

INSTITUTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Surface Plasmon Polariton em  
metamateriais com fator de perda*

Luigi Augusto dos Santos Soares

Maceió, 2024



Luigui Augusto dos Santos Soares

*Surface Plasmon Polariton* em metamateriais com  
fator de perda

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física  
do Instituto de Física, da Universidade Federal de Alagoas,  
como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Solange Bessa Cavalcanti

Setembro de 2024

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S676s Soares, Luigui Augusto dos Santos.  
*Surface Plasmon Polariton* em metamateriais com fator de perda / Luigui Augusto dos Santos Soares. – 2024.  
70 f. : il. color.

Orientadora: Solange Bessa Cavalcanti.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 67-70.

1. Metamaterial. 2. Plásmons. 3. Plásmons de superfície. 4. *Polariton* (Física). 5. *Plasmon-polariton* (Física). I. Título.

CDU: 535:537

Dedico este trabalho  
ao meu pai Ivanildo,  
à minha mãe Joilza,  
à minha irmã Laryssa,  
à minha esposa Ravena,  
e à minha filha Nina.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão às pessoas e instituições que tornaram possível a conclusão desta dissertação:

Aos meus pais, Joilza e Ivanildo, cujo amor, carinho, apoio e incentivo foram fundamentais em cada passo deste percurso. À minha irmã, Laryssa, por seu apoio incondicional e crença em mim. À minha família, pelo constante suporte e carinho.

À minha esposa, Ravena, pelos preciosos conselhos, apoio e assistência durante todo o processo.

À minha orientadora, Prof<sup>ª</sup>. Solange Bessa Cavalcanti, pela sua orientação perspicaz, conselhos valiosos e pela fé em meu potencial.

Aos professores que marcaram minha jornada acadêmica, cujo estímulo, confiança e dedicação foram inspiradores e edificantes.

Aos colegas de curso, que compartilharam comigo diálogos, ideias, descobertas e aprendizados significativos.

Agradeço também ao CNPq pelo auxílio financeiro que viabilizou este projeto.

Cada um de vocês desempenhou um papel crucial nesta jornada, e por isso sou imensamente grato.

## RESUMO

As equações de Maxwell são tradicionalmente apresentadas por meio dos campos fundamentais ( $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ). Neste estudo, exploramos uma formulação alternativa das equações de Maxwell que também incorpora os campos  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , utilizados para descrever de forma mais adequada os fenômenos eletromagnéticos em materiais, considerando como estes respondem à presença de campos elétricos e magnéticos externos. Introduzimos, ainda, o conceito de metamaterial, um tipo de material artificialmente construído que exhibe propriedades incomuns em comparação com os materiais naturais. A partir desse conceito, demonstramos a possibilidade de sustentar *Surface Plasmon Polaritons* (SPPs) em uma configuração específica, detalhando sua implementação. Os SPPs em metamateriais apresentam características únicas que permitem o controle preciso da luz em escalas nanométricas. Ao projetar a geometria e as propriedades dos metamateriais, é possível ajustar as ressonâncias dos SPPs para interagir com a luz em diferentes comprimentos de onda. Neste trabalho, adotamos uma abordagem mais realista ao incluir o fator de perda na formulação do metamaterial. Essa inclusão ampliou as possibilidades de aplicação em dispositivos ópticos avançados, como sensores ultrasensíveis, moduladores de luz e circuitos ópticos integrados. Ao manipular o fator de perda, conseguimos controlar de maneira eficiente a variação da frequência, permitindo o ajuste preciso das propriedades ópticas do metamaterial para diversas aplicações. O estudo e desenvolvimento dos SPPs em metamateriais representam uma área de pesquisa em constante evolução, proporcionando oportunidades significativas para avanços na manipulação e controle da luz em escalas nanométricas, com aplicações potenciais em várias áreas da tecnologia óptica.

**Palavras-chave:** metamaterial, plasmon, surface plasmon, polariton, plasmon-polariton.

## ABSTRACT

Maxwell's equations are traditionally presented using the fundamental fields ( $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ ). In this study, we explore an alternative formulation of Maxwell's equations that also incorporates the fields  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{H}$ , which are used to more adequately describe electromagnetic phenomena in materials, taking into account how these materials respond to the presence of external electric and magnetic fields. We also introduce the concept of metamaterial, a type of artificially engineered material that exhibits unusual properties compared to natural materials. Based on this concept, we demonstrate the possibility of sustaining *Surface Plasmon Polaritons* (SPPs) in a specific configuration, detailing its implementation. SPPs in metamaterials present unique characteristics that allow precise control of light at nanometric scales. By designing the geometry and properties of metamaterials, it is possible to adjust the resonances of the SPPs to interact with light at different wavelengths. In this work, we adopted a more realistic approach by including the loss factor in the formulation of the metamaterial. This inclusion expanded the possibilities for applications in advanced optical devices, such as ultrasensitive sensors, light modulators, and integrated optical circuits. By manipulating the loss factor, we were able to efficiently control the frequency variation, allowing for precise adjustment of the optical properties of the metamaterial for various applications. The study and development of SPPs in metamaterials represent a continuously evolving research area, providing significant opportunities for advances in the manipulation and control of light at nanometric scales, with potential applications in various areas of optical technology.

**Key-words:** Metamaterial, plasmon, surface plasmon, polariton, plasmon-polariton.



## LISTA DE FIGURAS

1	Ilustração da unidade básica do metamaterial. Split Ring Ressonators (a) e fios condutores (b). . . . .	13
2	Esquemas das células elementares do metamaterial e o comprimento da onda eletromagnética em dois casos extremos. . . . .	16
3	Classificação dos materiais de acordo com o sinal de permissividade elétrica e permeabilidade magnética. . . . .	17
4	Ilustração esquemática da refração da luz nos sistemas ar - material de índice positivo convencional (a); e ar - metamaterial de índice negativo (b). . . . .	17
5	Ilustração de uma estrutura básica de fios de um metamaterial. . . . .	18
6	Ilustração dos <i>SRRs</i> ( <i>Split Ring Resonators</i> ). . . . .	19
7	(a) sistema de vetores dextrogiro quando $\epsilon > 0$ e $\mu > 0$ . (b) sistema de vetores levogiro quando $\epsilon < 0$ e $\mu < 0$ . . . . .	21
8	Reflexão e refração em material de índice positivo (a) e índice negativo (b). . . . .	22
9	Ilustração do transporte eletrônico no modelo de Drude. . . . .	26
10	Ilustração de um modelo simples para descrever a oscilação de plasma. . . . .	31
11	Diagrama mostrando a incidência de um feixe de luz com polarização <i>TM</i> e ângulo de incidência $\theta_i$ . . . . .	34
12	Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de cargas superficiais na interface entre o metal e o material dielétrico [34]. . . . .	36
13	Relação de dispersão de $\omega$ e $k$ onde $\omega_c = kc$ . O <i>SPP</i> ocorre quando $\omega = \omega_{SPP}$ . . . . .	41
14	Diagrama ilustrando a incidência de um feixe de luz com polarização <i>TM</i> e ângulo de incidência $\theta_i$ . . . . .	42
15	Diagrama ilustrando a incidência de um feixe de luz com polarização <i>TE</i> e ângulo de incidência $\theta_i$ . . . . .	43
16	Relação de dispersão ilustrando o <i>SPP</i> na configuração dielétrico (vácuo) - metamaterial com polarização <i>TE</i> . . . . .	46
17	<i>TE</i> , $\omega'$ e $\omega_{TE}$ . . . . .	47
18	Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de corrente superficial na interface entre o dielétrico e o metamaterial. . . . .	48
19	Gráfico da permeabilidade do metamaterial em função da frequência angular. . . . .	48

20	Relação de dispersão ilustrando o SPP na configuração dielétrico (vácuo) - metamaterial com polarização <i>TM</i> . . . . .	49
21	<i>TM</i> , $\omega'$ e $\omega_{TM}$ . . . . .	50
22	Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de cargas superficiais na interface entre o dielétrico e o metamaterial. . . . .	50
23	Relação de dispersão de ambas as polarizações consideradas. . . . .	51
24	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0$ . . . . .	54
25	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.01\omega_{SPP}$ . . . . .	55
26	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.02\omega_{SPP}$ . . . . .	55
27	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.05\omega_{SPP}$ . . . . .	56
28	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.085\omega_{SPP}$ . . . . .	56
29	Polarização <i>TE</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.086\omega_{SPP}$ . . . . .	57
30	Frequência do <i>SPP TE</i> ( $\omega_{TE}(\beta)$ ) em função do parâmetro $\beta$ . . . . .	58
31	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0$ . . . . .	59
32	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	60
33	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.13\omega_{SPP}$ . . . . .	60
34	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.14\omega_{SPP}$ . . . . .	61
35	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.141\omega_{SPP}$ . . . . .	61
36	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para $\gamma = 0.2\omega_{SPP}$ . . . . .	62
37	Polarização <i>TM</i> : relação de dispersão para diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	63
38	Frequência do <i>SPP TM</i> ( $\omega_{TM}(\beta)$ ) em função do parâmetro $\beta$ . . . . .	64

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Contextualização dos Metamateriais</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Conceitos teóricos dos metamateriais (<i>LHM</i>)</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução aos metamateriais . . . . .	15
3.2	Respostas eletromagnética dos metamateriais . . . . .	17
3.3	Equação de onda . . . . .	19
3.4	Left-handed materials ( <i>LHM</i> ) . . . . .	20
3.5	Lei de Snell e a refração dos raios de luz . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Contextualização dos Surface Plasmon Polaritons (<i>SPP</i>).</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Metodologia teórica para a descrição dos Plasmons</b>	<b>25</b>
5.1	Modelo de Drude . . . . .	25
5.2	Campo elétrico oscilante no Modelo de Drude . . . . .	27
5.3	Propagação eletromagnética no metal e Plasmon . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Surface Plasmons Polaritons</b>	<b>33</b>
6.1	Surface Waves (Ondas de Superfície) . . . . .	33
6.2	<i>SPP</i> em uma configuração do tipo Dielétrico-Metal . . . . .	39
<b>7</b>	<b><i>SPP</i> em uma configuração do tipo Dielétrico-Metamaterial</b>	<b>42</b>
7.1	<i>Situação ideal</i> . . . . .	42
7.2	<i>Situação com perda</i> . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>

# 1 Introdução

No estudo da óptica e dos materiais, há um domínio onde a luz e a matéria apresentam diversas propriedades exóticas. Este domínio é habitado por metamateriais - estruturas projetadas pelo homem para manipular a luz de maneiras que desafiam a intuição e ampliam os limites do que é fisicamente possível.

O nosso estudo se inicia explorando as raízes conceituais e as propriedades fundamentais desses materiais extraordinários. Desde sua concepção inicial até os avanços mais recentes, os metamateriais têm cativado a imaginação dos cientistas e engenheiros com sua capacidade de curvar, desviar e canalizar a luz de maneiras que antes eram consideradas impossíveis. Ao nos aprofundarmos neste ramo da física moderna, nos deparamos com exemplos notáveis de metamateriais em ação - desde capas de invisibilidade que desafiam a percepção visual até lentes planas que desafiam a distorção óptica.

No entanto, além do fascínio das propriedades ópticas extraordinárias dos metamateriais, surge uma fascinante interação entre essas estruturas e uma classe especial de fenômenos ópticos: os *surface plasmon polaritons* (*SPPs*). Esses fenômenos, surgidos da interação entre a luz e as oscilações coletivas da densidade de carga superficial dos metais, introduzem uma nova dimensão de controle sobre a luz em escalas nanométricas.

Nesta dissertação, estudaremos metamateriais e surface plasmon polaritons, explorando a interação física entre esses dois conceitos. Utilizando um formalismo mais realista, que considera o fator de perda dos metamateriais, nosso objetivo é expandir os horizontes científicos e vislumbrar um futuro onde a manipulação precisa da luz e do fator de perda abra novos caminhos para aplicações revolucionárias em áreas como comunicações ópticas, sensores de alta precisão e tecnologias de imagem avançada.

## 2 Contextualização dos Metamateriais

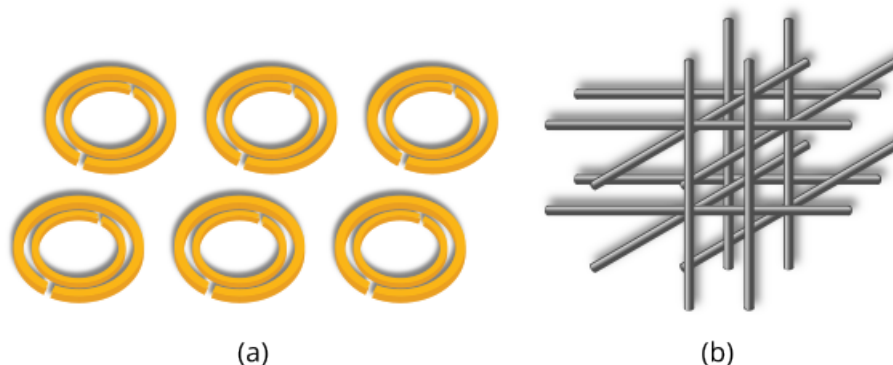
Vamos iniciar nossos estudos com a contextualização e a evolução histórica dos metamateriais. Para isso, será de grande importância mencionar os primeiros conceitos e propostas teóricas, que têm início com o trabalho de Victor Veselago, publicado em 1967 [1]. Em seu artigo “*The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$* ”, Veselago propôs a existência de materiais cujas permissividade elétrica ( $\epsilon$ ) e permeabilidade magnética ( $\mu$ ) são simultaneamente negativas. Essa combinação resultaria em um índice de refração negativo, desafiando os princípios clássicos da óptica. Embora, inicialmente, essas ideias fossem apenas hipóteses, o artigo, publicado na revista *Soviet Physics Uspekhi*, propôs a possibilidade teórica de novas propriedades eletromagnéticas, como a inversão do sinal da velocidade de fase das ondas eletromagnéticas e a obtenção de um índice de refração negativo para o metamaterial.

