar a lagrangiana (5.1) completa, onde o termo proporcional a c_1 será tratado como uma pequena perturbação, e calcularemos o termo CFJ até a primeira ordem em c_1 . Vamos começar com o termo fermiônico da QED HL $z = 3$ com quebra de simetria CPT

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(iD_0\gamma^0 + (i\not{D})^3 - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 + (\not{b}\not{D}\not{D})\gamma_5)\psi. \quad (5.3)$$

Note que como esta lagrangiana apenas contém derivadas covariantes $D_{0,i}$, ela é invariante de calibre e todas as correções quânticas também serão invariantes de calibre. A lagrangiana (5.3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi = & \bar{\psi}(i\partial_0\gamma^0 + (i\not{\partial})^3 - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 + (\not{b}\not{\partial}\not{\partial})\gamma_5 - eA_0\gamma^0 + e(\not{\partial}\not{\partial}\not{A}) \\ & + ie(\not{b}\not{\partial}\not{A})\gamma_5 + ie^2(\not{\partial}\not{A}\not{A}) - e^2(\not{b}\not{A}\not{A})\gamma_5 - e^3\not{A}^3)\psi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

com

$$(b\partial\partial)_{ijk} = \lambda_1 b_i \partial_j \partial_k + \lambda_2 b_j \partial_i \partial_k + \lambda_3 b_k \partial_i \partial_j, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} (\partial\partial A)_{ijk} &= (\partial_i \partial_j A_k) + (\partial_j A_k) \partial_i + (\partial_i A_k) \partial_j + A_k \partial_i \partial_j \\ &\quad + (\partial_i A_j) \partial_k + A_j \partial_i \partial_k + A_i \partial_j \partial_k, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} (b\partial A)_{ijk} &= \lambda_1 b_i (\partial_j A_k) + \lambda_1 b_i A_k \partial_j + \lambda_1 b_i A_j \partial_k + \lambda_2 b_j (\partial_i A_k) + \lambda_2 b_j A_k \partial_i \\ &\quad + \lambda_2 b_j A_i \partial_k + \lambda_3 b_k (\partial_i A_j) + \lambda_3 b_k A_j \partial_i + \lambda_3 b_k A_i \partial_j, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} (\partial AA)_{ijk} &= (\partial_i A_j) A_k + A_j (\partial_i A_k) + A_j A_k \partial_i \\ &\quad + A_i (\partial_j A_k) + A_i A_k \partial_j + A_i A_j \partial_k, \end{aligned} \quad (5.8)$$

e

$$(bAA)_{ijk} = \lambda_1 b_i A_j A_k + \lambda_2 b_j A_i A_k + \lambda_3 b_k A_i A_j. \quad (5.9)$$

O funcional gerador fermiônico da nossa teoria é definido, como usualmente, por

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_\psi} = e^{iS_{\text{eff}}}. \quad (5.10)$$

Então, integrando nos campos espinoriais, obtemos a ação efetiva a 1-laço para o campo de calibre

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= -i \text{Tr} \ln(p_0 \gamma^0 + p_i p^i \not{p} - m^3 - b_0 \gamma^0 \gamma_5 - b_i \Lambda^i(p) \gamma_5 \\ &\quad - e A_0 \gamma^0 - e \Delta_i(k, p) A^i + e b_i \Lambda^{ij}(k, p) A_j \gamma_5 \\ &\quad + e^2 \nabla_{ij}(k, p) A^i A^j - e^2 b_i \Lambda^{ijk} A_j A_k \gamma_5 - e^3 A_i A^i \not{A}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde

$$\Lambda^i(p) = \lambda_1 \gamma^i \not{p} \not{p} + \lambda_2 \not{p} \gamma^i \not{p} + \lambda_3 \not{p} \not{p} \gamma^i, \quad (5.12)$$

$$\Delta^i(k, p) = \not{k} \not{k} \gamma^i + \not{p} \not{k} \gamma^i + \not{k} \not{p} \gamma^i + \not{p} \not{p} \gamma^i + \not{k} \gamma^i \not{p} + \not{p} \gamma^i \not{p} + \gamma^i \not{p} \not{p}, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{ij}(k, p) = & \lambda_1 \gamma^i \not{k} \gamma^j + \lambda_1 \gamma^i \not{p} \gamma^j + \lambda_1 \gamma^i \gamma^j \not{p} + \lambda_2 \not{k} \gamma^i \gamma^j + \lambda_2 \not{p} \gamma^i \gamma^j \\ & + \lambda_2 \gamma^j \gamma^i \not{p} + \lambda_3 \not{k} \gamma^j \gamma^i + \lambda_3 \not{p} \gamma^j \gamma^i + \lambda_3 \gamma^j \not{p} \gamma^i, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\nabla^{ij}(k, p) = \not{k} \gamma^i \gamma^j + \not{k} \gamma^j \gamma^i + \not{p} \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \not{k} \gamma^i + \gamma^i \not{p} \gamma^j + \gamma^i \gamma^j \not{p}, \quad (5.15)$$

e

$$\Lambda^{ijk} = \lambda_1 \gamma^i \gamma^j \gamma^k + \lambda_2 \gamma^j \gamma^i \gamma^k + \lambda_3 \gamma^j \gamma^k \gamma^i, \quad (5.16)$$

com $k_j A^i = i \partial_j A^i$. Aqui, Tr representa o traço sobre as matrizes de Dirac junto com o traço no espaço dos momentos e das coordenadas.

Agora, vamos isolar os termos proporcionais a A_μ na ação efetiva. Para isto, primeiramente iremos reescrever a expressão (5.11) como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}, \quad (5.17)$$

em que $S_{\text{eff}}^{(0)} = -i \text{Tr} \ln G^{-1}(p)$ e

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(n)} = & \frac{i}{n} \text{Tr} [G(p) (e A_0 \gamma^0 + e \Delta_i(k, p) A^i - e b_i \Lambda^{ij}(k, p) A_j \gamma_5 \\ & - e^2 \nabla_{ij}(k, p) A^i A^j + e^2 b_i \Lambda^{ijk} A_j A_k \gamma_5 + e^3 A_i A^i \not{A})]^n, \end{aligned} \quad (5.18)$$

com $G(p) = (p_0 \gamma^0 + p_i \not{p}^i - m^3 - b_0 \gamma^0 \gamma_5 - b_i \Lambda^i(p) \gamma_5)^{-1}$.

A estrutura do termo CFJ é quadrática no campo de calibre $A_{0,i}$, portanto vamos trabalhar apenas com os termos que podem produzir tal estrutura. É importante notar que estas contribuições são superficialmente divergentes, porém as partes divergentes se anulam entre si, do mesmo modo que acontece no caso usual [61], dando como resultado um

termo finito. Após o cálculo dos traço no espaço das coordenadas dos termos quadráticos em $A_{0,i}$, usando a relação de comutação $A_{0,i}(x)G(p) = G(p-k)A_{0,i}(x)$, e a relação de completiza no espaço dos momentos, temos

$$S_{\text{eff}}^{(1)}|_{A^2} = i \int d^4x \Pi_1^{ij} A_i A_j, \quad (5.19)$$

com

$$\Pi_1^{ij} = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (\nabla_{ij}(k, p) - b_m \Lambda^{mij} \gamma_5), \quad (5.20)$$

e

$$S_{\text{eff}}^{(2)}|_{A^2} = \frac{i}{2} \int d^4x (\Pi_2^{00} A_0 A_0 + \Pi_3^{0j} A_0 A_j + \Pi_4^{i0} A_i A_0 + \Pi_5^{ij} A_i A_j), \quad (5.21)$$

com

$$\Pi_2^{00} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^0 G(p-k) \gamma^0, \quad (5.22a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3^{0j} &= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^0 G(p-k) \\ &\quad \times (\Delta^j(-k, p-k) - b_m \Lambda^{mj}(-k, p-k) \gamma_5), \end{aligned} \quad (5.22b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_4^{i0} &= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (\Delta^i(k, p) - b_m \Lambda^{mi}(k, p) \gamma_5) \\ &\quad \times G(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.22c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^{ij} &= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) (\Delta^i(k, p) - b_m \Lambda^{mi}(k, p) \gamma_5) G(p-k) \\ &\quad \times (\Delta^j(-k, p-k) - b_n \Lambda^{nj}(-k, p-k) \gamma_5). \end{aligned} \quad (5.22d)$$

Agora, vamos encontrar os termos responsáveis pela geração do termo CFJ. Para isto, primeiro devemos considerar a expansão

$$G(p) = S(p) + S(p)(b_0 \gamma^0 \gamma_5 + b_i \Lambda^i(p) \gamma_5) S(p) + \dots, \quad (5.23)$$

com $S(p) = (p_0\gamma^0 + p_i p^i \not{p} - m^3)^{-1}$. Então, para (5.20), temos

$$\Pi_1^{ij} = -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) b_0 \gamma^0 \gamma_5 S(p) \nabla^{ij}(k, p) + \dots, \quad (5.24)$$

onde os pontos indicam termos de ordem superior em $b_{0,i}$. Estes termos junto com os termos de derivada superior vão ser omitidos já que não contribuem na geração do termo CFJ.