Victor Veselago não parou por aí e continuou sendo de grande importância na teoria dos metamateriais, e seus trabalhos subsequentes continuam a influenciar a pesquisa nesta área. Em 2003 foi publicado artigo com título *Electrodynamics of Materials with Negative Index of Refraction* [2] onde neste trabalho é examinado os princípios fundamentais dos materiais com índice de refração negativo, focando em suas propriedades ópticas e potenciais aplicações tecnológicas. Já em 2006 foi publicado o artigo com título *The left hand of brightness: past, present and future of negative index materials*. [3]. Neste artigo, Veselago et al. explora a teoria dos materiais *LHM* (*Left-Handed Materials*) e discute suas aplicações potenciais em diversas tecnologias de controle de ondas.

Apesar da teoria de Veselago et al., a fabricação desses materiais não foi possível até o final do século XX. Em 1999, David R. Smith, Sheldon Schultz, e seus colaboradores, publicaram um artigo na *Applied Physics Letters* onde apresentaram os primeiros dados experimentais para o metamaterial com índice de refração negativo, utilizando uma estrutura composta por anéis partidos (Figura 1 (a)) e fios condutores (Figura 1 (b)). Essa demonstração física de um *LHM* isotrópico bidimensional permitiu experimentos para verificar algumas das previsões explícitas das propriedades das ondas eletromagnéticas invertidas, incluindo índice de refração negativo, conforme analisado por Veselago [1].

Outro pesquisador bastante importante no estudo de metamateriais, em especial os Left Handed Materials, é o John Pendry, pois nos anos 2000, Pendry publicou o artigo de título *Negative Refraction Makes a Perfect Lens* [5]. Pendry propôs que metamateriais com índice de refração negativo poderiam ser usados para criar “superlentes” capazes de superar o limite de difração, permitindo uma resolução de imagem muito além do que é possível com lentes convencionais. Este conceito foi revolucionário e abriu novas possibilidades na óptica.

Figura 1: Ilustração da unidade básica do metamaterial. Split Ring Ressonators (a) e fios condutores (b).



Além disso, Pendry et al. publicou o artigo com título *Low Frequency Plasmons in Thin-Wire Structures* [6]. onde mostrou que arranjos periódicos de fios finos podem exibir propriedades semelhantes às dos plasmons, mas em frequências muito mais baixas do que aquelas observadas nos metais.

Pendry et al. também contribuíram no desenvolvimento de materiais *LHM* com o artigo de título *Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena* [7]. Onde introduziram a estrutura de ressonadores de anel partido, que são fundamentais para a criação de metamateriais com permeabilidade magnética negativa, essencial para alcançar um índice de refração negativo.

Ele também foi um dos principais pesquisadores que mais contribuiu com o conceito de capa de invisibilidade. No artigo de título *Controlling Electromagnetic Fields*. ele e seus colegas de pesquisa conseguiram mostrar teoricamente como metamateriais poderiam ser utilizados para guiar a luz ao redor de um objeto, tornando-o invisível [8]. A implementação prática de uma capa de invisibilidade começou com ondas de micro-ondas, que são mais fáceis de manipular com os metamateriais disponíveis na época. A primeira demonstração experimental de uma capa de invisibilidade em micro-ondas foi realizada por David R. Smith e seus colegas em 2006 e pode ser constatada no artigo de título *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies* [9].

Apesar dos avanços recentes, é importante frisar que uma das principais limitações das capas de invisibilidade é sua eficácia limitada a certas faixas de frequência. As primeiras demonstrações bem-sucedidas foram realizadas em frequências de micro-ondas, como mencionado anteriormente, que têm comprimentos de onda mais longos e são mais fáceis de manipular usando estruturas metamateriais. No entanto, para criar capas de invisibilidade que funcionem na faixa da luz visível, os metamateriais precisam ser estruturados em escalas nanométricas, o que é um desafio significativo para a fabricação e o controle das propriedades dos materiais. Há também a questão de que a fabricação de metamateriais em larga escala e com a precisão necessária para aplicações práticas é extremamente

complexa e cara. A manipulação em nanoescala e a integração de diferentes componentes materiais requerem técnicas avançadas de litografia e fabricação, que não são facilmente escaláveis ou econômicas [10].

Quanto as aplicações dos metamateriais, existem diversas, dentre elas podemos destacar o trabalho intitulado *Metamaterial-Inspired Compact Magnetic Dipole Antenna for VHF Band* [20]. Onde neste trabalho foi demonstrado como metamateriais podem ser utilizados para projetar antenas compactas com alto desempenho, especificamente uma antena dipolo magnética para a faixa *VHF* (*very high frequency*).

## 3 Conceitos teóricos dos metamateriais (*LHM*)

### 3.1 Introdução aos metamateriais

Nesta seção, abordaremos os princípios fundamentais dos metamateriais e investigaremos sua característica de apresentar simultaneamente permissividade e permeabilidade negativas dentro da mesma faixa de frequência.

Metamateriais são estruturas artificialmente criadas com propriedades eletromagnéticas predefinidas. Sua fabricação pode envolver a utilização de elementos idênticos, como fios e anéis que se assemelham com bobinas, organizados em estruturas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Essas estruturas guardam semelhanças significativas com os arranjos cristalinos encontrados em materiais sólidos naturais. Metamateriais geralmente consistem em arranjos periódicos de elementos artificiais projetados para conferir novas propriedades que não são comumente observadas na natureza. Em essência, eles são compostos por elementos manipulados artificialmente e que não se assemelham aos materiais convencionais encontrados na natureza.

Metamateriais são definidos e caracterizados pela resposta que as ondas eletromagnéticas têm ao interagirem com eles. As propriedades ópticas dos materiais são determinadas pela permissividade efetiva  $\epsilon_{\text{efe}}$  e pela permeabilidade efetiva  $\mu_{\text{efe}}$  desses materiais. Como vimos na Equação 48, para introduzir tal descrição, é necessário que o comprimento de onda  $\lambda$  seja muito maior que as dimensões e distâncias médias entre as estruturas do metamaterial  $d$ , ou seja,  $\lambda \gg d$ .

Resumindo algumas propriedades dos metamateriais, temos:

- feito artificialmente,
- apresentam propriedades não encontradas na natureza,
- suas propriedades são projetadas racionalmente,
- são construídos colocando inclusões nos locais desejados.

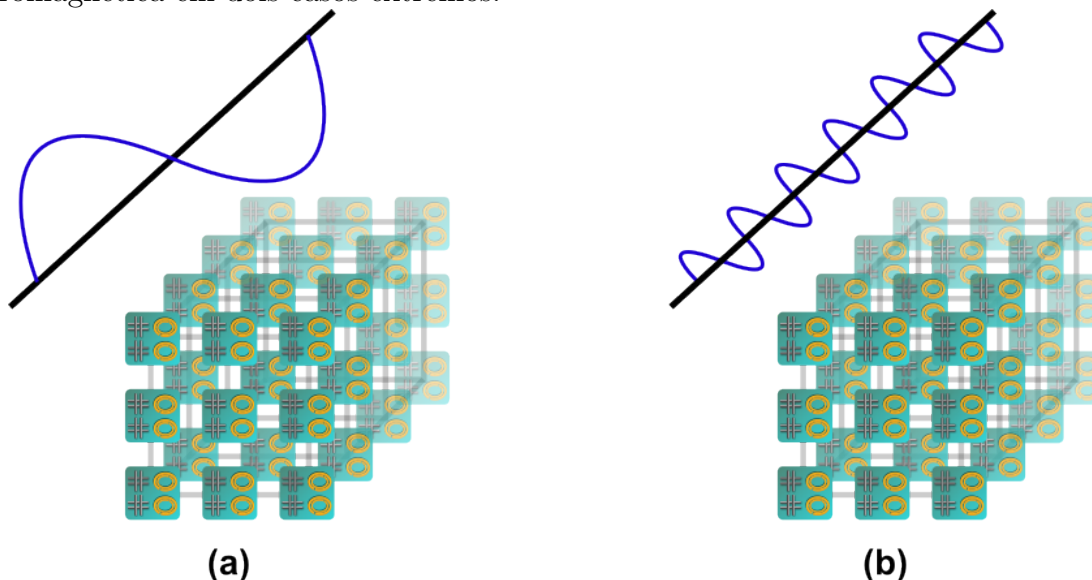
Com técnicas modernas de fabricação, é possível produzir estruturas que são significativamente menores que os comprimentos de onda do espectro visível. Isso implica que nossa descrição é aplicável à luz visível. Um exemplo das propriedades incomuns que tais estruturas podem possuir é o índice de refração negativo. Esta é uma das propriedades mais conhecidas de alguns metamateriais, denominados *negative index materials (NIM)*, também conhecidos como *left-handed materials (LHM)*.

Essa situação é ilustrada na Figura 2. Para um comprimento de onda grande, não se pode sentir as propriedades dos átomos constituintes individuais, mostrados à



esquerda (a), enquanto o comprimento de onda mais curto (b), na ordem da distância entre "átomos" ( $\lambda \approx d$ ), pode ser usado efetivamente para determinar algumas das propriedades do átomo (como suas localizações). Neste trabalho com metamateriais, lidaremos com a situação à esquerda.

Figura 2: Esquemas das células elementares do metamaterial e o comprimento da onda eletromagnética em dois casos extremos.



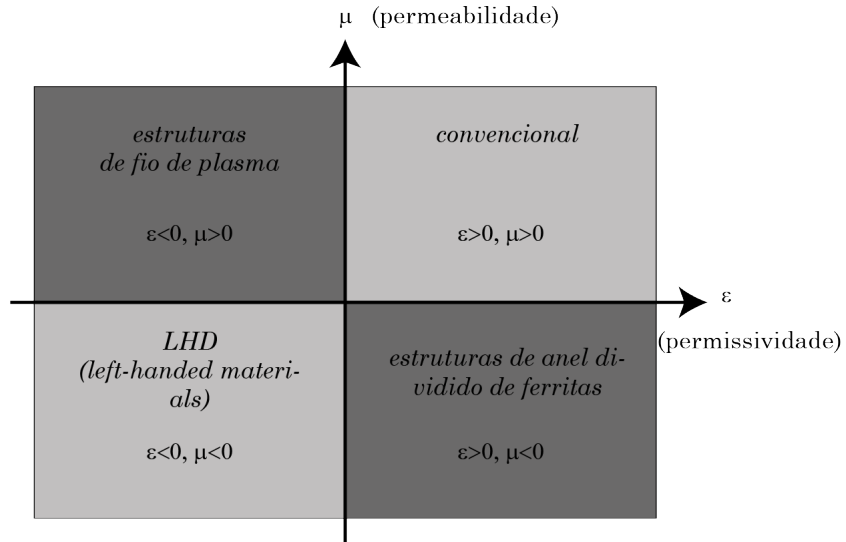
Os metamateriais podem ter tanto respostas magnéticas como elétricas controladas em uma ampla faixa de frequência. Essas respostas dependem das propriedades dos elementos individuais (estruturas de fios, de anéis ou ambos) que nos vão fornecer uma permissividade elétrica e uma permeabilidade magnética característica do material com que estamos lidando. No limite de comprimento de onda longo, onde  $\lambda \gg d$ , deve-se realizar um procedimento estatístico para determinar parâmetros eficazes dos metamateriais. Não entraremos em detalhes desses procedimentos, mas o que importa para nós aqui é que, no final, é possível atingir a condição em que  $\epsilon_{\text{efe}} < 0$  e  $\mu_{\text{efe}} < 0$ .

Podemos ilustrar a classificação dos metamateriais em um diagrama, como mostra a Figura 3. Em geral, materiais de índice negativo não existem na natureza, com exceção do bismuto, que quando colocado em um guia de onda, mostra um índice de refração negativo em um comprimento de onda de  $\lambda = 60\mu m$  [25], [39]. Não há ocorrência natural de *NIM* (*negative index materials*) conhecidos na faixa ótica. No entanto, materiais projetados artificialmente (metamateriais) podem atuar como *NIM*. Deve-se, entretanto, notar que a ocorrência de *NIM* precisa de  $\epsilon_{\text{efe}} < 0$  e  $\mu_{\text{efe}} < 0$  na mesma faixa de frequência.

Metamateriais podem abrir novos caminhos para alcançar propriedades físicas sem precedentes e funcionalidades inatingíveis com materiais naturalmente existentes. Os *NIM* ópticos prometem criar perspectivas inteiramente novas para controlar e manipular luz, esse tipo de manipulação pode ser aplicado em sensores ópticos, imagens em nanoescala,

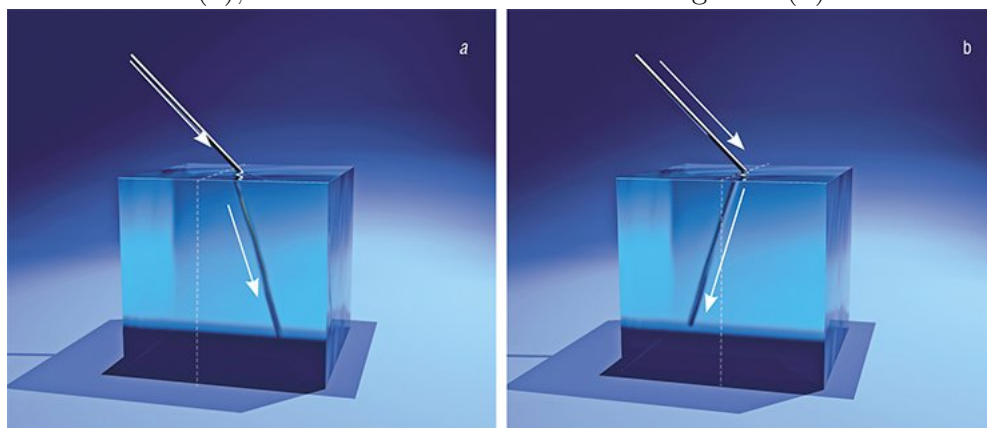
fotolitografia dentre outros tipos de tecnologia.

Figura 3: Classificação dos materiais de acordo com o sinal de permissividade elétrica e permeabilidade magnética.



Na Figura 4, ilustramos como seria a situação na prática. Em (a), a situação ilustra a refração da luz ao passar de um material para outro, no caso ar e um material qualquer, ambos com índice de refração positivo. Em (b), a situação ilustra a refração da luz ao passar de um material para um metamaterial. O primeiro possui índice de refração positivo e o segundo possui índice de refração negativo.

Figura 4: Ilustração esquemática da refração da luz nos sistemas ar - material de índice positivo convencional (a); e ar - metamaterial de índice negativo (b).



Fonte: [26].

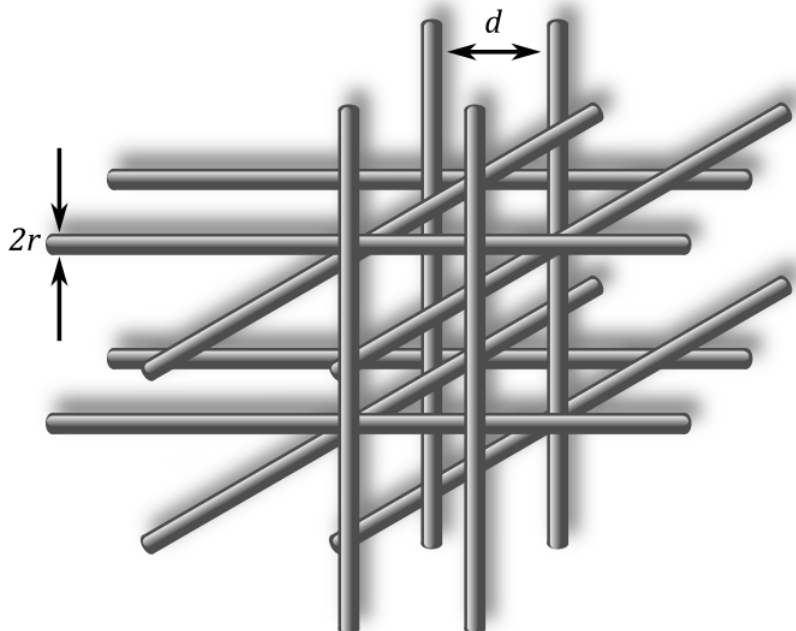
### 3.2 Respostas eletromagnética dos metamateriais

Uma vez que classificamos os metamateriais, agora precisamos descrevê-los. Em 1996, Pendry *et al.* [27] propuseram uma estrutura metálica com uma frequência de

plasma extremamente baixa. A estrutura consiste em uma rede tridimensional (3D) de fios metálicos muito finos, conforme esquematizado na Figura 3(a). Essa configuração resulta em dois efeitos distintos. Primeiramente, a densidade efetiva de elétrons aparenta ser reduzida. Em segundo lugar, a massa efetiva dos elétrons aumenta devido à autoindutância da estrutura do fio. Cálculos detalhados indicam que a permissividade relativa efetiva do sistema ainda segue o modelo de Drude-Lorentz, conforme esperado [28].

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_e)} \quad (1)$$

Figura 5: Ilustração de uma estrutura básica de fios de um metamaterial.



Onde  $\omega_p$  é a frequência de plasma e  $\gamma_e$  é a constante de amortecimento relacionada a permeabilidade, ambos dependem do tipo e da estrutura do material, como esses são detalhes de engenharia do material, não entraremos a fundo nesse campo.

No contexto do magnetismo, a criação de um campo magnético pode ser realizada por meio da geração de um circuito de corrente, como a corrente orbital encontrada em materiais magnéticos naturais. Essa corrente pode ser induzida, por exemplo, por meio de um campo magnético que varia ao longo do tempo e atravessa uma bobina condutora, conforme previsto pela lei de Faraday. Embora a corrente induzida e, conseqüentemente, o momento magnético, sejam geralmente fracos, eles podem ser significativamente amplificados pela introdução de ressonâncias na bobina.

Os ressonadores de anel dividido (*SRRs*) representam um dos projetos originais para a criação de magnetismo artificial robusto. Cada *SRR* é formado por dois anéis

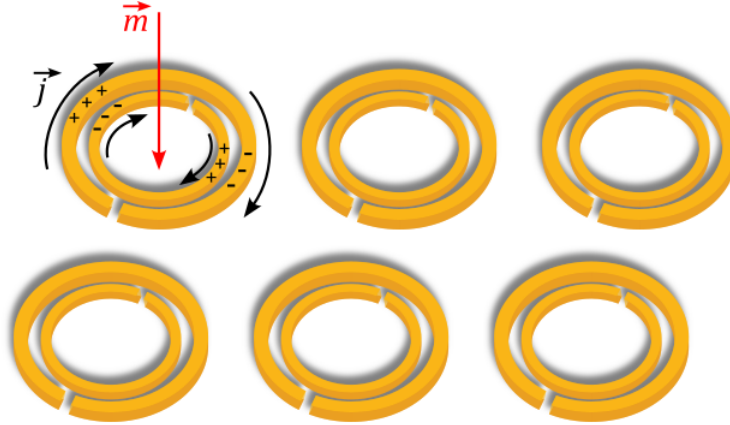
concêntricos divididos com aberturas em direções opostas, conforme exemplificado na Figura 3(c). Do ponto de vista de circuitos equivalentes, um *SRR* pode ser interpretado como um circuito LC, com a frequência ressonante natural sendo definida por:

$$\omega_m = \sqrt{1/LC} \quad (2)$$

onde  $L$  e  $C$  são a indutância e capacitância dos *SRRs* respectivamente.

Numa determinada faixa de frequência centrada em  $\omega_m$ , o fluxo magnético que atravessa um *SRR* induz uma corrente circulante intensa, resultando em um momento magnético médio. Esse momento magnético induzido pode estar em fase ou fora de fase em relação ao campo magnético externo. Se a resposta magnética for suficientemente intensa, é possível obter uma permeabilidade magnética relativa média com um valor negativo.

Figura 6: Ilustração dos *SRRs* (*Split Ring Resonators*).



dito isso, foi demonstrado [29] que a permeabilidade efetiva pode ser escrita como:

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2 + i\gamma_m\omega} \quad (3)$$

onde  $F$  é o fator de enchimento,  $\omega_m$  é a frequência de ressonância magnética,  $\gamma_m$  é a constante de amortecimento relacionada a permeabilidade magnética [30], todos esses fatores são dependentes da estrutura do material [28].

### 3.3 Equação de onda

Partindo da lei de Faraday e da lei de Ampere-Maxwell na matéria, temos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4)$$

na ausência de cargas e correntes livres e para materiais lineares ( $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ ), onde  $\chi_e$  seria a suscetibilidade elétrica [23], o campo  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  ficam:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5)$$

as Eqs. 4 ficam:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Tomando o rotacional na primeira equação e usando a segunda equação, temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (7)$$

usando a propriedade abaixo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (8)$$

no último passo, usamos que ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ), pois estamos supondo a ausência de densidade de cargas livres, dito isso, temos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

É importante notar que se desconsiderarmos as perdas e considerarmos  $\epsilon$  e  $\mu$  como números reais, pode-se observar que a equação de onda permanece inalterada quando mudamos simultaneamente os sinais de  $\epsilon$  e  $\mu$

### 3.4 Left-handed materials (*LHM*)

Vamos agora considerar os campos com uma dependência temporal harmônica, dito isso, temos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t} + c.c., \quad (10)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t} + c.c., \quad (11)$$

e introduzindo o vetor de onda  $\mathbf{k}$  e assumindo a dependência de uma onda plana, ou seja:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (12)$$

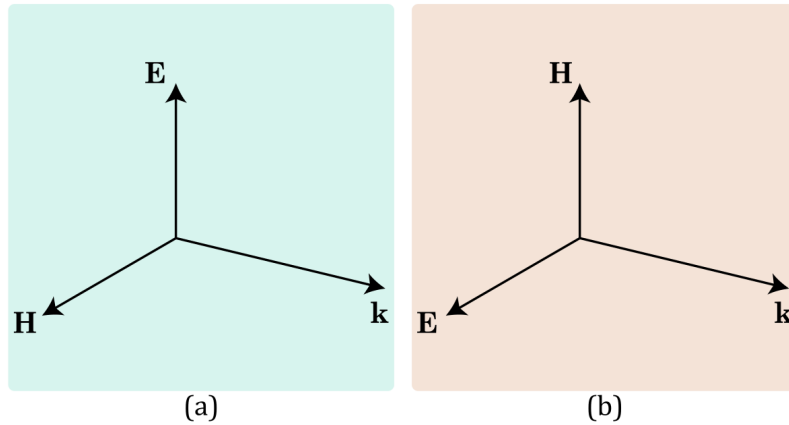
As equações de Maxwell Eqs. (6), toma a seguinte forma:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mu\omega\mathbf{H}, \quad (13)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \epsilon\omega\mathbf{E}. \quad (14)$$

Das Equações 13 e 14 e da definição de produto vetorial, podemos notar de imediato que para  $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ , os vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  formam um trio de vetores *dextrogiro* (regra da mão direita), e se  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$  eles formam um sistema *levogiro* (regra da mão esquerda), veja a Figura 7

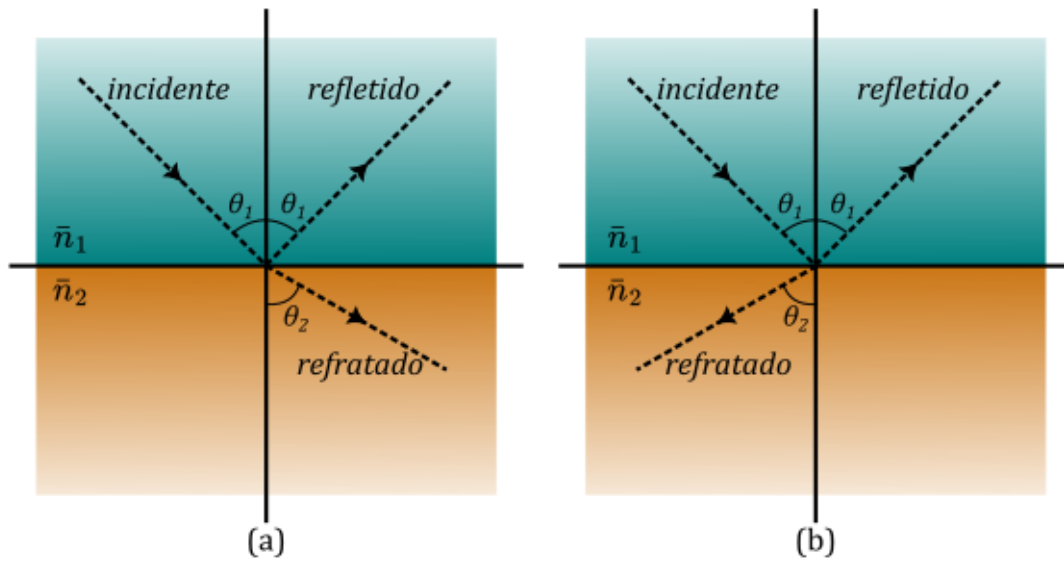
Figura 7: (a) sistema de vetores dextrogiro quando  $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ . (b) sistema de vetores levogiro quando  $\epsilon < 0$  e  $\mu < 0$



### 3.5 Lei de Snell e a refração dos raios de luz

Considere a propagação de um raio de luz através da fronteira entre meios canhotos e destros, na Figura 8. A luz que cruza a interface em uma incidência não normal sofre refração, ou seja, uma mudança em sua direção de propagação. O ângulo de refração depende do valor absoluto do índice de refração do meio. Aqui, temos uma representação de um incidência de luz em um meio destro (Figura (a)) e em um meio canhoto (Figura (b)). Em um metamaterial, a refração da luz estaria no mesmo lado da normal que o feixe incidente, veja a Figura 8. A relação entre os ângulos é determinada pela lei de Snell.

Figura 8: Reflexão e refração em material de índice positivo (a) e índice negativo (b).



Como sabemos, a lei de Snell é dada por:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (15)$$

E pela lei de Snell, fica nítido que para que a situação da Figura 8 (b) ocorra, é preciso que  $n_2 < 0$ .

## 4 Contextualização dos Surface Plasmon Polaritons (*SPP*).

Os surface plasmon polaritons (SPPs) são ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo da interface entre um metal e um dielétrico, acopladas às oscilações coletivas dos elétrons de condução no metal. O estudo dos SPPs combina aspectos da física dos plasmas, da óptica e da ciência dos materiais, e tem implicações importantes em áreas como a fotônica, a biossensores e a nanociência.

Pines e Bohm conseguiram demonstrar em seu trabalho de 1952 [11] e [12] que a natureza de longo alcance da interação de Coulomb entre elétrons de valência em metais gera oscilações plasmáticas coletivas. Essas oscilações são semelhantes às observadas por Tonks e Langmuir nas oscilações de densidade de elétrons em descargas elétricas em gases, conforme apresentado no trabalho de 1961 [13].

Dentre esse período em 1957 Rufus H. Ritchie publicou um artigo intitulado *Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films* [14], que foi um marco fundamental na história dos estudos sobre surface plasmons, especialmente os SPPs. Neste trabalho, Ritchie teorizou sobre a existência de oscilações coletivas das densidades de cargas de condução na interface entre um metal e um dielétrico, conhecidas como plasmons de superfície. Ele propôs que essas oscilações poderiam ocorrer em películas metálicas finas, o que posteriormente se revelou crucial para o desenvolvimento da teoria dos SPPs. Alguns anos depois, em uma série de experimentos sobre a perda de energia de elétrons, Powell e Swan [15] demonstraram a existência dessas excitações coletivas, as quais Stern e Ferrell chamaram de plasmons de superfície [16].

No artigo, Ritchie derivou expressões teóricas para as perdas de energia associadas aos plasmons de superfície em filmes metálicos, fornecendo uma base teórica sólida para estudos posteriores. Suas contribuições foram fundamentais para o entendimento inicial dos processos físicos que governam a interação de elétrons com metais em escalas nanométricas.

Posteriormente, Heinz Raether contribuiu significativamente para a compreensão teórica dos SPPs. Ele publicou um livro em 1988 intitulado *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings* [17], que se tornou uma referência clássica no estudo dos plasmons de superfície.

O trabalho de Raether desempenhou um papel crucial na consolidação do campo dos plasmons de superfície como uma área de pesquisa robusta e inovadora. Sua abordagem detalhada e meticulosa das propriedades dos SPPs em diferentes configurações ajudou a catalisar avanços significativos na fotônica e em tecnologias ópticas avançadas.