5.3 Cálculo do termo CFJ induzido

Para o cálculo dos traços das matrizes de Dirac, vamos usar primeiramente a prescrição mais simples, em que $\{\gamma^0, \gamma_5\} = 0$ e $\{\gamma^i, \gamma_5\} = 0$. Com isto, após o cálculo dos traços obtemos

$$\Pi_1^{ij} = 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_0^2 - \vec{p}^6 + m^6}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^2} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k, \quad (5.25)$$

onde foi realizado uma rotação de Wick ($p_0 \rightarrow ip_0$) para passar ao espaço Euclideano e assim simplificar o cálculo das integrais, as quais vamos resolver utilizando regularização dimensional, motivo pelo qual foi feita a substituição $d^3 p / (2\pi)^3 \rightarrow \mu^{3-d} d^d p / (2\pi)^d$, em que μ é um parâmetro de escala arbitrário. Após realizar o cálculo das integrais, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_1^{ij} &= -2e^2 \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{m^6}{(\vec{p}^6 + m^6)^{3/2}} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k, \\ &= -\frac{e^2 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-3} \mu^{3-d} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Vamos considerar agora as expressões (5.22). Primeiramente, notemos que a equação (5.22a) não contribui para o termo CFJ. As expressões (5.22b), (5.22c) e (5.22d), após o

calculo do traço, vão resultar em

$$\begin{aligned}
 \Pi_3^{0j} &= 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^3} \epsilon^{i0kj} b_i k_k \\
 &\times \frac{1}{d} [(\lambda_1 + \lambda_3) (dm^{12} - (d+18)m^6 \vec{p}^6 + (d+6)p_0^2 \vec{p}^6 \\
 &\times -dp_0^4 + 2(d-3)\vec{p}^{12}) - \lambda_2 (dm^{12} - (d+12)m^6 \vec{p}^6 \\
 &\times +(d-12)p_0^2 \vec{p}^6 - dp_0^4 + 2d\vec{p}^{12})], \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_4^{i0} &= 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^3} \epsilon^{jik0} b_j k_k \\
 &\times \frac{1}{d} [(\lambda_1 + \lambda_3) (dm^{12} + 3(2-3d)m^6 \vec{p}^6 + (d+6)p_0^2 \vec{p}^6 \\
 &- dp_0^4 + 2(d-3)\vec{p}^{12}) - \lambda_2 (dm^{12} + 3(4-3d)m^6 \vec{p}^6 \\
 &+(d-12)p_0^2 \vec{p}^6 - dp_0^4 + 2d\vec{p}^{12})], \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Pi_5^{ij} &= 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^6}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^3} \\
 &\times \{ \epsilon^{ki0j} b_k k_0 \frac{1}{d} [(\lambda_1 + \lambda_3) (-(3d+16)m^6 + dp_0^2 + (d-4)\vec{p}^6) \\
 &- \lambda_2 (-(3d+14)m^6 + (d-6)p_0^2 + (d-2)\vec{p}^6)] \\
 &+ \epsilon^{0ikj} b_0 k_k \frac{3}{d} (d+4) (-3m^6 - 3p_0^2 + \vec{p}^6) \}, \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

respectivamente. Agora, calculando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Pi_3^{0j} &= -e^2 \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^6}{(\vec{p}^6 + m^6)^{5/2}} \epsilon^{i0kj} b_i k_k (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\
 &\times \frac{1}{d} ((d-3)\vec{p}^6 - 2(d+6)m^6), \\
 &= \frac{e^2 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) m^{d-3} \mu^{3-d}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \\
 &\times \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6} + 2\right) \epsilon^{i0kj} b_i k_k, \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

$$\Pi_4^{i0} = -e^2 \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^6}{(\vec{p}^6 + m^6)^{5/2}} \epsilon^{jik0} b_j k_k (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{d} \left((d-3)\vec{p}^6 + (6-8d)m^6 \right), \\ & = \frac{e^2 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) m^{d-3} \mu^{3-d}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \\ & \times \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6} + 1\right) \epsilon^{jik0} b_j k_k, \end{aligned} \quad (5.32)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_5^{ij} & = -e^2 \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^6}{(\vec{p}^6 + m^6)^{5/2}} [\epsilon^{ki0j} b_k k_0 (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ & \times \frac{1}{d} \left((d-3)\vec{p}^6 - 2(d+6)m^6 \right) - \epsilon^{0ikj} b_0 k_k \frac{9}{d} (d+4)m^6], \\ & = \frac{e^2 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) m^{d-3} \mu^{3-d} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \epsilon^{ki0j} b_k k_0 \\ & + \frac{e^2 2^{1-d} (d+4) \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-3} \mu^{3-d} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto, com estes resultados, e considerando $S_{\text{eff}}^{(1)}|_{A^2} + S_{\text{eff}}^{(2)}|_{A^2} \rightarrow S_{\text{CFJ}}$, vamos obter a lagrangiana CFJ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CFJ} & = -\frac{2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-3} \mu^{3-d} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d}{6} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \{(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ & \times \left[\left(\frac{2}{d} + \frac{1}{3}\right) (b_i \epsilon^{i0jk} A_0 \partial_j A_k + b_i \epsilon^{ij0k} A_j \partial_0 A_k) \right. \\ & \left. + b_i \epsilon^{ijk0} A_j k_k A_0 \right] + b_0 \epsilon^{0ijk} A_j k_j A_k \}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para garantir a invariância de calibre, deve-se satisfazer $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 1$; assim, escolhendo por exemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, e com $d = 3$, obtemos

$$\mathcal{L}_{CFJ} = -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda \partial_\mu A_\nu. \quad (5.35)$$

Assim, encontramos que na prescrição mais simples, o termo CFJ induzido é finito e reproduz um dos valores obtidos no modelo usual da QED com quebra de simetria de

Lorentz e CPT [77].

Agora, vamos utilizar a prescrição de 't Hooft-Veltman [109] para o cálculo do traço (ver por exemplo [110]), ou seja, vamos separar as matrizes de Dirac d -dimensionais γ^i e o tensor métrico d -dimensional g^{ij} (com $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2g^{ij}$ e $g_{ij}g^{ij} = d$) numa parte em 3-dimensões e outra parte em $(d - 3)$ -dimensões, ou seja, $\gamma^i = \bar{\gamma}^i + \hat{\gamma}^i$ e $g^{ij} = \bar{g}^{ij} + \hat{g}^{ij}$. Portanto, as matrizes de Dirac agora satisfazem as seguintes relações

$$\{\bar{\gamma}^i, \bar{\gamma}^j\} = 2g^{ij}, \quad \{\hat{\gamma}^i, \hat{\gamma}^j\} = 2g^{ij} \text{ e } \{\bar{\gamma}^i, \hat{\gamma}^j\} = 0, \quad (5.36)$$

e, conseqüentemente, o tensor métrico tem as contrações

$$\bar{g}_{ij}\bar{g}^{ij} = 3, \quad \hat{g}_{ij}\hat{g}^{ij} = d - 3 \text{ e } \bar{g}_{ij}\hat{g}^{ij} = 0. \quad (5.37)$$

No entanto, a principal mudança é nas relações

$$\{\bar{\gamma}^i, \gamma_5\} = 0 \text{ e } \{\hat{\gamma}^i, \gamma_5\} = 0, \quad (5.38)$$

onde introduzimos a relação de comutação de $\hat{\gamma}^i$ com γ_5 . Note que a matriz γ^0 satisfaz as relações de anticomutação usuais, ou seja,

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2, \quad \{\gamma^0, \gamma^i\} = 0 \text{ e } \{\gamma^0, \gamma_5\} = 0. \quad (5.39)$$

Então, levando em conta as relações (5.36), (5.38) e (5.39), e as contrações (5.37), após o cálculo do traço, obtemos que a contribuição de (5.24) é

$$\Pi_1^{ij} = 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_0^2 + (1 - \frac{6}{d})\bar{p}^6 + m^6}{(p_0^2 + \bar{p}^6 + m^6)^2} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k. \quad (5.40)$$

Calculando a integral, obtemos

$$\Pi_1^{ij} = -2e^2 \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{m^6 + (1 - \frac{3}{d})\bar{p}^2}{(\bar{p}^6 + m^6)^{3/2}} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k = 0, \quad (5.41)$$

e calculando o traço do termo (5.22), obtemos como resultado

$$\Pi_3^{0j} = \Pi_3 \epsilon^{i0kj} b_i k_k, \quad (5.42)$$

$$\Pi_4^{i0} = \Pi_3 \epsilon^{jik0} b_j k_k, \quad (5.43)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^3} \\ & \times \frac{1}{d} [(\lambda_1 + \lambda_3) (dm^{12} - 3(d+4)m^6 \vec{p}^6 + (7d-12)p_0^2 \vec{p}^6 \\ & - dp_0^4 - 4(d-3)\vec{p}^{12}) - \lambda_2 (dm^{12} - 3(d+2)m^6 \vec{p}^6 + \\ & (7d-30)p_0^2 \vec{p}^6 - dp_0^4 + 2(9-2d)\vec{p}^{12})], \end{aligned} \quad (5.44)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_5^{ij} = & 4ie^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^6}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^3} \\ & \times \{ \epsilon^{ki0j} b_k k_0 \frac{1}{d} [(\lambda_1 + \lambda_3) (-(3d+16)m^6 + dp_0^2 - (3d-8)\vec{p}^6) \\ & - \lambda_2 (-(3d+14)m^6 + (d-6)p_0^2 - (3d-10)\vec{p}^6)] \\ & - \epsilon^{0ikj} b_0 k_k \frac{7}{d} ((d+6)m^6 + (d+6)p_0^2 + (d-6)\vec{p}^6) \}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Note que a expressão (5.22a) não contribui com o termo CFJ.

Agora, calculando as integrais, podemos escrever

$$\Pi_5^{ij} = \Pi_3 (\epsilon^{ki0j} b_k k_0 + \frac{7}{2} (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^{-1} \epsilon^{0ikj} b_0 k_k), \quad (5.46)$$

ou seja, todas as contribuições de (5.22), após integrar em p_0 , são escritas em termos de

Π_3 , que tem a forma

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= 2e^2\mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\bar{p}^6}{(\bar{p}^6 + m^6)^{5/2}} (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ &\quad \times \frac{1}{d} ((d-3)\bar{p}^6 + (d+6)m^6) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Finalmente, encontramos que usando as regras de 't Hooft-Veltman as contribuições para o termo CFJ são $\Pi_1^{ij} = \Pi_2^{00} = \Pi_3^{0j} = \Pi_4^{i0} = \Pi_5^{ij} = 0$, portanto

$$\mathcal{L}_{CFJ} = 0,\tag{5.48}$$

ou seja, não temos geração do termo CFJ nesta prescrição.