Como costuma ocorrer, pelo contexto tecnológico e material da época, a teoria se desenvolveu primeiro, mas em 1998 tivemos um dos principais resultados experimen-



tais da área, um deles é o artigo de título *Extraordinary Optical Transmission through Sub-Wavelength Hole Arrays* de Thomas W. Ebbesen et al [18]. Neste trabalho experimental foi demonstrado experimentalmente o fenômeno de transmissão ótica extraordinária através de matrizes de furos com dimensões menores que o comprimento de onda em metais. Os autores observaram que a transmissão de luz através dessas estruturas é significativamente maior do que o esperado pela teoria clássica, devido à excitação de *SPPs* na interface metal-dielétrico.

O estudo se desenvolveu ao ponto de desenvolver dispositivos em que base de funcionamento é o fenômeno de *SPPs*. Um deles pode ser constatado no artigo intitulado *Biosensing with Plasmonic Nanosensors* [19]. Onde nesse trabalho explorou o uso de nanoestruturas plasmônicas para biossensores altamente sensíveis. Os autores demonstraram como os *SPPs* podem ser empregados para detectar biomoléculas com alta precisão, aproveitando a sensibilidade única dessas estruturas à proximidade da matéria biológica.

Outros tipos de dispositivos e melhorias de dispositivos já conhecidos foram desenvolvidas com base na teoria dos *SPPs*, um deles pode ser constatado no artigo intitulado *Plasmonic Nanostructure Design for Efficient Light Coupling into Solar Cells* [20] onde os autores demonstram como os *SPPs* podem ser manipulados para melhorar a absorção de luz e a geração de corrente elétrica em dispositivos fotovoltaicos.

## 5 Metodologia teórica para a descrição dos Plasmons

### 5.1 Modelo de Drude

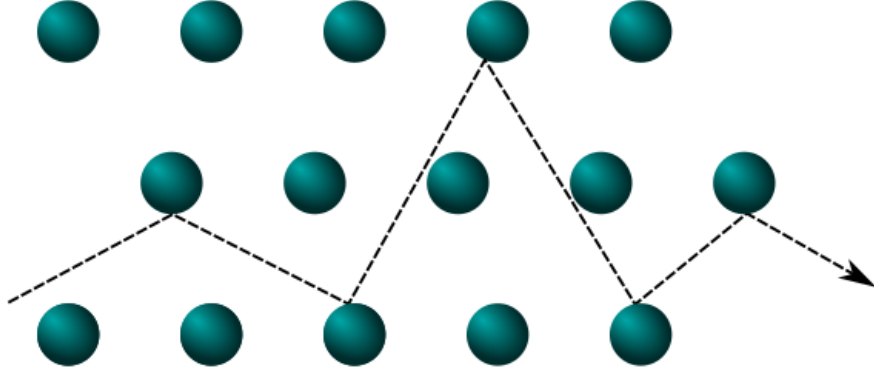
Para os desenvolvermos o raciocínio para compreensão dos *SPPs*, temos que entender o conceito de Plasmon, e para isso, vamos utilizar a abordagem do modelo de Drude.

Em 1900, Paul Drude publicou seu artigo intitulado *Zur Elektronentheorie der Metalle* [21] que introduziu o conceito de elétrons livres que interagem com uma estrutura cristalina através de colisões com íons positivos e respondem a campos elétricos externos. Essa abordagem pioneira não apenas estabeleceu os fundamentos teóricos para explicar como a corrente elétrica flui em metais, mas também lançou as bases para explorar fenômenos ópticos, como a absorção e a reflexão da luz, através do movimento dos elétrons livres. Ao longo das décadas, a teoria de Drude foi refinada e ampliada com contribuições subsequentes, tornando-se um pilar na física do estado sólido e um ponto de partida crucial para desenvolvimentos posteriores na eletrônica e em materiais funcionais.

Tanto é que em 1904 Drude publicou o artigo *Zur Optik der Metalle* [22] nesse trabalho, Drude expande sua teoria dos elétrons livres para explicar as propriedades ópticas dos metais, como reflexão e absorção da luz. Ele propõe que os elétrons livres são os principais responsáveis por esses fenômenos e desenvolve um modelo que relaciona a interação dos elétrons com campos eletromagnéticos à resposta óptica dos metais. Este trabalho é fundamental para a teoria da condutividade óptica e para a compreensão de como a luz interage com materiais condutores.

Agora, vamos ilustrar visual e matematicamente o *Modelo de Drude* [21], [24], que apresenta de maneira satisfatória alguns conceitos fundamentais no estudo de metamateriais no contexto do transporte eletrônico. Para isso, temos de considerar que o transporte eletrônico é realizado pelos elétrons livres nos metais, de modo que, quando um campo elétrico é aplicado, uma corrente elétrica é gerada, e a resistência é resultado das colisões dos elétrons com os núcleos atômicos. A Figura 9 ilustra bem esse conceito.

Figura 9: Ilustração do transporte eletrônico no modelo de Drude.



Vamos considerar também que a probabilidade do elétron colidir com o núcleo atômico será dada por  $1/\tau$ , onde  $\tau$  seria o tempo médio entre as colisões.

Sendo assim, podemos escrever a dinâmica eletrônica da seguinte forma:

$$\mathbf{p}(t + dt) = \begin{cases} \mathbf{p}_{col}, & \text{se houver colisão} \\ \mathbf{p}(t) + \mathbf{F}dt, & \text{se não houver colisão} \end{cases} \quad (16)$$

Como a probabilidade da colisão ocorrer é dada por  $(1/\tau)$ , podemos escrever que na média o momento linear do elétron tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{p}(t + dt) = \frac{dt}{\tau} \mathbf{p}_{col} + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\mathbf{p}(t) + \mathbf{F}dt). \quad (17)$$

Na média,  $(dt/\tau)\mathbf{p}_{col} = 0$  pois os elétrons se espalham em todas as direções aleatoriamente. Então a Equação 17 fica:

$$\langle \mathbf{p}(t + dt) \rangle = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\langle \mathbf{p}(t) \rangle + \mathbf{F}dt]. \quad (18)$$

Então, a Equação 18 pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{dt} = -\frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{\tau} + \mathbf{F}. \quad (19)$$

No caso em que temos um campo uniforme  $\mathbf{E}$ , temos que  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ , substituindo na Equação 19, temos:

$$\frac{d\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{dt} = -\frac{\langle \mathbf{p}(t) \rangle}{\tau} + -e\mathbf{E}. \quad (20)$$

Estamos interessados na solução estacionária da Equação 20, ou seja, para tempos

longos, temos que  $d\langle\mathbf{p}(t)\rangle/dt = 0$ , a Equação 20 fica:

$$\frac{\langle\mathbf{p}(t)\rangle}{\tau} = -e\mathbf{E}. \quad (21)$$

Sabendo que a densidade de corrente é definida como sendo  $\mathbf{J} = \rho\langle\mathbf{v}\rangle = -ne\langle\mathbf{v}\rangle = -ne\langle\mathbf{p}\rangle/m$  (Onde  $n$  é o número de elétrons dividido pela área transversal à passagem da corrente.), temos que a Equação 21 fica:

$$\mathbf{J} = \frac{e^2\tau n}{m}\mathbf{E}. \quad (22)$$

Equação 22 também é chamada de *Forma Microscópica da Lei de Ohm*.

## 5.2 Campo elétrico oscilante no Modelo de Drude

Agora iremos considerar um campo elétrico dependente do tempo, vamos escrever ele como sendo:

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}(\mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad (23)$$

aplicando na Equação 19, temos:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} - e\mathbf{E}, \quad (24)$$

estamos procurando uma solução para a o momento do tipo que oscila harmonicamente com o tempo, sendo assim:

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re}(\mathbf{p}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad (25)$$

substituindo a Equação 25 e 23 na 24, temos:

$$-i\omega\mathbf{p}(\omega) = -\frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau} - \mathbf{E}(\omega), \quad (26)$$

e usando que  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{p}/m$ , a densidade de corrente fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t) &= \text{Re}(\mathbf{J}(\omega)e^{-i\omega t}) \\ \mathbf{J}(\omega) &= -\frac{ne\mathbf{p}(\omega)}{m} = \frac{(ne^2/m)\mathbf{E}(\omega)}{(1/\tau) - i\omega}, \end{aligned} \quad (27)$$

ou, de uma forma mais compacta

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega), \quad (28)$$

onde  $\sigma(\omega)$  é conhecida como sendo a *condutividade dependente da frequência* (CA), é dada por:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (29)$$

### 5.3 Propagação eletromagnética no metal e Plasmon

Um das mais importantes aplicações desse resultado é justamente a propagação da radiação eletromagnética no metal. Supondo que o comprimento de onda seja muito maior que as distâncias típicas dos sítios atômicos. Temos ( $\lambda \gg l$ ), pode-se assumir uma uniformidade espacial do campo, então:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega). \quad (30)$$

A Equação 30 é válida quando o comprimento de onda  $\lambda$  é grande quando comparado com o caminho médio livre dos elétrons  $l$ .

Partindo das equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_t, \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (34)$$

E assumindo que  $\lambda \gg l$ , podemos proceder da seguinte forma: na presença de uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$  especificada, podemos escrever as equações de Maxwell (Equações 31, 32, 33 e 34) como sendo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (36)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (37)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (38)$$

Assim como fizemos para o momento, também estaremos interessados numa solução com uma dependência temporal do tipo  $e^{-i\omega t}$ , como vimos, podemos escrever  $\mathbf{J}$  em termos de  $\mathbf{E}$  via a Equação 30. Então, aplicando o rotacional na Equação 37, temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\mu_0 (\sigma \mathbf{E} - i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}), \quad (39)$$

ou

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (40)$$

onde,  $\epsilon(\omega)$  é a **constante dielétrica complexa**, dada por:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}. \quad (41)$$

Substituindo a equação (29) na (41), temos:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \right), \quad (42)$$

desenvolvendo um pouco mais a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \cdot \frac{1 + i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \right) \\ \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_0 + i\sigma_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) \\ \epsilon(\omega) &= 1 - \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_0\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) + \frac{i}{\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_0}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Considerando que estamos trabalhando com frequências que satisfazem:

$$\omega\tau \gg 1, \quad (44)$$

numa primeira aproximação, temos:

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega^2\tau} + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega^3\tau^2} = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\omega^2\tau} \left( 1 + i \frac{1}{\omega\tau} \right). \quad (45)$$

Considerando a condição (44), para nossa análise, é viável desprezar a parte imaginária da equação (45), dito isso:

$$\epsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}, \quad (46)$$

substituindo  $\sigma_0$  na equação (46), temos:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}, \quad (47)$$

então, para uma primeira aproximação, a Equação 47 pode ser reescrita como:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (48)$$

onde  $\omega_p$  é conhecida como frequência de plasma, dada por:

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}. \quad (49)$$

Quando  $\epsilon$  for positivo ( $\omega > \omega_p$ ), as soluções da Equação 48 tornam-se oscilatórias, permitindo a propagação da radiação e fazendo com que o metal se comporte como se fosse transparente para essa faixa de frequência, essa condição é atendida apenas quando  $\omega\tau \gg 1$  nas proximidades de  $\omega = \omega_p$ . No entanto quando  $\epsilon$  é real e negativo ( $\omega < \omega_p$ ), as soluções da Equação 48 decaem exponencialmente no espaço, ou seja, a radiação não pode se propagar.

Uma outra consequência significativa da Equação 48 é que o gás de elétrons pode suportar uma oscilação na densidade de cargas [21] [24]. Em outras palavras, isso implica que deve haver uma perturbação onde a densidade de cargas varia de forma oscilatória ao longo do tempo  $e^{-i\omega t}$ . Sendo assim, a partir da equação de continuidade, obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\omega) = -\frac{\partial \rho(\omega)}{\partial t} = i\omega\rho(\omega), \quad (50)$$

e a lei de Gauss nos dá:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\omega) = \frac{\rho(\omega)}{\epsilon_0}, \quad (51)$$

da equação 30 temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\omega) = \frac{\sigma(\omega)\rho(\omega)}{\epsilon_0}, \quad (52)$$

substituindo a equação (50) na (52), temos:

$$i\omega\rho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)\rho(\omega)}{\epsilon_0}, \quad (53)$$

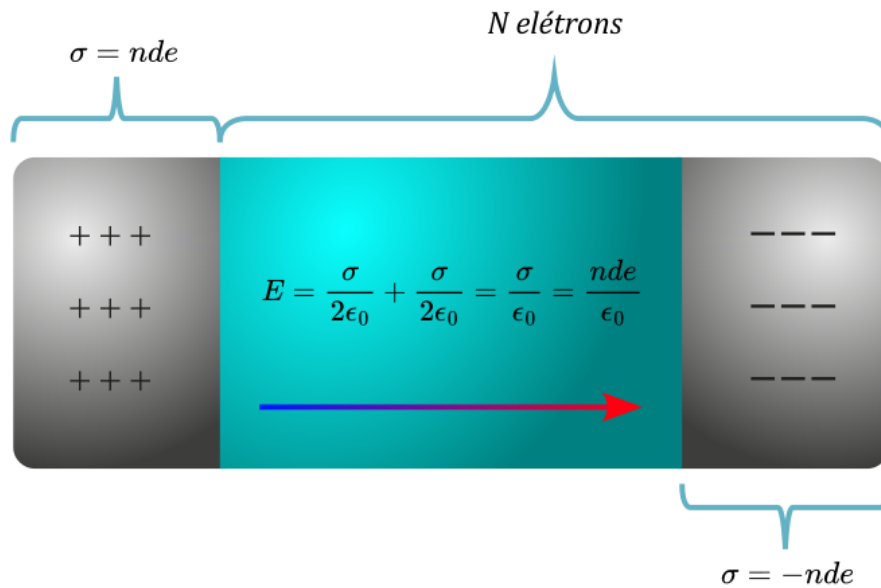
a equação (53) é uma solução desde que satisfaça:

$$1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0} = 0, \quad (54)$$

que é precisamente a condição que encontramos acima (equação (41)) para o início da propagação da radiação, no nosso contexto, essa é a condição que a frequência deve atender para que a onda de densidade de carga se propague no material.