5.3.1 Integral Funcional

Vamos aplicar agora a formulação da integral funcional para o cálculo do termo CFJ, tal como foi feito na teoria usual da QED VL em [27]. Primeiramente, vamos introduzir na lagrangiana (5.3) o termo $e^2 cb_\mu {}^*F^{\mu\nu} A_\nu$, com ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, em que c é uma constante arbitrária introduzida em analogia com [27] para levar em consideração a ambiguidade na definição da corrente conservada J_5^μ , cuja forma explícita não é importante. Então, temos que $\tilde{J}_5^\mu = J_5^\mu + e^2 c {}^*F^{\mu\nu} A_\nu$. Portanto, a ação do nosso modelo fica

$$\mathcal{S} = \int d^4x [\bar{\psi}(iD_0\gamma^0 + (i\mathcal{D})^3 - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 + (\not{b}\mathcal{D}\not{b})\gamma_5)\psi + e^2 cb_\mu {}^*F^{\mu\nu} A_\nu].\tag{5.49}$$

Seguindo os procedimentos de [27], vamos realizar a seguinte transformação quiral:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x),\tag{5.50}$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5}.\tag{5.51}$$

Esta transformação acarreta uma mudança na medida de integração no gerador funcional (5.10), a qual calculamos seguindo o mesmo procedimento que em [107, 108], e encontramos que a medida de integração muda pelo mesmo fator, ou seja

$$D\bar{\psi}D\psi \rightarrow D\bar{\psi}D\psi \exp \left[-ie^2 \int d^4x \frac{\alpha(x)}{8\pi^2} {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]. \quad (5.52)$$

Na verdade, a teoria que estamos considerando é muito semelhante àquela discutida em [107, 108], exceto pelo termo b_μ e o termo de massa, porém, estes termos não geram contribuições na medida de integração com a estrutura desejada, e portanto, são irrelevantes para o nosso estudo. Além disto, em [107, 108] é argumentado que a anomalia é completamente caracterizada pela topologia, e não há diferenças entre as várias contrações de derivadas covariantes espaciais que possam ser consideradas, por exemplo, $-\frac{i}{2} (D_i^2 \not{D} + \not{D} D_i^2)$ ou $-iD_i \not{D} D^i$, ou outras. De fato, usando $\gamma^i \gamma^j \gamma^k = g^{ij} \gamma^k + g^{jk} \gamma^i - g^{ik} \gamma^j - i\epsilon^{0ijk} \gamma_0 \gamma_5$, podemos rescrever as derivadas covariantes espaciais de (5.49) como,

$$(i\not{D})^3 = -iD_i^2 \not{D} - i\not{D} D_i^2 + iD_i \not{D} D^i - \epsilon^{0ijk} \gamma_0 \gamma_5 D_i D_j D_k \quad (5.53)$$

ou melhor, levando em conta que $[D_i, D_j] = ieF_{ij}$, como

$$(i\not{D})^3 = -\frac{i}{2} D_i^2 \not{D} - \frac{i}{2} \not{D} D_i^2 - \frac{ie}{2} \partial_i F^{ij} \gamma_j - \frac{ie}{2} \epsilon^{0ijk} \gamma_0 \gamma_5 F_{ij} D_k. \quad (5.54)$$

É fácil ver que os dois últimos termos acima não contribuem para a anomalia em (5.52). Portanto, concluímos que nossa contribuição à variação da medida é a mesma que em [107, 108].

Por outro lado, escolhendo $\alpha(x) = -x^\mu b_\mu$, como em [27], definindo por simplicidade $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, e desprezando os termos de ordem superior em b_μ , obtemos que a ação

(5.49), sob as transformações quirais, fica

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x & [\bar{\psi}(i\cancel{\partial}_0 + (i\cancel{\partial})^3 - m^3 - e\cancel{A}_0 + e(\cancel{\partial}\cancel{\partial}A) + ie^2(\cancel{\partial}AA) \\
 & - e^3\cancel{A}^3 + 2ix^\mu b_\mu \gamma_5 m^3)\psi + e^2 c b_\mu^* F^{\mu\nu} A_\nu],
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

e portanto, obtemos o seguinte funcional gerador:

$$\begin{aligned}
 Z = \exp & \left[-ie^2 \int \frac{d^4x}{4\pi^2} b_\mu^* F^{\mu\nu} A_\nu \right] \exp \left[ie^2 c \int d^4x b_\mu^* F^{\mu\nu} A_\nu \right] \\
 & \times \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial}_0 + (i\cancel{\partial})^3 - m^3 + 2ix^\mu b_\mu \gamma_5 m^3 \right. \\
 & \left. - e\cancel{A}_0 + e(\cancel{\partial}\cancel{\partial}A) + ie^2(\cancel{\partial}AA) - e^3\cancel{A}^3)\psi] \right].
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Agora, vamos calcular o termo CFJ gerado pelo setor fermiônico de (5.56). Integrando nos campos fermiônicos, obtemos a seguinte ação efetiva

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} = -i\text{Tr} \ln & (\cancel{p}_0 + \cancel{p}p_j^2 - m^3 + 2ix^\mu b_\mu \gamma_5 m^3 \\
 & - e\cancel{A}_0 - e\Delta_i(k, p)A^i + e^2\nabla^{ij}(k, p)A^i A^j - e^3\cancel{A}A_j^2),
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

onde

$$\Delta^i(k, p) = \cancel{k}\cancel{k}\gamma^i + \cancel{p}\cancel{k}\gamma^i + \cancel{k}\cancel{p}\gamma^i + \cancel{p}\cancel{p}\gamma^i + \cancel{k}\gamma^i\cancel{p} + \cancel{p}\gamma^i\cancel{p} + \gamma^i\cancel{p}\cancel{p}, \tag{5.58}$$

e

$$\nabla^{ij}(k, p) = \cancel{k}\gamma^i\gamma^j + \cancel{k}\gamma^j\gamma^i + \cancel{p}\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\cancel{k}\gamma^i + \gamma^i\cancel{p}\gamma^j + \gamma^i\gamma^j\cancel{p}. \tag{5.59}$$

com $i\partial_j A^i(x) \rightarrow k_j A^i(k)$ que, como no caso anterior, pode ser expandida como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}, \tag{5.60}$$

em que $S_{\text{eff}}^{\psi(0)} = -i\text{Tr} \ln G^{-1}(p)$ é a parte independente do campo, e

$$S_{\text{eff}}^{\psi(n)} = \frac{i}{n} \text{Tr} [G(p) (e\mathcal{A}_0 + e\Delta_i(k, p)A^i - e^2\nabla^{ij}(k, p)A^i A^j + e^3\mathcal{A}A_j^2)]^n, \quad (5.61)$$

com $G(p) = (\not{p}_0 + \not{p}p_j^2 - m^3 - 2\frac{\partial}{\partial p^\mu} b_\mu \gamma_5 m^3)^{-1}$, onde usamos a prescrição $x^\mu = i\frac{\partial}{\partial p_\mu}$, como é usual na metodologia da expansão derivativa [81].

Após o cálculo do traço sobre as coordenadas espaciais e usando a relação de comutação $A_\mu(x)G(p) = G(p - k)A_\mu(x)$ e a relação de completeza no espaço dos momentos, temos as seguintes contribuições para a ação quadrática em A_μ :

$$S_{\text{eff}}^{(1)}|_{A^2} = i \int d^4x \Pi_1^{ij} A_i(x) A_j(x), \quad (5.62)$$

e

$$S_{\text{eff}}^{(2)}|_{A^2} = \frac{i}{2} \int d^4x (\Pi_2^{00} A_0(x) A_0(x) + \Pi_3^{i0} A_i(x) A_0(x) + \Pi_4^{0j} A_0(x) A_j(x) + \Pi_5^{ij} A_i(x) A_j(x)). \quad (5.63)$$

No espaço dos momentos, temos

$$S_{\text{eff}}^{(1)}|_{A^2} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Pi_1^{ij} A_i(k) A_j(-k), \quad (5.64)$$

e

$$S_{\text{eff}}^{(2)}|_{A^2} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\Pi_2^{00} A_0(k) A_0(-k) + \Pi_3^{i0} A_i(k) A_0(-k) + \Pi_4^{0j} A_0(k) A_j(-k) + \Pi_5^{ij} A_i(k) A_j(-k)), \quad (5.65)$$

com

$$\Pi_1^{ij} = -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \nabla^{ij}(k, p), \quad (5.66a)$$

$$\Pi_2^{00} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^0 G(p-k) \gamma^0, \quad (5.66b)$$

$$\Pi_3^{i0} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \Delta^i(k, p) G(p-k) \gamma^0, \quad (5.66c)$$

$$\Pi_4^{0j} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \gamma^0 G(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \quad (5.66d)$$

$$\Pi_5^{ij} = e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p) \Delta^i(k, p) G(p-k) \Delta^j(-k, p-k). \quad (5.66e)$$

O termo Π_2^{00} não contribui para o termo CFJ.