Podemos ilustrar os plamons da seguinte maneira: imagine deslocar todo o gás de elétrons coletivamente por uma distância  $d$  em relação ao fundo fixo positivo dos íons, conforme mostrado na Figura 10. A carga superficial gerada cria um campo elétrico com magnitude  $\sigma/\epsilon_0$ , onde  $\sigma$  representa a carga por unidade de área em cada extremidade do objeto.

Figura 10: Ilustração de um modelo simples para descrever a oscilação de plasma.



Conseqüentemente, o gás de elétrons como um todo irá obedecer a seguinte equação de movimento:

$$Nm\ddot{d} = -Ne\frac{|\sigma|}{\epsilon_0} = -\frac{Nne^2}{\epsilon_0}d, \quad (55)$$

isolando os termos, temos:



$$\ddot{d} = -\frac{ne^2}{m\epsilon_0}d, \quad (56)$$

ou seja,

$$\ddot{d} = \omega^2 d, \quad (57)$$

que claramente é uma equação diferencial com solução harmônica. Note que:

$$\omega^2 = -\frac{ne^2}{m\epsilon_0} = \omega_p^2 \quad (58)$$

que é justamente a frequência de plasma dada pela equação (49). Então, nessa configuração, o plasmon irá oscilar com a exata frequência de plasma.

## 6 Surface Plasmons Polaritons

Neste capítulo, estudaremos como a interface entre dois meios pode sustentar a excitação de ondas de superfície a partir de uma escolha cuidadosa dos parâmetros de resposta elétrica e magnética. Veremos também que essas ondas de superfície são sustentadas na direção da intersecção entre os materiais (direção  $\mathbf{x}$ ) e decaem exponencialmente à medida que os campos penetram nos materiais na direção perpendicular à interface (direção  $\mathbf{z}$ ).

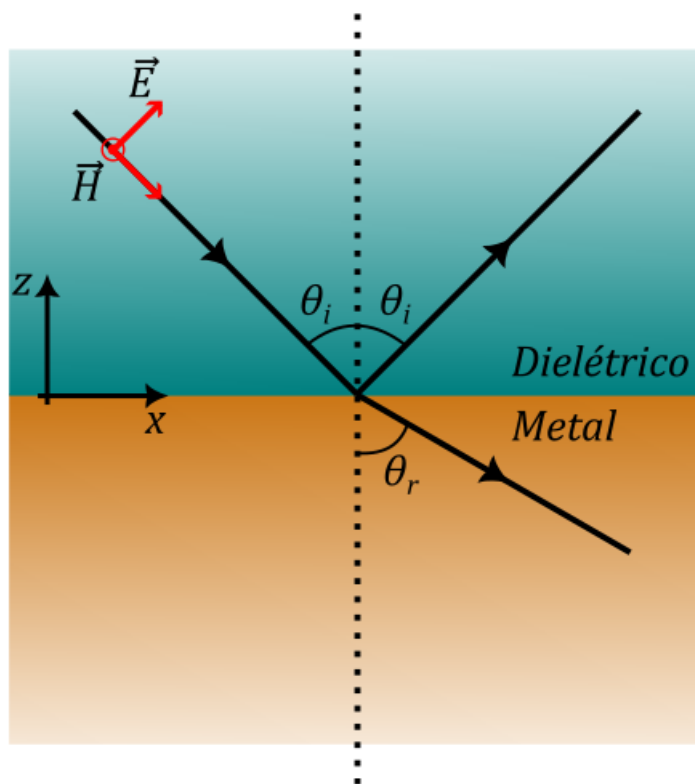
### 6.1 Surface Waves (Ondas de Superfície)

As pesquisas teóricas e experimentais sobre plasmons de superfície têm avançado significativamente. Esses avanços desempenham um papel crucial na interpretação de uma ampla variedade de experimentos na área de matéria condensada e física de superfície, contribuindo para a compreensão de várias propriedades fundamentais dos sólidos. Agora, vamos focar especificamente na formação das ondas de superfície, identificar os parâmetros envolvidos e as condições necessárias para sua sustentação.

Ondas superficiais, no contexto deste trabalho, são ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo da interface entre dois materiais, como metal e dielétrico. Esses fenômenos ocorrem na natureza e exigem certas condições para se manifestarem. Chamamos essas ondas de *Surface Plasmon Polaritons* (SPP), que são geradas pela dinâmica das densidades de cargas superficiais e se acoplam com a luz.

Dito isso, surge uma questão: como excitar essas cargas superficiais de maneira que sustentem a propagação de uma onda eletromagnética? Para responder a essa pergunta, vamos considerar uma onda com polarização *TM* (onde o campo magnético é transversal ao plano de incidência) que incide em uma superfície plana com um ângulo de incidência  $\theta_1$ , conforme ilustrado na Figura (11).

Figura 11: Diagrama mostrando a incidência de um feixe de luz com polarização *TM* e ângulo de incidência  $\theta_i$ .



Partindo da lei de Snell, temos a seguinte relação para o ângulo de incidência e o ângulo de refração:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (59)$$

Vamos chamar de ângulo crítico ( $\theta_c$ ) como sendo a amplitude máxima de  $\theta_2$  que é  $\pi/2$ , então da Eq. (59) temos que:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (60)$$

Por que o ângulo crítico é importante nesse caso? Porque uma onda que incide na interface com um ângulo maior que  $\theta_c$  possui mais momento (grandeza diretamente proporcional ao número de onda) ao longo da superfície plana do que o material 2 pode suportar. Para a onda com polarização *TM* que incide na interface, o campo elétrico oscilante causará cargas superficiais na interface entre o material 2 e o material 1. Nesse caso, passa a existir uma densidade de cargas oscilante que possui campos de radiação associados que penetram nos dois materiais. Eles são campos espacialmente decaídos (*campos evanescentes*) na direção normal à superfície da interface entre os materiais.

Agora, antes de prosseguirmos, precisamos fazer uma digressão na questão do campo de deslocamento  $\mathbf{D}$ , sendo assim: para esse contexto, podemos partir da definição da densidade de cargas  $\rho$ , como sendo a soma da densidade de cargas de polarização (aquelas que estão associadas à estrutura molecular ou atômica do material, ou seja, a polarização)  $\rho_p$  e a densidade de cargas livres  $\rho_l$

$$\rho = \rho_p + \rho_l, \quad (61)$$

sendo assim, a partir da lei de Gauss, temos:

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_p + \rho_l = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_l, \quad (62)$$

Manipulando a equação acima para juntar os termos com divergente, temos:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l. \quad (63)$$

Esse termo entre parênteses é conhecido como **deslocamento elétrico**. Em termos de  $\mathbf{D}$ , diz a lei de Gauss fica

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l, \quad (64)$$

Note que, para materiais lineares, a equação 63 pode ser escrita como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}, \quad (65)$$

de forma que  $\mathbf{D}$  é também proporcional a  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (66)$$

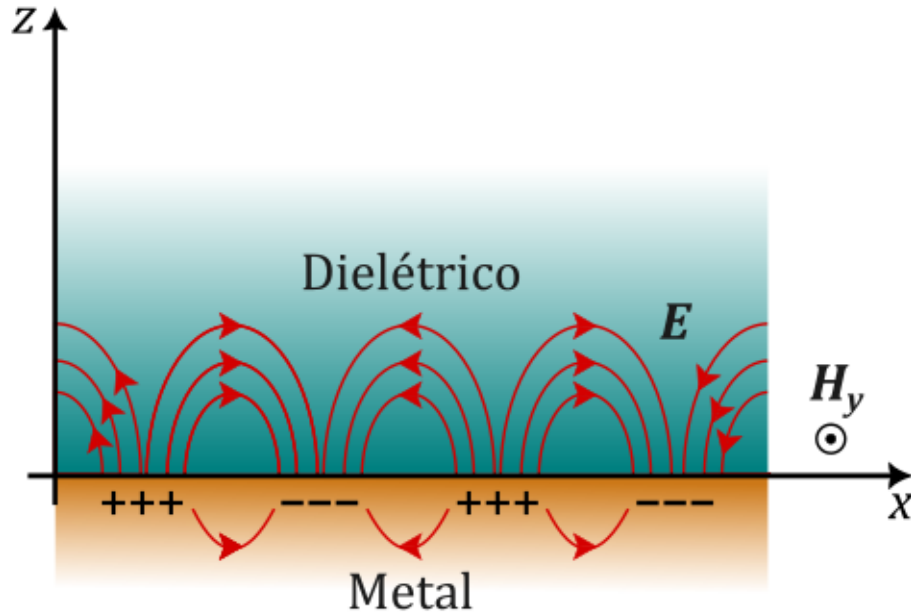
onde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e). \quad (67)$$

Agora podemos voltar ao nosso caso. A conservação da componente  $E_x$  ao longo da interface entre os dois meios ocorre devido à ausência de uma fronteira ortogonal a  $E_x$ . No entanto, tal conservação não se aplica a  $E_z$ . A continuidade de  $D_z$  (sem carga livre) requer que  $E_z$  mude se  $\epsilon$  for alterado (equação 66), uma vez que  $D_z = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{z1} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{z2}$ . Com essa descontinuidade em  $E_z$  podemos afirmar que isso resulta na alteração da polarização

bem na interface [33].

Figura 12: Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de cargas superficiais na interface entre o metal e o material dielétrico [34].



Vamos continuar nossa análise estudando a onda nos materiais 1 e 2. Considerando o plano  $xy$  como a interface entre os dois meios e a propagação da onda na direção  $x$ , quando  $z > 0$  (Material 1), temos:

$$\mathbf{E}_1 = (E_{x1}, 0, E_{z1}) \exp(-k_{z1}z) \exp[i(k_x x - \omega t)] \quad (68a)$$

$$\mathbf{H}_1 = (0, H_{y1}, 0) \exp(-k_{z1}z) \exp[i(k_x x - \omega t)]. \quad (68b)$$

Da mesma forma, para  $z < 0$  (Material 2), as equações são dadas por (69):

$$\mathbf{E}_2 = (E_{x2}, 0, E_{z2}) \exp(k_{z2}z) \exp[i(k_x x - \omega t)] \quad (69a)$$

$$\mathbf{H}_2 = (0, H_{y2}, 0) \exp(k_{z2}z) \exp[i(k_x x - \omega t)]. \quad (69b)$$

Agora, vamos considerar as duas soluções para  $\mathbf{E}$  (68a) e (69b) e aplicar na  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (sem densidade de cargas):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= ik_x \cdot E_{x1} \cdot \exp(-k_{z1}z) \exp[i(k_x x - \omega t)] \\
&\quad - k_z E_{z1} \cdot \exp(-k_{z1}z) \exp[i(k_x x - \omega t)] = 0 \\
&\Rightarrow ik_x E_{x1} - k_{z1} E_{z1} = 0 \Rightarrow E_{z1} = i \frac{k_x}{k_{z1}} E_{x1}.
\end{aligned} \tag{70}$$

De forma análoga, para (69b), temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \Rightarrow ik_x E_{x2} + k_{z2} E_{z2} = 0 \Rightarrow E_{z2} = -i \frac{k_x}{k_{z2}} E_{x2}. \tag{71}$$

Por outro lado, vamos considerar as equações (68a) e (68b) e aplicar na equação de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{72}$$

Temos:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_{x1}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z1}}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{73}$$

Que nos dá:

$$-k_{z1} E_{z1} - ik_x E_{x1} = i \frac{\omega}{c} H_{y1} = ik H_{y1}. \tag{74}$$

Analogamente, para as equações (69a), (69b), e (72), temos:

$$-k_{z2} E_{z2} - ik_x E_{x2} = i \frac{\omega}{c} H_{y2} = ik H_{y2}. \tag{75}$$

Substituindo as equações (70), (71) nas equações (74), (75), respectivamente, temos:

$$-k_{z1} E_{x1} - i^2 \frac{k_x^2}{k_{z1}} E_{x1} = ik H_{y1} \Rightarrow -k_{z1}^2 E_{x1} - i^2 k_x^2 E_{x1} = ik k_{z1} H_{y1}. \tag{76}$$

Levando em conta a dissipação na direção  $z$  de cada material ( $\mathbf{k}_j = (k_{xj}, 0, k_{zj})$  com  $j = 1, 2$ ), temos:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n_j^2} (k_{xj}^2 - k_{zj}^2) \quad (j = 1, 2). \tag{77}$$

Que resulta em:

$$k_{zj}^2 = k_{xj}^2 - \epsilon_j \mu_j k^2 \quad (j = 1, 2). \quad (78)$$

Como não temos interface perpendicular a direção  $x$  o momento nessa direção se conserva então  $k_{xd} = k_{xm} = k_x$ . É importante frisar que estamos trabalhando com a polarização  $TM$  então vamos assumir que  $\mu_j = 1$ , então a equação fica:

$$k_{zj}^2 = k_x^2 - \epsilon_j k^2, \quad j = (1, 2). \quad (79)$$

Então, para o material 1 temos que  $k_{z1}^2 = k_x^2 - \epsilon_1 k^2$ , o que nos dá:

$$E_{x1}(k_x^2 - k_{z1}^2) = ikk_{z1}H_{y1} \Rightarrow \epsilon_1 k E_{x1} = ik_{z1}H_{y1}. \quad (80)$$

E de forma análoga para o material 2, temos  $k_{z2}^2 = k_x^2 - \epsilon_2 k^2$ , o que nos dá:

$$\epsilon_2 k E_{x2} = -ik_{z2}H_{y2}. \quad (81)$$

Agora, vamos as condições de contorno de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , note que as componentes tangenciais de ambas são contínuas em  $z=0$ , *i.e.*  $E_{x1} = E_{x2}$ ,  $H_{y1} = H_{y2}$ , aplicando essas condições nas equações (80) e (81), temos:

$$\frac{\epsilon_1 k E_{x1}}{ik_{z1}} = -\frac{\epsilon_2 k E_{x1}}{ik_{z2}} \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{k_{z1}} + \frac{\epsilon_2}{k_{z2}} = 0. \quad (82)$$

Que nos dá:

$$\frac{k_{z1}}{k_{z2}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (83)$$

Substituindo a equação (79) na equação (83), temos:

$$\frac{k_{z1}^2}{k_{z2}^2} = \frac{k_x^2 - \epsilon_1 k^2}{k_x^2 - \epsilon_2 k^2} = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}. \quad (84)$$

Isolando  $k_x$ , temos finalmente que:

$$k_x = k \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}. \quad (85)$$

Que é justamente o nosso  $k$  do *Surface Plasmon Polariton* [32] ou simplesmente:

$$k_{SPP} = k \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}. \quad (86)$$

Note que o número de onda  $k_{SPP}$  é maior que  $k$  (fóton) para a mesma frequência. O que resulta em uma incompatibilidade entre os números de onda da luz e *SPP*. Essa incompatibilidade deve ser superada acoplando os modos de luz com o *SPP* na interface, isso acontece quando:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \quad (87)$$

Pois pela equação (83) temos que:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0 \Rightarrow k_{z1} = k_{z2} = k_x. \quad (88)$$

Ou seja, os números de onda das ondas imediatamente acima e abaixo da interface entre os dois materiais devem ser iguais e, além disso, iguais a  $k_x$ . Essa condição caracteriza o acoplamento da luz com as densidades de cargas superficiais (plasmon polariton) [33].

## 6.2 *SPP* em uma configuração do tipo Dielétrico-Metal

Neste trabalho, visando atingir nossos objetivos, adotaremos a metodologia de utilizar o modelo de Drude para o metal (e posteriormente para o metamaterial). Dessa forma, podemos partir da equação (48).

$$\epsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (89)$$

onde  $\omega_p$  é a frequência de plasma.

A condição  $k_{z1} = k_{z2} = k_x$  implica que para que o *SPP* ocorra:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0. \quad (90)$$

Substituindo a equação (89) na (90) e isolando  $\omega$  temos:

$$\epsilon_1 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \epsilon_1}}, \quad (91)$$

onde identificamos essa frequência como sendo a frequência do *SPP*:



$$\omega_{SPP} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \epsilon_1}}. \quad (92)$$

Agora nosso foco é determinar a relação de dispersão. Para alcançar esse objetivo, procederemos utilizando a permissividade do metal fornecida pelo modelo de Drude e substituindo na equação (86). Dessa forma:

$$k_{SPP} = k \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = k \sqrt{\frac{\epsilon_1 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 (\epsilon_1 + 1) - \omega_p^2}}. \quad (93)$$

considerando  $\epsilon_1 = 1$  (vácuo), temos que as equações (92) e (93) ficam:

$$\omega_{SPP} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}, \quad (94)$$

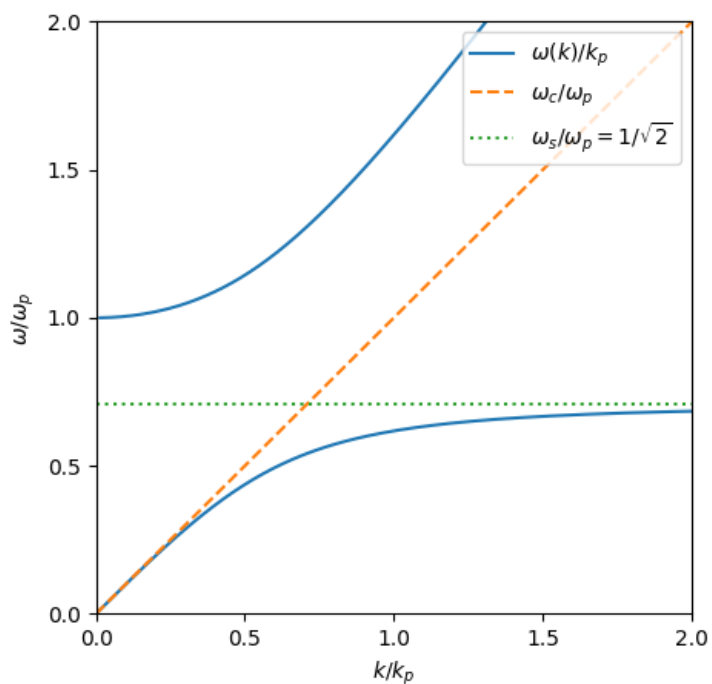
$$k_{SPP} = k \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{2\omega^2 - \omega_p^2}}. \quad (95)$$

Onde  $\omega_{SPP}$  é a frequência em que o *Surface Plasmon Polariton* ocorre e  $K_{SPP}$  é a relação de dispersão  $k_x(\omega)$  do *Surface Plasmon Polariton*. Abaixo, temos o gráfico dessa relação de dispersão:

Na figura (13), foi plotado o gráfico da equação (95). Aqui, podemos observar que, para baixas frequências, a dispersão da luz na interface se comporta como a dispersão da luz no vácuo. Também observamos um gap entre  $\omega_{SPP}$  e  $\omega_p = 15$  (valor escolhido). Acima de  $\omega_p = 15$ , a dispersão se comportaria como a já conhecida dispersão no sólido. Por fim, podemos observar o acoplamento da luz e os plásmons de superfície quando  $\omega = \omega_{SPP}$ .

Os plásmons de superfície surgem quando a frequência da luz incidente é igual à frequência dos Plásmons de Superfície de Plasma (SPP). Esse fenômeno ocorre devido ao acoplamento entre a luz e as oscilações coletivas dos elétrons na superfície de um material condutor, como um metal. Quando a frequência da luz coincide com a frequência natural de oscilação dos elétrons de superfície, ocorre uma ressonância, resultando na excitação dos plásmons de superfície. Esse acoplamento é fundamental para explorar e utilizar propriedades ópticas especiais associadas aos SPPs em diversas aplicações, incluindo sensores, dispositivos ópticos e nanotecnologia [35].

Figura 13: Relação de dispersão de  $\omega$  e  $k$  onde  $\omega_c = kc$ . O *SPP* ocorre quando  $\omega = \omega_{SPP}$ .



Fonte: Autor (2021).

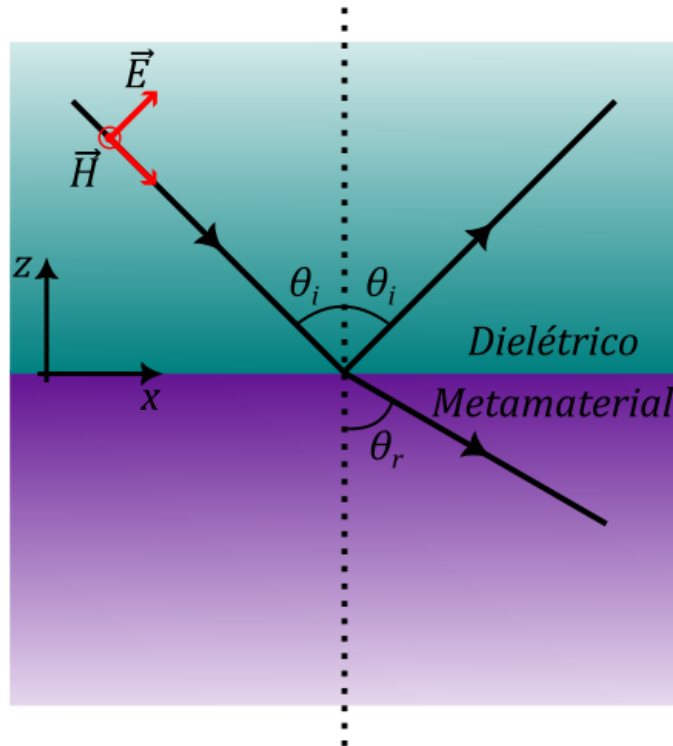
## 7 SPP em uma configuração do tipo Dielétrico-Metamaterial

No capítulo anterior, estudamos os conceitos de ondas de superfície e os requisitos para que surja a fenomenologia da luz ao se acoplar com os modos de oscilações das densidades de cargas, formando assim os SPPs. Agora, vamos utilizar essa teoria para explorar os resultados e compreender um pouco mais sobre como os SPPs se comportam em uma configuração do tipo dielétrico-metamaterial ideal e com perda.

### 7.1 Situação ideal

Para o feixe com polarização *TM* incidindo no material, vamos permanecer com quase a mesma configuração da Figura (13), onde a diferença seria o metal que agora foi trocado por um metamaterial, ilustramos essa configuração na Figura (14).

Figura 14: Diagrama ilustrando a incidência de um feixe de luz com polarização *TM* e ângulo de incidência  $\theta_i$ .

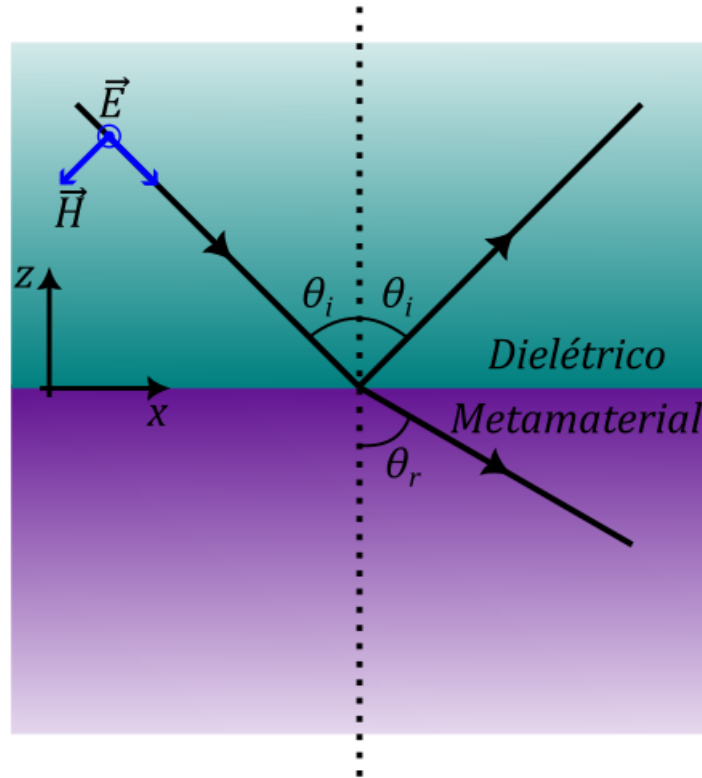


Analogamente, seguindo o mesmo raciocínio da configuração Metal-Dielétrico, podemos chegar, da mesma forma, na equação (83):

$$\frac{k_{z1}}{k_{z2}} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (96)$$

Como estamos trabalhando com metamateriais, dessa vez a *permeabilidade* magnética irá desempenhar um papel importante, já que a permeabilidade magnética do metamaterial depende da frequência. Então, é importante considerarmos a polarização do tipo *TE*. Dito isso, partindo da seguinte configuração representada na Figura (15):

Figura 15: Diagrama ilustrando a incidência de um feixe de luz com polarização *TE* e ângulo de incidência  $\theta_i$ .



De forma análoga, considerando a polarização *TE*, podemos chegar à seguinte expressão que, dessa vez, relaciona a permeabilidade dos materiais envolvidos (*dielétrico* e *metamaterial*) e os números de ondas imediatamente acima e abaixo da interface entre os dois materiais.

$$\frac{k_{z1}}{k_{z2}} = -\frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (97)$$

Da equação (77), temos:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n_1^2}[k_x^2 - k_{z1}^2] = \frac{c^2}{n_2^2}[k_x^2 - k_{z2}^2], \quad (98)$$

da equação acima podemos chegar na seguinte expressão:

$$\frac{k_{z1}}{k_{z2}} = \sqrt{\frac{k_x^2 - \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 / c^2}{k_x^2 - \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 / c^2}} \quad (99)$$

Para polarização *TM*, podemos utilizar a equação (96) para isolarmos  $k_x$ , dito isso:

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 \frac{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2^2}}{1 - \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}}. \quad (100)$$

De forma análoga, para a polarização *TE* utilizamos a equação (97) e isolando  $k_x$ , obtemos:

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 \frac{1 - \frac{\epsilon_2 \mu_1}{\mu_2^2}}{1 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}}. \quad (101)$$

A partir daqui, precisamos considerar o tipo das respostas eletromagnéticas para seguirmos com os cálculos e encontrarmos  $k_{SPP}$ . Dito isso, vamos considerar a resposta elétrica dada pelo modelo de Drude.

$$\epsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (102)$$

E para a resposta magnética, vamos utilizar a permeabilidade magnética do tipo Drude para metamateriais Equação (3) com  $\gamma = 0$ . Dito isso,

$$\mu_2(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2}. \quad (103)$$

Onde,  $\nu_p = \omega_p/2\pi$  é a frequência de plasma e  $\nu_m = \omega_m/2\pi$  é a frequência de ressonância magnética, e  $F$  é o fator de preenchimento experimental. Como uma representação física real de um metamaterial [36], vamos utilizar os seguintes valores:

Tabela 1: Valores dos parâmetros físicos para o metamaterial

Parâmetro	Valor
$\nu_p = \omega_p/2\pi$	10 GHz
$\nu_m = \omega_m/2\pi$	4 GHz
$F$	0.56

Das equações (102) e (103), vemos que  $\epsilon_m < 0$  para o intervalo  $(0, \omega_p)$  e  $\mu_m < 0$  para o intervalo  $(\omega_m, \omega_M)$ , onde  $\omega_M = \omega_m/\sqrt{1-F}$ . Partindo da equação (78), vemos que:

$$k_x^2 = \epsilon_j \mu_j k^2 + k_z^2, \quad (104)$$

que implica:

$$k_x^2 > \epsilon_2 \mu_2 \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_2^2}{v^2}, \quad (105)$$

e conseqüentemente:

$$k_x > \frac{\omega}{c}, \quad (106)$$

onde  $v^2$  é a velocidade da luz no material.