Para os outros termos de (5.66), se considerarmos a expansão

$$G(p) = S(p) + 2m^3 S(p) \gamma_5 b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) + \dots, \quad (5.67)$$

onde os pontos significam termos de ordem superior em b_μ , os quais não são relevantes, e com $S(p) = (\not{p}_0 + \not{p} p_j^2 - m^3)^{-1}$, vamos ter sete contribuições para o termo CFJ, dadas por:

$$\Pi_1^{ij} = \Pi_{1a}^{ij} + \dots, \quad \Pi_3^{i0} = \Pi_{3a}^{i0} + \Pi_{3b}^{i0} + \dots, \quad \Pi_4^{i0} = \Pi_{4a}^{i0} + \Pi_{4b}^{i0} + \dots \quad \text{e} \quad \Pi_5^{i0} = \Pi_{5a}^{ij} + \Pi_{5b}^{ij} + \dots,$$

com

$$\Pi_{1a}^{ij} = -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) \nabla^{ij}(k, p), \quad (5.68a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3a}^{i0} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) \\ &\quad \times \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.68b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3b}^{i0} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma_5 b_\mu \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.68c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4a}^{0j} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^0 S(p-k) \gamma_5 b_\mu \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.68d)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b}^{0j} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) \gamma^0 S(p-k) \\ &\quad \times \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.68e)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5a}^{ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \\ &\quad \times \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.68f)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5b}^{ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma_5 b_\mu \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p-k) \Delta^j(-k, p-k). \end{aligned} \quad (5.68g)$$

Agora vamos aplicar a derivada sobre os momentos, onde temos que

$$b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p) = -S(p) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p)) S(p), \quad (5.69)$$

com $\xi^k(p) = \gamma^k p_i^2 + \not{p} \gamma^k \not{p} + p_i^2 \gamma^k$,

$$b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \nabla^{ij}(k, p) = b_k \gamma^{ijk}, \quad (5.70)$$

$$e \gamma^{ijk} = \gamma^i \gamma^j \gamma^k + \gamma^i \gamma^k \gamma^j + \gamma^k \gamma^i \gamma^j,$$

$$b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Delta^i(k, p) = b_k \tilde{\nabla}^{ik}(k, p), \quad (5.71)$$

com

$$\tilde{\nabla}^{ik}(k, p) = \gamma^k \not{k} \gamma^i + \not{k} \gamma^k \gamma^i + \gamma^k \not{p} \gamma^i + \not{p} \gamma^k \gamma^i + \not{k} \gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i \not{p} + \not{p} \gamma^i \gamma^k + \gamma^i \gamma^k \not{p} + \gamma^i \not{p} \gamma^k,$$

$$b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} S(p-k) = -S(p-k)(\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k))S(p-k), \quad (5.72)$$

e, finalmente,

$$b_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Delta^i(-k, p-k) = b_k \tilde{\nabla}^{ik}(p-k, -k). \quad (5.73)$$

Então, podemos escrever $\Pi_{1a}^{ij} = \Pi_{1a1}^{ij} + \Pi_{1a2}^{ij}$, onde

$$\begin{aligned} \Pi_{1a1}^{ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p)) \\ &\quad \times S(p) \nabla^{ij}(k, p), \end{aligned} \quad (5.74a)$$

$$\Pi_{1a2}^{ij} = -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) b_k \gamma^{ijk}, \quad (5.74b)$$

$\Pi_{3a}^{i0} = \Pi_{3a1}^{i0} + \Pi_{3a2}^{i0} + \Pi_{3a3}^{i0}$ e $\Pi_{3b}^{i0} = \Pi_{3b1}^{i0}$, com

$$\begin{aligned} \Pi_{3a1}^{i0} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p)) \\ &\quad \times S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.75a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3a2}^{i0} &= 2mA^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) b_k \tilde{\nabla}^{ik}(k, p) \\ &\quad \times S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.75b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3a3}^{i0} &= -2mA^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \\ &\quad \times (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.75c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3b1}^{i0} &= -2mA^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma_5 \\ &\quad \times S(p-k) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \gamma^0, \end{aligned} \quad (5.75d)$$

$\Pi_{4a}^{0j} = \Pi_{4a1}^{0j} + \Pi_{4a2}^{0j}$ e $\Pi_{4b}^{0j} = \Pi_{4b1}^{0j} + \Pi_{4b2}^{0j} + \Pi_{4b3}^{0j}$ onde

$$\begin{aligned} \Pi_{4a1}^{0j} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^0 S(p-k) \gamma_5 S(p-k) \\ &\quad \times (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.76a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4a2}^{0j} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma^0 S(p-k) \gamma_5 S(p-k) \\ &\quad \times b_k \tilde{\nabla}^{jk}(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.76b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b1}^{0j} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p)) S(p) \gamma^0 \\ &\quad \times S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.76c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b2}^{0j} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) \gamma^0 S(p-k) \\ &\quad \times (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.76d)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4b3}^{0j} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) \gamma^0 S(p-k) b_k \\ &\quad \times \tilde{\nabla}^{jk}(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.76e)$$

e, finalmente $\Pi_{5a}^{ij} = \Pi_{5a1}^{ij} + \Pi_{5a2}^{ij} + \Pi_{5a3}^{ij} + \Pi_{5a4}^{ij}$ e $\Pi_{5b}^{0j} = \Pi_{5b1}^{0j} + \Pi_{5b2}^{0j}$ com

$$\begin{aligned} \Pi_{5a1}^{ij} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p)) \\ &\quad \times S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.77a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5a2}^{0ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) b_k \tilde{\nabla}^{ik}(k, p) \\ &\quad \times S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.77b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5a3}^{ij} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \\ &\quad \times (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.77c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5a4}^{ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \gamma_5 S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \\ &\quad \times b_k \tilde{\nabla}^{jk}(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.77d)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5b1}^{ij} &= -2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma_5 S(p-k) \\ &\quad \times (\not{b}_0 + b_k \xi^k(p-k)) S(p-k) \Delta^j(-k, p-k), \end{aligned} \quad (5.77e)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5b2}^{ij} &= 2m^3 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p) \Delta^i(k, p) S(p-k) \gamma_5 S(p-k) \\ &\quad \times b_k \tilde{\nabla}^{jk}(-k, p-k). \end{aligned} \quad (5.77f)$$

Logo, vamos considerar a expansão

$$S(p-k) = S(p) + S(p) \Xi(k, p) S(p) + \dots \quad (5.78)$$

em que $\Xi(k, p) = \not{k}_0 + p_i^2 \not{k} + \not{p} k \not{p} - \not{p} k_i^2 + k p_i^2 - k \not{p} k - k_i^2 \not{p} + k^3$. Desprezando os termos de

ordem superior em $\Xi(k, p)$ e calculando os traços de Dirac, temos

$$\Pi_1^{ij} = 8ie^2 m^6 \epsilon^{0kij} b_0 k_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^2}, \quad (5.79a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3^{i0} &= 8ie^2 m^6 \epsilon^{jki0} b_j k_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^2} \\ &\quad - 80ie^2 m^6 \epsilon^{jki0} b_j k_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_i^6}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3}, \end{aligned} \quad (5.79b)$$

$$\Pi_4^{0j} = -48ie^2 m^6 \epsilon^{ik0j} b_i k_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_i^6}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3}, \quad (5.79c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^{ij} &= -112e^2 m^6 \epsilon^{0kij} b_0 k_k \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_i^6}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3} \\ &\quad - 48ie^2 m^6 \epsilon^{k0ij} b_k k_0 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_i^6}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3}. \end{aligned} \quad (5.79d)$$

As integrais acima não são mais do que um caso particular de uma integral mais geral dada por

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^\beta \vec{p}^{2\beta}}{(p_0^2 - \vec{p}^6 - m^6)^\alpha}. \quad (5.80)$$

Fazendo uma rotação de Wick ($p_0 \rightarrow ip_0$) e utilizando regularização dimensional, fazendo a substituição $d^3 \vec{p}/(2\pi)^3 \rightarrow \mu^{3-d} d^d \vec{p}/(2\pi)^d$, em que μ é um parâmetro de escala arbitrário, a integral (5.80) fica

$$I = i(-1)^{\alpha+\beta} \mu^{3-d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}^{2\beta}}{(p_0^2 + \vec{p}^6 + m^6)^\alpha}. \quad (5.81)$$

Então, integrando sobre p_0 , obtemos

$$I = i \frac{(-1)^{\alpha+\beta} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{2\pi^{1/2} \Gamma(\lambda)} \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \vec{p}^{2\beta} (\vec{p}^6 + m^6)^{\frac{1}{2}-\lambda}, \quad (5.82)$$

e fazendo a integral sobre \vec{p} , a Eq. (5.82) fica

$$I = i \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{6} m^{d+2\beta+3-6\lambda} \mu^{3-d} \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\frac{d}{6} - \frac{\beta}{3}) \Gamma(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{d}{6} - \frac{\beta}{3})}{(2\pi)^d \Gamma(\lambda) \Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (5.83)$$

Portanto, temos que

$$\Pi_1^{ij} = -\frac{4}{3}m^{d-3}e^2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{6})\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{d}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} b_0 k_k \epsilon^{0kij}, \quad (5.84a)$$

$$\Pi_3^{i0} = \left(\frac{20d-24}{18}\right) m^{d-3}e^2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{6})\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{d}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} b_j k_k \epsilon^{jkio}, \quad (5.84b)$$

$$\Pi_4^{0j} = \frac{4d}{6}m^{d-3}e^2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{6})\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{d}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} b_i k_k \epsilon^{ik0j}, \quad (5.84c)$$

$$\begin{aligned} \Pi_5^{ij} &= \frac{4d}{6}m^{d-3}e^2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{6})\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{d}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\ &\times \left(\frac{7}{3}b_0 k_k \epsilon^{0kij} + b_k k_0 \epsilon^{k0ij} \right). \end{aligned} \quad (5.84d)$$

Com estes resultados e considerando que $S_{\text{eff}}^{(1)}|_{A^2} + S_{\text{eff}}^{(2)}|_{A^2} \rightarrow S_{\text{CFJ}}$, temos

$$\begin{aligned} S_{\text{CFJ}} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} m^{d-3}e^2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{d}{6})\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{d}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\ &\times \left[\left(\frac{7d-12}{9}\right) b_0 k_k \epsilon^{0kij} + \frac{20d-24}{36} b_j k_k \epsilon^{jkio} \right. \\ &\left. + \frac{4d}{12} b_i k_k \epsilon^{ik0j} + \frac{4d}{12} b_k k_0 \epsilon^{k0ij} \right]. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Assim, para $d = 3$, obtemos

$$S_{\text{CFJ}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (5.86)$$

Esta expressão não é ambígua, tal como seu análogo na EDQ VL usual [27]. Isto pode ser reescrito como

$$S_{\text{CFJ}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu^* F^{\mu\nu}(k) A_\nu(-k). \quad (5.87)$$

Tomando todas as contribuições de (5.56) juntas, temos a seguinte ação efetiva:

$$S_A = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu^* F^{\mu\nu}(k) (1 - 1 + 4\pi^2 c) A_\nu(-k) + \mathcal{O}(k^2), \quad (5.88)$$

portanto,

$$S_A = e^2 c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} b_\mu^* F^{\mu\nu}(k) A_\nu(-k) + \mathcal{O}(k^2). \quad (5.89)$$

Finalmente, podemos concluir que o termo CFJ gerado é finito e caracterizado pela constante completamente indeterminada c a qual provém da ambiguidade na definição da corrente conservada associada à simetria quiral.