Agora, podemos obter a relação de dispersão para ambas as polarizações. Começando pela polarização *TM*, podemos substituir as equações (102) e (103) na equação (100) e obtemos:

$$\left(\frac{k_x}{k_p}\right)_{TM} = \frac{\omega}{\omega_p} \sqrt{\epsilon_2 \frac{\epsilon_2 - \mu_2}{\epsilon_2^2 - 1}} \quad (107)$$

onde  $k_p = \omega_p/c$ . De forma análoga, para a polarização *TE*, podemos substituir as equações (102) e (103) na equação (101) e obtemos:

$$\left(\frac{k_x}{k_p}\right)_{TE} = \frac{\omega}{\omega_p} \sqrt{\mu_2 \frac{\mu_2 - \epsilon_2}{\mu_2^2 - 1}} \quad (108)$$

Tratando-se da polarização *TE*, a faixa de frequência em que  $\mu_m < 0$  e que a raiz é real é dada pela seguinte banda de frequência:

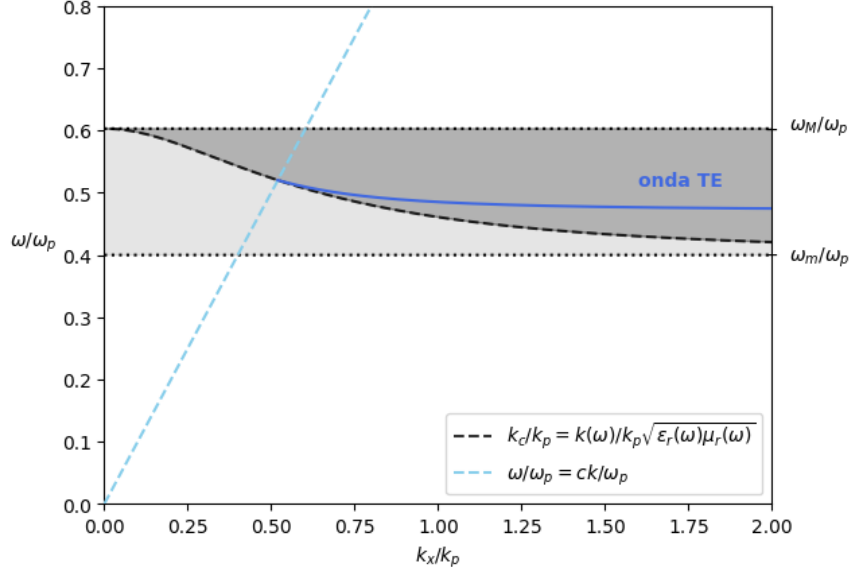
$$\omega_{TE} < \omega < \omega', \quad (109)$$

onde  $\omega_{TE}$  é dado pela relação  $\mu_1 + \mu_2(\omega_{TE}) = 0$  e  $\omega'$  é dada pela relação:

$$\epsilon_2(\omega')\mu_2(\omega') = 1. \quad (110)$$

Note que  $\omega'$  é a frequência mais alta que ambas as condições das equações (105) e (106) são satisfeitas. Na figura (16) plotamos o gráfico da relação de dispersão da equação (108).

Figura 16: Relação de dispersão ilustrando o SPP na configuração dielétrico (vácuo) - metamaterial com polarização  $TE$ .



No interior do metamaterial, tanto a permissividade elétrica como a permeabilidade magnética dependem da frequência e são dadas pelas equações (102) e (103). A linha tracejada entre as duas áreas sombreadas descreve a relação de  $k_x$  da equação (105). As ondas de superfície só existem na região à direita dessa linha (condição estabelecida pela equação (105)).

Podemos encontrar a frequência exata onde o *Surface Plasmon Polariton* ocorre para a polarização  $TE$ ; chamaremos essa frequência de  $\omega_{TE}$ . Para encontrarmos  $\omega_{TE}$ , basta encontrarmos a frequência em que a luz esteja completamente acoplada ao modo de vibração da densidade de cargas; em outras palavras, o vetor de onda imediatamente acima e imediatamente abaixo da interface entre os dois materiais deve ser igual, ou seja,  $k_{z1} = k_{z2}$ . Então, da equação (97), temos:

$$\mu_1 + \mu_2(\omega_{TE}) = 0. \quad (111)$$

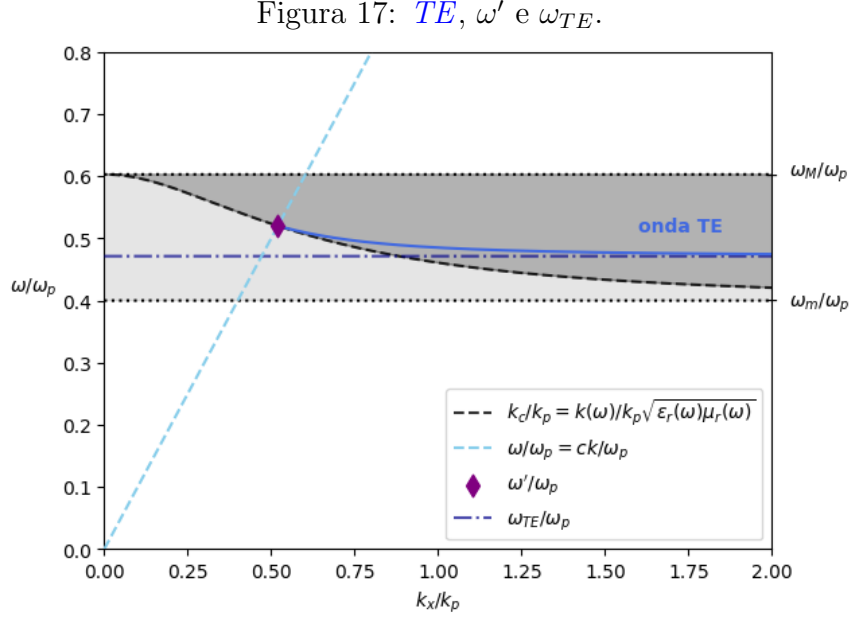
Considerando resposta magnética do dielétrico como sendo  $\mu_1 = 1$  e a resposta magnética do metamaterial dada pela equação (103) e substituindo-as na equação (111) obtemos:

$$\omega_{TE} = \sqrt{\frac{2}{2-F}} \omega_m, \quad (112)$$

e para obtermos  $\omega'$ , basta considerarmos que  $\epsilon_2(\omega')\mu(\omega') = 1$ , sendo assim:

$$\omega' = \sqrt{\frac{-(F-1)\omega_p^2 - \sqrt{((F-1)\omega_p^2)^2 - 4F\omega_p^2\omega_m^2}}{-2F}}. \quad (113)$$

Na figura (17) pode-se identificar a localização de  $\omega_{TE}$  e  $\omega'$  no gráfico.

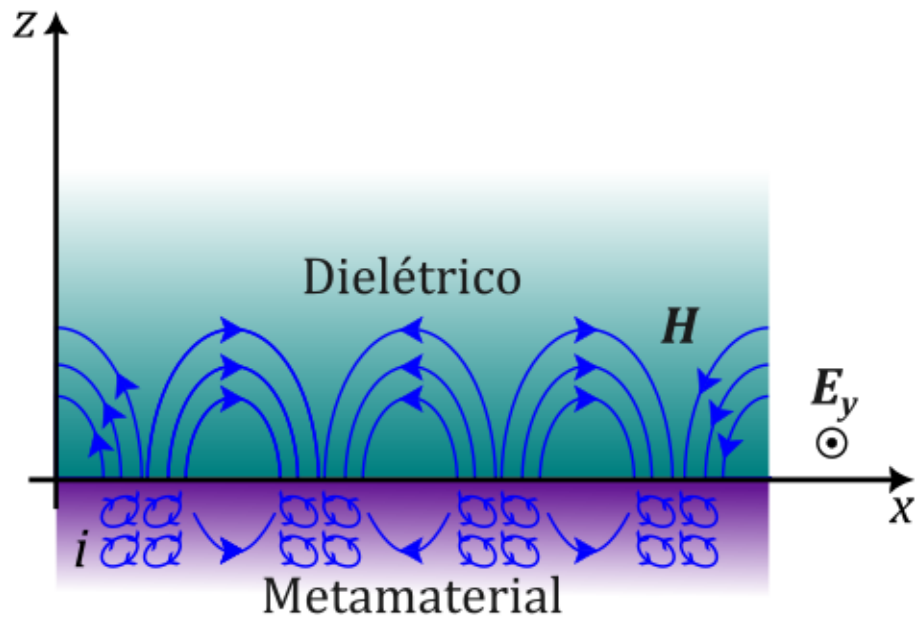


A frequência  $\omega'$  define o início do *SPP TE* e a frequência mais alta que ambas as condições da equação (105) são satisfeitas.

Outro aspecto a considerar é que, como observado, o *SPP* existe para um feixe com polarização *TE* na configuração dielétrico-metamaterial [36]. Uma explicação para esse fenômeno é a seguinte: no caso da polarização *TM*, o *SPP* requer um acoplamento entre o campo do feixe incidente e a densidade de carga na interface dos dois meios. Por outro lado, para a polarização *TE*, o acoplamento ocorre entre o campo do feixe incidente e a densidade de corrente, resultando em uma densidade de corrente oscilante. Para uma compreensão mais clara, para fim de ilustração, podemos fazer uma aproximação grosseira, mas que servirá para os nossos objetivos, e considerar o metamaterial como sendo um meio linear, sendo assim, é evidente que a magnetização oscilará com a mesma dependência harmônica que o campo  $\mathbf{H}$ . Essa configuração é ilustrada na Figura (18).

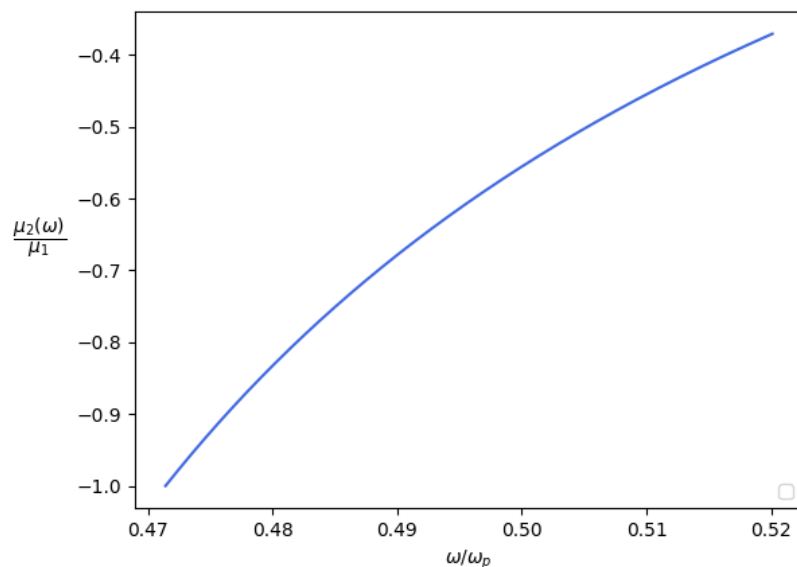


Figura 18: Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de corrente superficial na interface entre o dielétrico e o metamaterial.



Além disso, podemos verificar o comportamento de  $\mu_2(\omega)$ , dito isso, segue o gráfico de  $\mu_2(\omega)$  na Figura (19).

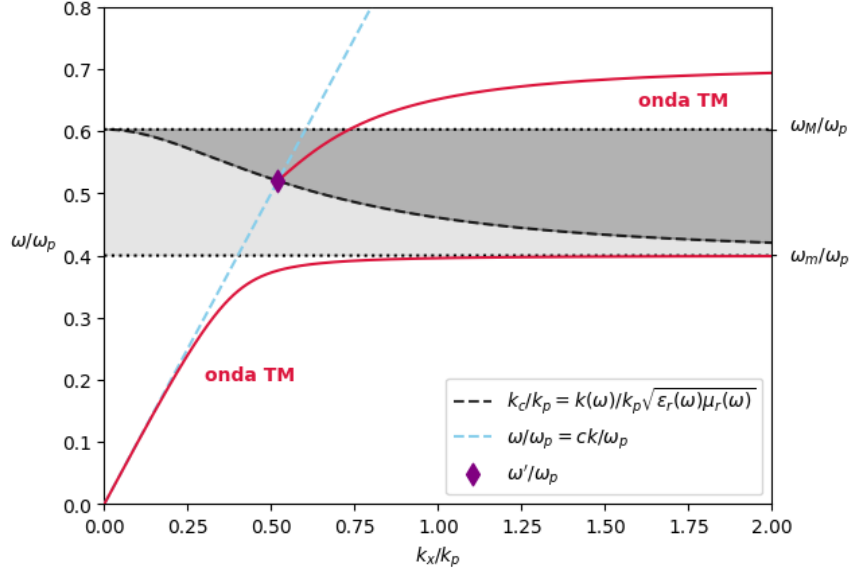
Figura 19: Gráfico da permeabilidade do metamaterial em função da frequência angular.



Note que  $\mu_2$  está contido no intervalo aproximado de  $[0.37, 1]$ . Considerando que a suscetibilidade magnética (para meios lineares) pode ser descrita como  $\chi_m = \mu_2/\mu_0 - 1$ , pelo menos na região de frequência de interesse, o campo  $\mathbf{H}$  obedecerá à regra da mão

esquerda, como já discutimos nas seções anteriores (Equação (13)). Dito isso, podemos seguir para a descrição da fenomenologia com a polarização *TM*. Partindo da equação (107), podemos plotar a sua relação de dispersão:

Figura 20: Relação de dispersão ilustrando o SPP na configuração dielétrico (vácuo) - metamaterial com polarização *TM*.