5.3.2 Teoria Completa

Considerando agora uma teoria mais realista, onde vamos adicionar o termo $z = 1$ na lagrangiana (5.3), o modelo pode ser tratado como uma extensão de HL com altas derivadas da EDQ. A lagrangiana é precisamente a eq. (5.1) no caso particular em que $c_3 = d_2 = 1$, ou seja

$$\tilde{\mathcal{L}}_\psi = \bar{\psi}(iD_0\gamma^0 + c_1 i\mathcal{D} + (i\mathcal{D})^3 - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 - d_1\not{b}\gamma_5 + (\not{b}\mathcal{D}\mathcal{D})\gamma_5)\psi. \quad (5.90)$$

Com isto, a ação efetiva (5.18) torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{eff}}^{(n)} &= \frac{i}{n} \text{Tr}[\tilde{G}(p)(eA_0\gamma^0 + c_1 e\mathcal{A} + e\Delta_i(k, p)A^i \\ &\quad - eb_i\Lambda^{ij}(k, p)A_j\gamma_5 - e^2\nabla_{ij}(k, p)A^i A^j \\ &\quad + e^2 b_i\Lambda^{ijk}A_j A_k\gamma_5 + e^3 A_i A^i \mathcal{A})]^n, \end{aligned} \quad (5.91)$$

em que $\tilde{G}(p) = (p_0\gamma^0 + c_1\not{p} + p_i p^i \not{p} - m^3 - b_0\gamma^0\gamma_5 - d_1\not{b}\gamma_5 - b_i\Lambda^i(p)\gamma_5)^{-1}$.

Para isolar os termos responsáveis pela geração do termo CFJ, vamos utilizar uma abordagem perturbativa. Primeiramente, iremos fazer a expansão

$$\tilde{G}(p) = \tilde{S}(p) + \tilde{S}(p)(b_0\gamma^0\gamma_5 + d_1\not{b}\gamma_5 + b_i\Lambda^i(p)\gamma_5)\tilde{S}(p) + \dots, \quad (5.92)$$

com $\tilde{S}(p) = (p_0\gamma^0 + c_1\not{p} + p_i p^i \not{p} - m^3)^{-1}$ nas expressões (3.12) e (5.22) (com $\tilde{G}(p)$ ao invés de $G(p)$ e adicionando o vértice proporcional com $c_1\gamma^i$). O próximo passo é considerar

c_1 perturbativamente; então, podemos escrever $\tilde{S}(p) = S(p) + S(p)(-c_1\not{p})S(p) + \dots$.

Então, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{CFJ} = & \mathcal{L}_{CFJ} + \frac{2^{-d}(d-3)\pi^{\frac{1}{2}(-d-1)}m^{d-5}\mu^{3-d}\Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{27\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} \\ & \times \{(c_1(d-2)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) - 3d_1)[(d+4)(b_i\epsilon^{i0jk}A_0\partial_jA_k \\ & + b_i\epsilon^{ij0k}A_j\partial_0A_k) + 3db_i\epsilon^{ijk0}A_jk_kA_0] \\ & + 3c_1(d-5)db_0\epsilon^{0ijk}A_jk_jA_k\}, \end{aligned} \quad (5.93)$$

onde, para o segundo termo, temos o mesmo resultado em ambas prescrições. Portanto, para $d = 3$, $\tilde{\mathcal{L}}_{CFJ} = \mathcal{L}_{CFJ}$, ou seja, no esquema perturbativo, o resultado é independente dos termos com $z = 1$.

5.4 Conclusões

Neste capítulo, estudamos a extensão de HL da EDQ com $z = 3$ incluindo um termo que quebra a simetria CPT. Calculamos o termo CFJ induzido como correção quântica a 1-laço, onde nos deparamos com integrais superficialmente divergentes, porém, que se anulam entre si, dando resultados finitos. Estes resultados são ambíguos pois são distintos para cada prescrição que utilizamos no desenvolvimento dos cálculos. No caso do método da integral funcional, o termo CFJ ainda depende explicitamente de uma constante arbitrária, indicando que o termo CFJ é indeterminado, tal como no caso usual [27, 61]. A ambiguidade do termo CFJ não é consequência do esquema em particular escolhido para realizar os cálculos, e sim, tal como argumentado em [71], de uma anomalia, que no caso da EDQ VL usual é a anomalia de Adler-Bell-Jackiw (ABJ) ou anomalia quiral. Como na EDQ HL com $z = 3$ também surge esta anomalia, como é mostrado e discutido em grande detalhe em [107], é natural que no nosso modelo o termo CFJ também seja ambíguo. É importante notar também que quando consideramos os termos $z = 1$ da EDQ HL, o resultado não muda. Finalmente, podemos dizer que, tal como foi comentado

no capítulo 3, o valor nulo que aparece na prescrição de 't Hooft-Veltman parece ser o resultado mais correto [72] para o termo CFJ. Além disto, é importante destacar que mesmo começando de uma teoria anisotrópica no espaço-tempo, obtivemos um resultado covariante com a mesma forma do resultado obtido na EDQ VL usual. Dessa forma, podemos concluir que as teorias de HL e as teorias VL usuais não são mais do que limites de uma teoria mais geral.

CAPÍTULO 6

Conclusões Finais e Perspectivas

Nesta tese, estudamos a geração do termo CFJ como correção quântica em diferentes extensões da QED com violação de Lorentz.

Primeiramente, consideramos a extensão não mínima com operadores de dimensão de massa $d = 5$ do MPE. Utilizando o método da expansão derivativa e regularização dimensional, encontramos que utilizando a simetrização $p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{p^2}{D}$, temos um valor nulo para o termo CFJ induzido, enquanto que se consideramos $p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{p^2}{4}$, temos um valor não nulo, porém finito. Posteriormente, utilizamos parametrização de Feynman e regularização dimensional, onde encontramos um valor nulo para o termo CFJ, além de contribuições divergentes para um termo tipo CFJ de altas derivadas, as quais conseguimos eliminar considerando uma relação de proporção apropriada para os coeficientes de violação de Lorentz, restando apenas uma contribuição finita para o CFJ de altas derivadas. Um dos resultados mais importantes que podemos extrair deste estudo é que, mesmo partindo de uma lagrangiana com operadores não mínimos, é possível obter correções quânticas finitas.

Posteriormente, estudamos a extensão de Horava-Lifshitz da EDQ com quebra de simetria CPT. Para esta teoria, utilizamos o método da expansão derivativa e duas prescrições diferentes para calcular o traço das matrizes de Dirac. Primeiro consideramos a prescrição mais simples, com $\{\gamma_0, \gamma_5\} = 0$ e $\{\gamma_i, \gamma_5\} = 0$, onde encontramos um valor finito não nulo para o termo CFJ. Depois utilizamos a prescrição de 't Hooft-Veltman, onde consideramos matrizes de Dirac em d -dimensões e as separamos numa parte 3-dimensional ($\bar{\gamma}^i$) e outra $(d-3)$ -dimensional ($\hat{\gamma}^i$), onde temos que $\{\bar{\gamma}^i, \gamma_5\} = 0$ e $[\hat{\gamma}^i, \gamma_5] = 0$. Neste caso, encontramos um valor nulo para o termo CFJ. Finalmente, utilizamos o método da integral funcional onde encontramos que o termo CFJ induzido é finito, porém indeterminado. É interessante o fato de que, mesmo partindo de uma teoria anisotrópica, encontramos resultados covariantes.

Por tudo isso, podemos concluir que a ambiguidade do termo de CFJ se estende à EDQ com operadores não mínimos e também na extensão de Horava-Lifshitz. Isto poderia ser explicado do ponto de vista de que em ambos os casos aparecem integrais

superficialmente divergentes que se anulam entre si no desenvolvimento dos cálculos, e também porque esta ambiguidade está relacionada com a anomalia quirial, a qual surge tanto na EDQ estendida não mínima, quanto na EDQ de HL com $z = 3$. Efetivamente demonstramos que as teorias do tipo HL e as teorias usuais de LV nada mais são do que limites de uma teoria mais fundamental.

Uma possível continuação deste trabalho seria calcular a indução radiativa de outros termos, como por exemplo o termo CPT par tipo *aether* na EDQ não mínima com operadores de dimensão $d = 5$ e também estender o nosso estudo de correções quânticas a operadores de dimensão seis. Por outro lado, também é interessante estudar processos da QED estendida com operadores não mínimos, dado que efeitos produzidos por operadores de dimensão $d \geq 5$ tornam-se dominantes em certos processos astrofísicos relevantes, o que nos permitirá impor limites superiores a estes coeficientes. Futuros trabalhos na extensão de HL podem ser o cálculo de correções quânticas a partir de outros operadores VL, assim como também o estudo do termo de Chern-Simons gravitacional.

Apêndice

Neste apêndice de caráter ilustrativo, vamos apresentar brevemente os cálculos da anomalia axial ou ABJ [111, 112], mostrando assim a semelhança existente com termo CFJ. Esta anomalia é representada pelos diagramas de Feynman da figura 1, onde consideramos um vértice axial e dois vértices vetoriais.

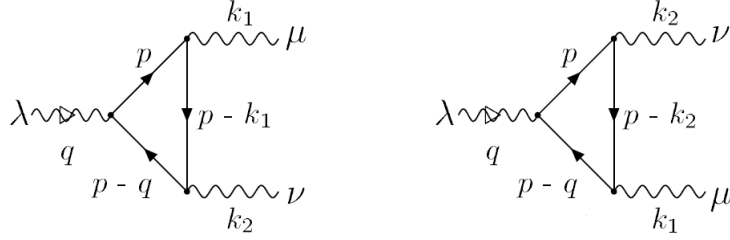


Figura 1: Diagrama Triangular fermiônico a um laço.

Explicitamente estes diagramas são dados por $T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = T_1^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) + T_2^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2)$, tal que

$$T_1^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\mu \quad (1)$$

e $T_2^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = T_1^{\nu\mu\lambda}(k_2, k_1)$, com $q = k_1 + k_2$, tal que q^λ é o momento vetorial axial, enquanto que k_1^μ e k_2^ν são os momentos vetoriais.

Vamos então verificar a identidade de Ward axial, dada por

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = 2m T^{\mu\nu}(k_1, k_2) \quad (2)$$

tal que $T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = T_1^{\nu\mu}(k_1, k_2) + T_2^{\mu\nu}(k_1, k_2)$, com

$$T_1^{\mu\nu}(k_1, k_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\mu \quad (3)$$

e $T_2^{\mu\nu}(k_1, k_2) = T_1^{\mu\nu}(k_2, k_1)$.

Utilizando a identidade $\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{p} - \not{q} - m) + (\not{p} - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5$, podemos reescrever a equação (2) como

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = 2mT^{\mu\nu}(k_1, k_2) + R_1^{\mu\nu}(k_1, k_2) + R_2^{\mu\nu}(k_1, k_2), \quad (4)$$

em que

$$R_1^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\mu \right], \quad (5)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu \right]. \quad (6)$$

Para que a identidade de Ward (2) seja satisfeita, é preciso que as integrais em $R_1^{\mu\nu}$ e $R_2^{\mu\nu}$ se anulem. Para isto, podemos considerar o deslocamento $p \rightarrow p + k_2$ no primeiro termo da equação (5) e $p \rightarrow p + k_1$ no primeiro termo da equação (6), o que resulta em

$$R_1^{\mu\nu} = R_2^{\mu\nu} = 0. \quad (7)$$

Desse modo, a identidade de Ward axial é satisfeita, ou seja, $q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = 2mT^{\mu\nu}(k_1, k_2)$. Contudo, devido ao fato de que as integrais em (5) e (6) são linearmente divergentes, podemos realizar outros deslocamentos, tais que $R_1^{\mu\nu} \neq 0$ e $R_2^{\mu\nu} \neq 0$, provocando uma violação na identidade de Ward axial.

Para ver isto, vamos considerar um caso genérico,

$$\Delta(a) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [f(p+a) - f(p)]. \quad (8)$$

Expandido o integrando, temos

$$\Delta(a) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [a^\mu \partial_\mu f(p) + a^\mu a^\nu \partial_\mu \partial_\nu f(p) + \dots]. \quad (9)$$

Se a integral de $f(p)$ é linearmente divergente, temos que $f(\pm\infty) \neq 0$ e $\partial_\mu f(\pm\infty) = \partial_\mu \partial_\nu f(\pm\infty) = \dots = 0$, ou seja, apenas o primeiro termo da expansão sobrevive, assim, pode gerar um termo de superfície não nulo, dado por

$$\Delta(a) = \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\mu \lim_{p \rightarrow \infty} p_\mu p^2 f(p), \quad (10)$$

no qual utilizamos o teorema de Gauss e coordenadas esféricas em 3 + 1 dimensões.

As equações (5) e (6), podem ser reescritas como

$$R_1^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [f(p - k_2) - f(p)], \quad (11)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [f(p - k_1) - f(p)]. \quad (12)$$

Se consideramos o deslocamento $a^\gamma = -k_2^\gamma$, obtemos que

$$\begin{aligned} R_1^{\mu\nu} &= \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} (-k_2^\gamma) \lim_{p \rightarrow \infty} p_\gamma p^2 \text{tr} \frac{(\not{p} + m)\gamma_5 \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma^\mu}{(p^2 - m^2)[(l - k_1)^2 - m^2]}, \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\beta\nu\alpha\mu} k_{1\alpha} k_2^\gamma \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\gamma p_\beta}{p^2}, \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Alternativamente, para o deslocamento $a^\gamma = -p_1^\gamma$, obtemos o mesmo resultado, tal que $R_2^{\mu\nu}(k_1, k_2) = R_1^{\mu\nu}(p_1, p_2)$, portanto desta vez a identidade de Ward axial não é satisfeita, pois temos

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = 2mT^{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \quad (14)$$

Por outro lado, como o termo $T^{\mu\nu\alpha}$ é linearmente divergente, também não é unicamente definido. Se considerarmos o deslocamento arbitrário $p \rightarrow p + a$, tal que

$$a = \alpha k_1 + (\alpha - \beta) k_2, \quad (15)$$

vamos ter uma ambiguidade dada por

$$\begin{aligned}
 \Delta^{\mu\nu\lambda} &= T^{\mu\nu\lambda}(a) - T^{\mu\nu\lambda}(0), \\
 &= T_1^{\mu\nu\lambda}(a) - T_1^{\mu\nu\lambda}(0) + T_2^{\mu\nu\lambda}(a) - T_2^{\mu\nu\lambda}(0), \\
 &= \Delta_1^{\mu\nu\lambda} + \Delta_2^{\mu\nu\lambda}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Utilizando o resultado (10), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta_1^{\mu\nu\lambda} &= -\frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\alpha \lim_{p \rightarrow \infty} p_\alpha p^2 \text{tr} \frac{(\not{p} + m)\gamma^\lambda \gamma_5 (\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma^\mu}{(p^2 - m^2) [(p - q)^2 - m^2] [(l - k_1)^2 - m^2]}, \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\sigma\nu\lambda\mu} a^\alpha \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\alpha p_\sigma}{p^2}, \\
 &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\nu\mu\lambda\beta} a_\beta.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Como $\Delta_2^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2)$ está relacionado com $\Delta_1^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2)$ através das trocas $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $\mu \leftrightarrow \nu$ encontramos através das equações que (15), (16) e (17) que

$$\Delta^{\mu\nu\lambda} = -\frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (k_{1\sigma} - k_{2\sigma}). \tag{18}$$

Portanto, a definição de $T^{\mu\nu\lambda}$ possui uma ambiguidade associada ao parâmetro arbitrário β , de forma que

$$T^{\mu\nu\lambda}(a) = T^{\mu\nu\lambda}(0) - \frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (k_{1\sigma} - k_{2\sigma}) \equiv T^{\mu\nu\lambda}(\beta), \tag{19}$$

assim, para qualquer deslocamento, para a identidade de Ward axial, obtemos que

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(\beta) = 2mT^{\mu\nu}(k_1, k_2) - \frac{1 - \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \tag{20}$$

Analogamente, obtemos para a identidade de Ward vetorial

$$k_{1\mu} T^{\mu\nu\lambda}(\beta) = \frac{1 + \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} k_{1\alpha} k_{2\gamma}. \tag{21}$$

Note que não existe nenhum valor de β tal que as identidades de Ward axial e vetorial sejam satisfeitas ao mesmo tempo. Por exemplo, se considerarmos $\beta = -1$ a identidade de Ward vetorial é satisfeita, mas a identidade de Ward Axial torna-se anômala,

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda} = 2mT^{\mu\nu} + \mathcal{A}^{\mu\nu}, \quad (22)$$

tal que a anomalia é dada por

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}, \quad (23)$$

que é conhecida como anomalia ABJ. Se escolhermos $\beta = 1$, a identidade de Ward axial é satisfeita, ao passo que temos uma identidade de Ward vetorial anômala dada por

$$k_{1\mu} T^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2} \mathcal{A}^{\nu\lambda}. \quad (24)$$

Por outro lado, vejamos que é possível reescrever $T^{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2)$ em termos do tensor de polarização (2.61), ao considerarmos $k_1 \rightarrow k$ e $k_2 \rightarrow -k$, tal que

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = b_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(k, -k). \quad (25)$$

Desta forma, a expressão (19) pode ser reescrita como

$$\Pi^{\mu\nu}(k, a) = \Pi^{\mu\nu}(k) - \frac{\beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha k_\beta. \quad (26)$$

Note que, $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k, a) = k_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$, portanto não é possível fixar o parâmetro β , caracterizando assim que as correções quânticas são indeterminadas e que não podem ser fixadas [71].

Lista de publicações:

- (2021) T. Mariz, **R. Martinez**, J.R. Nascimento, A. Yu Petrov. "CPT-violating $z=3$ Horava–Lifshitz QED and generation of the Carroll–Field–Jackiw term". *International Journal of Modern Physics A*, 36(13), 2150081.
- (2021) T. Mariz, **R. Martinez**, J.R. Nascimento, A. Yu Petrov. "On perturbative aspects of a nonminimal Lorentz-violating QED with CPT-odd dimension-5 terms." *The European Physical Journal C* 81, 974.
- (2021) T. Mariz, **R. Martinez**, J.R. Nascimento, A. Yu Petrov. "Generation of Carroll-Field-Jackiw term in the Functional Integral approach within Horava-Lifshitz $z = 3$ CPT-violating QED." *International Journal of Modern Physics A*, 36(36), 2150262.

Bibliografia

- [1] J. S. Schwinger, “The Theory of quantized fields. 1.,” *Phys. Rev.* **82**, 914-927 (1951)
- [2] G. Luders, “On the Equivalence of Invariance under Time Reversal and under Particle-Antiparticle Conjugation for Relativistic Field Theories,” *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.* **28N5**, no.5, 1-17 (1954)
- [3] Pauli, W., Rosenfeld, L., & Weisskopf, V. 1955, “Niels Bohr and the Development of Physics, Essays dedicated to Niels Bohr on the occasion of his seventieth birthday.” New York: Pergamon Press, 1955.
- [4] O. W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002) [arXiv:hep-ph/0201258 [hep-ph]].
- [5] R. Lehnert, “CPT Symmetry and Its Violation,” *Symmetry* **8**, no.11, 114 (2016)
- [6] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975) [erratum: *Commun. Math. Phys.* **46**, 206 (1976)]
- [7] J. D. Bekenstein, “Black holes and the second law,” *Lett. Nuovo Cim.* **4**, 737-740 (1972)
- [8] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7**, 2333-2346 (1973)
- [9] R. Gambini and J. Pullin, “A first course in loop quantum gravity,” Oxford University Press, 2011.
- [10] A. Connes, “Noncommutative Geometry,” Academic Press , 1994.
- [11] P. Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

-
- [12] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge University Press, 2007.
- [13] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989)
- [14] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760-6774 (1997) [arXiv:hep-ph/9703464 [hep-ph]].
- [15] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998) [arXiv:hep-ph/9809521 [hep-ph]].
- [16] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004) [arXiv:hep-th/0312310 [hep-th]].
- [17] R. Lehnert and R. Potting, “Vacuum Cerenkov radiation,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004) [arXiv:hep-ph/0406128 [hep-ph]].
- [18] R. Lehnert and R. Potting, “The Cerenkov effect in Lorentz-violating vacua,” *Phys. Rev. D* **70**, 125010 (2004) [erratum: *Phys. Rev. D* **70**, 129906 (2004)] [arXiv:hep-ph/0408285 [hep-ph]].
- [19] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, “Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 031801 (2003) [arXiv:hep-ph/0212382 [hep-ph]].
- [20] M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips and R. L. Walsworth, “Limits on isotropic Lorentz violation in QED from collider physics,” *Phys. Rev. D* **80**, 036010 (2009) [arXiv:0809.3442 [hep-ph]].
- [21] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf and A. J. da Silva, “Lorentz violation bounds on Bhabha scattering,” *Phys. Rev. D* **86**, 045003 (2012) [arXiv:1204.0755 [hep-ph]].

-
- [22] A. F. Santos and F. C. Khanna, “Lorentz violation, Möller scattering and finite temperature,” *Adv. High Energy Phys.* **2018**, 4596129 (2018) [arXiv:1804.08566 [hep-th]].
- [23] B. Altschul, “Compton scattering in the presence of Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **70**, 056005 (2004) [arXiv:hep-ph/0405084 [hep-ph]].
- [24] V. A. Kostelecky and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11-31 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [25] E. M. Lifshitz, “On the theory of second-order phase transitions I & II,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **11**, 255 & 269 (1941)
- [26] J. Alexandre, “Lifshitz-type Quantum Field Theories in Particle Physics,” *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 4523-4541 (2011) [arXiv:1109.5629 [hep-ph]].
- [27] J. M. Chung, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the formulation of functional integral,” *Phys. Rev. D* **60**, 127901 (1999) [arXiv:hep-th/9904037 [hep-th]].
- [28] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886-1903 (1989)
- [29] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher Dimensional Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989)
- [30] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string,” *Phys. Lett. B* **381**, 89-96 (1996) [arXiv:hep-th/9605088 [hep-th]].
- [31] Y. Ding and V. A. Kostelecký, “Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps,” *Phys. Rev. D* **94**, no.5, 056008 (2016) [arXiv:1608.07868 [hep-ph]].

-
- [32] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr. and J. A. Helayel-Neto, “Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and quantum-mechanical implications,” *Eur. Phys. J. C* **41**, 421-426 (2005) [arXiv:hep-th/0410104 [hep-th]].
- [33] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Lorentz-violating electrodynamics and the cosmic microwave background,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 011601 (2007) [arXiv:astro-ph/0702379 [astro-ph]].
- [34] V. A. Kostelecký and Z. Li, “Gauge field theories with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **99**, no.5, 056016 (2019) [arXiv:1812.11672 [hep-ph]].
- [35] G. Rubtsov, P. Satunin and S. Sibiryakov, “On calculation of cross sections in Lorentz violating theories,” *Phys. Rev. D* **86**, 085012 (2012) [arXiv:1204.5782 [hep-ph]].
- [36] P. Satunin, “New constraints on Lorentz Invariance violation from Crab Nebula spectrum beyond 100 TeV,” *Eur. Phys. J. C* **79**, no.12, 1011 (2019) [arXiv:1906.08221 [astro-ph.HE]].
- [37] K. Astapov, D. Kirpichnikov and P. Satunin, “Photon splitting constraint on Lorentz Invariance Violation from Crab Nebula spectrum,” *JCAP* **04**, 054 (2019) [arXiv:1903.08464 [hep-ph]].
- [38] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, “Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena and astrophysical constraints,” *Annals Phys.* **321**, 150-196 (2006) [arXiv:astro-ph/0505267 [astro-ph]].
- [39] F. Kislat and H. Krawczynski, “Search for anisotropic Lorentz invariance violation with γ -rays,” *Phys. Rev. D* **92**, no.4, 045016 (2015) [arXiv:1505.02669 [astro-ph.HE]].

-
- [40] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the aether-like Lorentz-breaking actions,” *Phys. Rev. D* **81**, 045018 (2010) [arXiv:0911.3548 [hep-th]].
- [41] P. Adamson *et al.* [MINOS], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex]].
- [42] B. Aharmim *et al.* [SNO], “Tests of Lorentz invariance at the Sudbury Neutrino Observatory,” *Phys. Rev. D* **98**, no.11, 112013 (2018) [arXiv:1811.00166 [hep-ex]].
- [43] J. S. Díaz, T. Katori, J. Spitz and J. M. Conrad, “Search for neutrino-antineutrino oscillations with a reactor experiment,” *Phys. Lett. B* **727**, 412-416 (2013) [arXiv:1307.5789 [hep-ex]].
- [44] D. Babusci *et al.* [KLOE-2], “Test of CPT and Lorentz symmetry in entangled neutral kaons with the KLOE experiment,” *Phys. Lett. B* **730**, 89-94 (2014) [arXiv:1312.6818 [hep-ex]].
- [45] A. Di Domenico *et al.* [KLOE], “Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system,” *J. Phys. Conf. Ser.* **171**, 012008 (2009)
- [46] R. Bluhm, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and N. Russell, “Probing Lorentz and CPT violation with space based experiments,” *Phys. Rev. D* **68**, 125008 (2003) [arXiv:hep-ph/0306190 [hep-ph]].
- [47] R. Bluhm, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and N. Russell, “Clock comparison tests of Lorentz and CPT symmetry in space,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002) [arXiv:hep-ph/0111141 [hep-ph]].
- [48] V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “Constraints on Lorentz violation from clock comparison experiments,” *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999) [arXiv:hep-ph/9908504 [hep-ph]].
-

-
- [49] R. K. Mittleman, I. I. Ioannou, H. G. Dehmelt and N. Russell, “Bound on CPT and Lorentz symmetry with a trapped electron,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2116-2119 (1999)
- [50] R. Bluhm, V. A. Kostelecky and N. Russell, “CPT and Lorentz tests in hydrogen and anti-hydrogen,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254-2257 (1999) [arXiv:hep-ph/9810269 [hep-ph]].
- [51] V. W. Hughes, M. Grosse Perdekamp, D. Kawall, W. Liu, K. Jungmann and G. zu Putlitz, “Test of CPT and Lorentz invariance from muonium spectroscopy,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 111804 (2001) [arXiv:hep-ex/0106103 [hep-ex]].
- [52] R. Bluhm, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “CPT and Lorentz tests with muons,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098-1101 (2000) [arXiv:hep-ph/9912451 [hep-ph]].
- [53] A. S. Friedman, R. Gerasimov, D. Leon, W. Stevens, D. Tytler, B. G. Keating and F. Kislak, “Improved constraints on anisotropic birefringent Lorentz invariance and *CPT* violation from broadband optical polarimetry of high redshift galaxies,” *Phys. Rev. D* **102**, no.4, 043008 (2020) [arXiv:2003.00647 [astro-ph.HE]].
- [54] A. S. Friedman, D. Leon, K. D. Crowley, D. Johnson, G. Teply, D. Tytler, B. G. Keating and G. M. Cole, “Constraints on Lorentz Invariance and *CPT* Violation using Optical Photometry and Polarimetry of Active Galaxies BL Lacertae and S5 B0716+714,” *Phys. Rev. D* **99**, no.3, 035045 (2019) [arXiv:1809.08356 [astro-ph.HE]].
- [55] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, “Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].
- [56] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen Phys.* **17**, 891-921 (1905)

-
- [57] M. Kaku, “Quantum field theory: A Modern introduction,” Oxford University Press, 1993.
- [58] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Addison-Wesley, 1995.
- [59] M. Chaichian, A. D. Dolgov, V. A. Novikov and A. Tureanu, “CPT Violation Does Not Lead to Violation of Lorentz Invariance and Vice Versa,” *Phys. Lett. B* **699**, 177-180 (2011) [arXiv:1103.0168 [hep-th]].
- [60] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990)
- [61] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572-3575 (1999) [arXiv:hep-ph/9901358 [hep-ph]].
- [62] A. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, “Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED,” *JHEP* **02**, 030 (2002) [arXiv:hep-th/0110279 [hep-th]].
- [63] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro and F. A. Brito, “A Remark on Lorentz violation at finite temperature,” *JHEP* **10**, 019 (2005) [arXiv:hep-th/0509008 [hep-th]].
- [64] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, “Lorentz-violating Chern-Simons action under high temperature in massless QED,” *Phys. Lett. B* **681**, 495-499 (2009) [arXiv:0906.2786 [hep-th]].
- [65] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes and B. Hiller, “Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced Chern-Simons-like term in extended QED,” *Eur. Phys. J. C* **56**, 571-578 (2008) [arXiv:0804.3537 [hep-th]].

-
- [66] T. Mariz, R. V. Maluf, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On one-loop corrections to the CPT-even Lorentz-breaking extension of QED,” *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, no.02, 1850018 (2018) [arXiv:1604.06647 [hep-th]].
- [67] G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, “QED with minimal and nonminimal couplings: on the quantum generation of Lorentz violating terms in the pure photon sector,” *J. Phys. G* **39**, 035002 (2012) [arXiv:1012.3291 [hep-th]].
- [68] A. P. Baeta Scarpelli, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities,” *Eur. Phys. J. C* **73**, 2526 (2013) [arXiv:1304.2256 [hep-th]].
- [69] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms,” *Phys. Rev. D* **85**, 125003 (2012) [arXiv:1111.0198 [hep-th]].
- [70] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and C. M. Reyes, “Quantum aspects of the higher-derivative Lorentz-breaking extension of QED,” *Phys. Rev. D* **99**, no.9, 096012 (2019) [arXiv:1804.08413 [hep-th]].
- [71] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 2011-2022 (2000) [arXiv:hep-th/9903044 [hep-th]].
- [72] B. Altschul, “There is No Ambiguity in the Radiatively Induced Gravitational Chern-Simons Term,” *Phys. Rev. D* **99**, no.12, 125009 (2019) [arXiv:1903.10100 [hep-th]].
- [73] S. Karki and B. Altschul, “Problems with Lorentz Violation Originating From a Cosmologically Varying Pseudoscalar Field,” *Phys. Rev. D* **102**, no.3, 035009 (2020) [arXiv:2007.00133 [hep-th]].

-
- [74] J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and F. A. Brito, “Lorentz-CPT violation, radiative corrections and finite temperature,” *JHEP* **06**, 016 (2007) [arXiv:0705.1338 [hep-th]].
- [75] M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action,” *Phys. Rev. D* **76**, 047701 (2007) [arXiv:0704.1104 [hep-th]].
- [76] A. P. Baeta Scarpelli, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities,” *Eur. Phys. J. C* **73**, 2526 (2013) [arXiv:1304.2256 [hep-th]].
- [77] A. F. Ferrari, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Radiative corrections and Lorentz violation,” *Eur. Phys. J. C* **80**, no.5, 459 (2020) [arXiv:1812.01702 [hep-th]].
- [78] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Lorentz symmetry breaking – classical and quantum aspects,” [arXiv:2205.02594 [hep-th]].
- [79] S. M. Carroll and H. Tam, “Aether Compactification,” *Phys. Rev. D* **78**, 044047 (2008) [arXiv:0802.0521 [hep-ph]].
- [80] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003) [arXiv:hep-ph/0301124 [hep-ph]].
- [81] K. S. Babu, A. K. Das and P. Panigrahi, “Derivative Expansion and the Induced Chern-simons Term at Finite Temperature in (2+1)-dimensions,” *Phys. Rev. D* **36**, 3725 (1987)
- [82] C. M. Fraser, “Calculation of Higher Derivative Terms in the One Loop Effective Lagrangian,” *Z. Phys. C* **28**, 101 (1985)

-
- [83] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, “Derivative Expansions of Fermion Determinants: Anomaly Induced Vertices, Goldstone-Wilczek Currents and Skyrme Terms,” *Phys. Rev. D* **31**, 2605 (1985)
- [84] J. Leite, T. Mariz and W. Serafim, “The induced higher derivative Lorentz-violating Chern–Simons term at finite temperature,” *J. Phys. G* **40**, 075003 (2013) [arXiv:1712.09675 [hep-th]].
- [85] J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and N. F. Svaiter, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature,” [arXiv:hep-th/0012039 [hep-th]].
- [86] T. Mariz, J. R. Nascimento and E. Passos, “Remarks on Lorentz and CPT violation in field theory,” *Braz. J. Phys.* **36**, 1171-1177 (2006) [arXiv:hep-th/0609021 [hep-th]].
- [87] K. S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D* **16**, 953-969 (1977)
- [88] T. P. Sotiriou, “Horava-Lifshitz gravity: a status report,” *J. Phys. Conf. Ser.* **283**, 012034 (2011) [arXiv:1010.3218 [hep-th]].
- [89] M. Visser, “Status of Horava gravity: A personal perspective,” *J. Phys. Conf. Ser.* **314**, 012002 (2011) [arXiv:1103.5587 [hep-th]].
- [90] D. Blas, “Hořava gravity: motivation and status,” *J. Phys. Conf. Ser.* **952**, no.1, 012002 (2018)
- [91] A. Wang, “Hořava gravity at a Lifshitz point: A progress report,” *Int. J. Mod. Phys. D* **26**, no.07, 1730014 (2017) [arXiv:1701.06087 [gr-qc]].
- [92] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Horava-Lifshitz four-fermion model revisited and dynamical symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **101**, no.10, 105008 (2020) [arXiv:1912.13378 [hep-th]].

-
- [93] T. Mariz, R. Moreira and A. Y. Petrov, “Emergent gauge bosons and dynamical symmetry breaking in a four-fermion Lifshitz model,” *Eur. Phys. J. C* **79**, no.7, 550 (2019) [erratum: *Eur. Phys. J. C* **79**, no.9, 729 (2019)] [arXiv:1905.04130 [hep-th]].
- [94] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “ $1/N$ expansion for Horava–Lifshitz like four-fermion models,” *Eur. Phys. J. C* **80**, no.6, 518 (2020) [arXiv:2001.06467 [hep-th]].
- [95] A. M. Lima, T. Mariz, R. Martinez, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and R. F. Ribeiro, “Horava-Lifshitz-like Gross-Neveu model,” *Phys. Rev. D* **95**, no.6, 065031 (2017) [arXiv:1612.05900 [hep-th]].
- [96] P. R. S. Gomes and M. Gomes, “Low-Energy Lorentz Invariance in Lifshitz Nonlinear Sigma Models,” *JHEP* **06**, 173 (2016) [arXiv:1604.08924 [hep-th]].
- [97] S. R. Das and G. Murthy, “ $CP^{(N-1)}$ Models at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D* **80**, 065006 (2009) [arXiv:0906.3261 [hep-th]].
- [98] T. Fujimori, T. Inami, K. Izumi and T. Kitamura, “Power-counting and Renormalizability in Lifshitz Scalar Theory,” *Phys. Rev. D* **91**, no.12, 125007 (2015) [arXiv:1502.01820 [hep-th]].
- [99] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the radiative corrections in the Horava–Lifshitz $z = 2$ QED,” *Phys. Lett. B* **764**, 277-281 (2017) [arXiv:1607.01240 [hep-th]].
- [100] M. Gomes, F. Marques, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “One-loop corrections in the $z=3$ Lifshitz extension of QED,” *Phys. Rev. D* **98**, no.10, 105016 (2018) [arXiv:1809.05692 [hep-th]].
- [101] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the Adler-Bell-Jackiw anomaly in a Horava-Lifshitz–like QED,” *EPL* **112**, no.6, 61002 (2015) [arXiv:1505.00715 [hep-th]].
-

-
- [102] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories,” *Phys. Rev. D* **85**, 127701 (2012) [arXiv:1112.2081 [hep-th]].
- [103] C. F. Farias, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories with the arbitrary critical exponent,” *Phys. Lett. B* **719**, 196-199 (2013) [arXiv:1208.3427 [hep-th]].
- [104] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Effective potential, Horava-Lifshitz-like theories, and finite temperature,” *Phys. Rev. D* **89**, no.2, 025014 (2014) [arXiv:1311.6313 [hep-th]].
- [105] M. Pospelov and Y. Shang, “On Lorentz violation in Horava-Lifshitz type theories,” *Phys. Rev. D* **85**, 105001 (2012) [arXiv:1010.5249 [hep-th]].
- [106] I. Bakas and D. Lust, “Axial anomalies of Lifshitz fermions,” *Fortsch. Phys.* **59**, 937 (2011) [arXiv:1103.5693 [hep-th]].
- [107] I. Bakas, “More on axial anomalies of Lifshitz fermions,” *Fortsch. Phys.* **60**, 224-242 (2012) [arXiv:1110.1332 [hep-th]].
- [108] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” *Nucl. Phys. B* **44**, 189-213 (1972)
- [109] J. F. Assunção and T. Mariz, “Radiatively induced CPT-odd Chern-Simons term in massless QED,” *EPL* **110**, no.4, 41002 (2015) [arXiv:1505.08156 [hep-th]].
- [110] S. L. Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics,” *Phys. Rev.* **177**, 2426-2438 (1969)
- [111] J. S. Bell and R. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model,” *Nuovo Cim. A* **60**, 47-61 (1969)