Onde nesse caso, podemos observar dois *Surface Plasmon Polaritons* [38], o primeiro quando  $\omega = \omega_m$  surge devido a divergência de  $\mu_2(\omega_m)$ , isso faz com que  $k_x$  exploda. O segundo *Surface Plasmon Polariton* se deve a mesma fenomenologia da configuração *dielétrico-metal* ilustrada na figura (13). Para entendermos um melhor a natureza dessa fenomenologia, vamos encontrar as frequências exatas onde o *SPPs* ocorrem, dito isso:

A frequência do primeiro *SPP* é a mais simples, já que ela acontece em  $\omega = \omega_m$ . O segundo *SPP* acontece quando a condição  $\epsilon_1 + \epsilon_2(\omega_{TM}) = 0$  é satisfeita, ou seja, quando  $\epsilon_2(\omega_{TM})$  tem valor igual a  $\epsilon_1$  porém com sinal oposto. Dito isso:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2(\omega_{TM}), \quad (114)$$

substituindo a equação (102) na (114), temos:

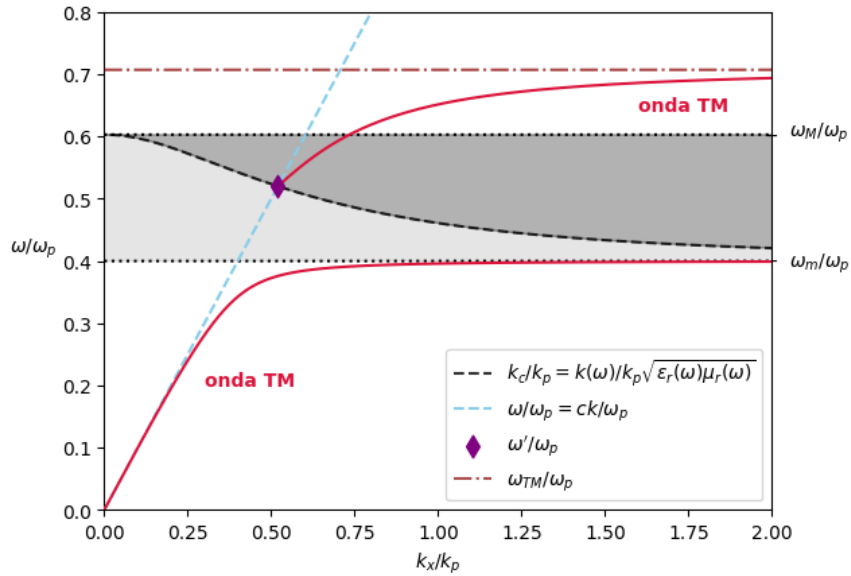
$$1 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2}, \quad (115)$$

O que nos dá:

$$\omega_{TM} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}, \quad (116)$$

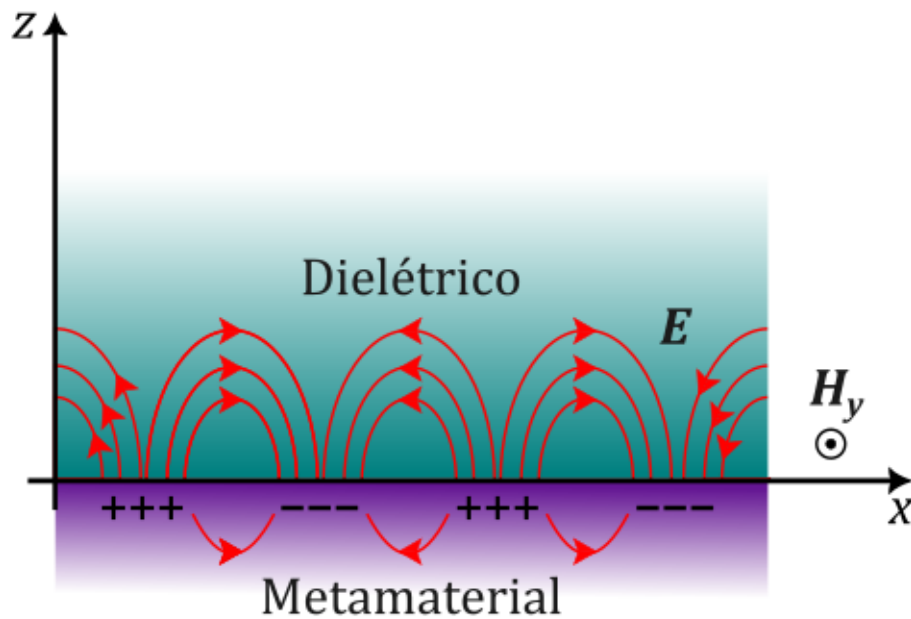
que é a mesma frequência para a configuração *dielétrico-metal* (Equação (94)). Uma vez que encontramos a frequência do segundo *SPP*, podemos marcar ela no gráfico, dito isso:

Figura 21: *TM*,  $\omega'$  e  $\omega_{TM}$ .



A representação da fenomenologia do *SPP* com polarização *TM* é similar à da Figura (12), com a diferença de que o metal foi substituído por metamaterial. Na Figura (22), ilustramos a configuração dielétrico-metamaterial:

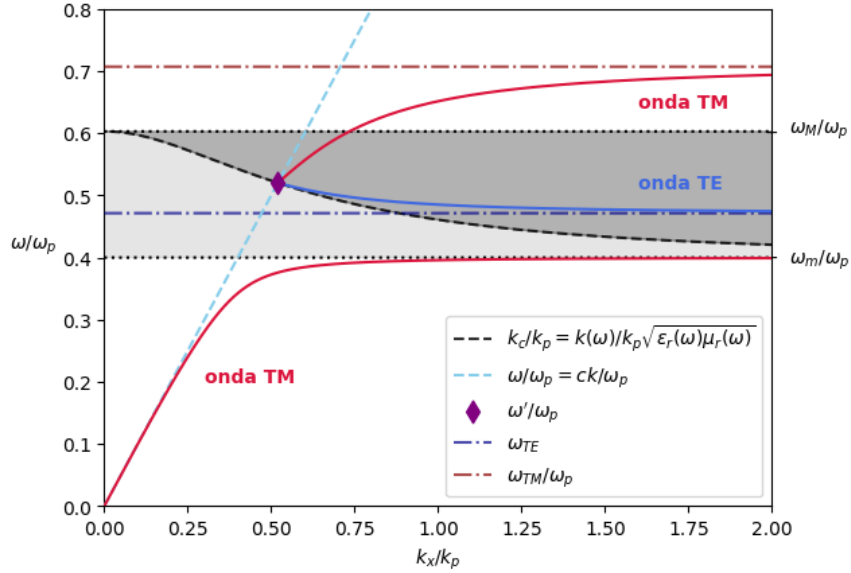
Figura 22: Ilustração da onda eletromagnética e da densidade de cargas superficiais na interface entre o dielétrico e o metamaterial.



Na Figura (23), foram unidas as informações apresentadas nas Figuras (17) e (21). Nesse contexto, é possível observar o *SPP* associado à polarização *TE*. Importante notar que tal fenômeno era previamente inacessível na configuração dielétrico-metal, devido à invariabilidade da permeabilidade magnética do metal em relação à frequência. Consequentemente, a referida permeabilidade não poderia transitar entre sinais opostos e satisfazer a condição  $\mu_1 + \mu_2 = 0$ .

Adicionalmente, a representação da polarização *TM* é delineada, revelando a presença de dois *SPPs*. O primeiro emerge devido à divergência de  $\mu_2(\omega)$  quando  $\omega = \omega_m$ . O segundo ocorre quando  $\omega$  atinge o valor para o qual a equação  $\epsilon_1 + \epsilon_2(\omega_{TM}) = 0$  é satisfeita, notadamente quando  $\omega = \omega_{TM} = \omega_p/\sqrt{2}$ .

Figura 23: Relação de dispersão de ambas as polarizações consideradas.



## 7.2 Situação com perda

A fim de ter uma representação melhor da realidade, vamos introduzir um termo de perda nas respostas elétricas e magnéticas, sendo assim, temos para a permissividade elétrica:

$$\epsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_e)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_e}, \quad (117)$$

e para a permeabilidade magnética:

$$\mu_2(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2 + i\gamma_m\omega}. \quad (118)$$

Antes de prosseguirmos, para descrevermos quantitativamente a dispersão e es-

tudarmos os *SPPs* das polarizações *TE* e *TM*, será útil separar a parte real e a parte imaginária de  $\epsilon_2(\omega) = \epsilon_r(\omega) + i\epsilon_i(\omega)$  e de  $\mu_2(\omega) = \mu_r(\omega) + i\mu_i(\omega)$ . Dito isso, vamos começar por  $\epsilon_2(\omega)$ :

$$\begin{aligned}
\epsilon_2(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_e} \frac{(\omega^2 - i\omega\gamma_e)}{(\omega^2 - i\omega\gamma_e)}, \\
\epsilon_2(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^4 + \omega^2\gamma_e^2} (\omega^2 - i\omega\gamma_e), \\
\epsilon_2(\omega) &= 1 - \frac{\omega^2\omega_p^2}{\omega^4 + \omega^2\gamma_e^2} + \frac{i\omega\gamma_e\omega_p^2}{\omega^4 + \omega^2\gamma_e^2}, \\
\epsilon_2(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_e^2} + \frac{i\gamma_e\omega_p^2}{\omega^3 + \omega\gamma_e^2}, \\
\epsilon_2(\omega) &= \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_e^2}\right) + i \left(\frac{\gamma_e\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma_e^2)}\right). \tag{119}
\end{aligned}$$

Podemos escrever  $\epsilon_2(\omega)$  da seguinte forma:

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon_r + i\epsilon_i, \tag{120}$$

temos então a parte real de  $\epsilon_2$  dada por:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_e^2}, \tag{121}$$

e a parte imaginária associada à dissipação de energia do campo eletromagnético no metamaterial é:

$$\epsilon_i(\omega) = i \frac{\gamma_e\omega_p^2}{\omega(\omega^2 + \gamma_e^2)}. \tag{122}$$

Agora, vamos fazer o mesmo procedimento para a permeabilidade magnética do metamaterial, dito isso, partindo da equação (118), temos:

$$\begin{aligned}
\mu_2(\omega) &= 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2 + i\gamma_m\omega} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_m^2 - i\gamma_m\omega)}{(\omega^2 - \omega_m^2 - i\gamma_m\omega)}, \\
\mu_2(\omega) &= 1 + \frac{-F\omega^4 + F\omega^2\omega_m^2 + iF\omega^3\gamma_m}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2}, \\
\mu_2(\omega) &= \left(1 + \frac{F(\omega^2\omega_m^2 - \omega^4)}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2}\right) + i \left(\frac{F\omega^3\gamma_m}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2}\right). \tag{123}
\end{aligned}$$

Podemos escrever  $\mu_2(\omega)$  da seguinte forma:

$$\mu_2(\omega) = \mu_r + i\mu_i, \quad (124)$$

temos então a parte real de  $\mu_2$  dada por:

$$\mu_r = 1 + \frac{F(\omega^2\omega_m^2 - \omega^4)}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2} \quad (125)$$

e a parte imaginária:

$$\mu_i = \frac{F\omega^3\gamma_m}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2}. \quad (126)$$

Note que se fazermos  $\gamma_e = \gamma_m = 0$  tanto  $\epsilon_r$  quanto  $\mu_r$  são reduzidos a  $\epsilon_2$  e  $\mu_2$  que representam as respostas eletromagnéticas para o caso do metamaterial ideal Equações (102) e (103). É importante notar que vamos considerar os casos em que  $\epsilon_r \gg \epsilon_i$  e  $\mu_r \gg \mu_i$ , que caracteriza às ondas *SPPs*. Para o caso em que  $\epsilon_i \gg \epsilon_r$  e  $\mu_i \gg \mu_r$  corresponde ao caso das ondas de Zenneck [40], [37], caso esse que não abordaremos nesse trabalho.

Agora podemos estudar a dispersão para cada uma das polarizações. Primeiro, vamos começar pela polarização *TE*, substituindo os valores das equações (121) e (125) na equação (108) podemos acompanhar a dispersão  $k_x(\omega)$ . Primeiro, vamos analisar quando  $\mu_r < 0$ , dessa condição notamos que  $\omega$  deve estar no intervalo  $(\omega_m, \omega_M)$ , onde:

$$\omega_M = \sqrt{\frac{\gamma_m^2 - (F - 2) + \sqrt{((F - 2) - \gamma_m^2)^2 + 4(F - 1)\omega_m^4}}{2(1 - F)}}. \quad (127)$$

Além de  $\omega_M$ , devemos encontrar a frequência em que o *SPP* ocorre para a polarização *TE*. Novamente, essa é a frequência na qual a equação (111) é satisfeita:

$$\mu_1 + \mu_r(\omega_{TE}) = 0, \quad (128)$$

sendo assim, substituindo os valores de  $\mu_1$  e  $\mu_r$  na equação acima, temos:

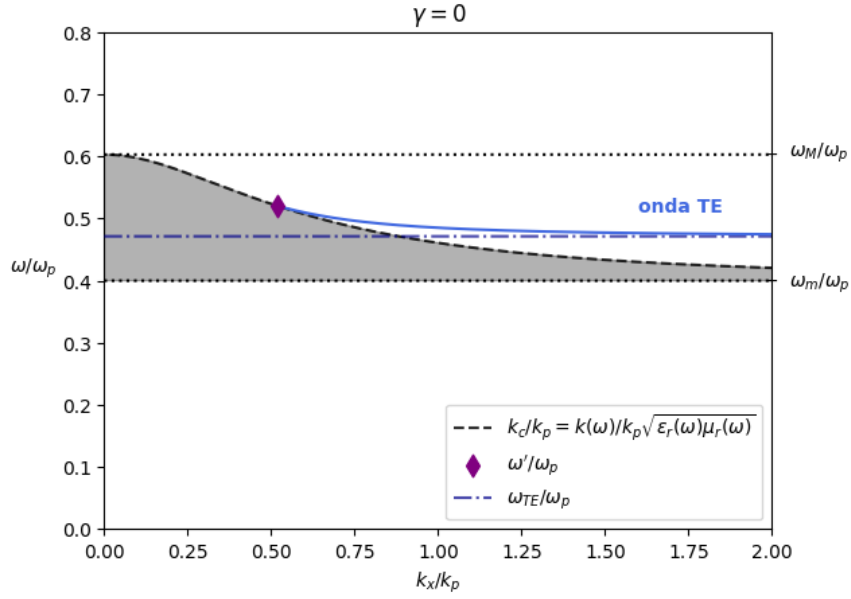
$$2 + \frac{F(\omega^2\omega_m^2 - \omega^4)}{(\omega^2 - \omega_m^2)^2 + \gamma_m^2\omega^2} = 0, \quad (129)$$

a equação (129) nos dar uma equação polinomial de grau 4, mas podemos resolve-la pois ela pode ser reduzida a uma equação polinomial de grau 2, sendo assim, ao solucionarmos a equação, encontramos uma única raiz que tem sentido físico, ela é dada por:

$$\omega_{TE} = \sqrt{\frac{-2\gamma_m^2 - (F-4)\omega_m^2 + \sqrt{((F-4)\omega_m^2 + \gamma_m^2)^2 + 8(F-2)\omega_m^4}}{2(2-F)}}. \quad (130)$$

Na figura (24), ilustramos a relação de dispersão, assim como o limite da frequência para que  $\mu_r < 0$ , ou seja,  $\omega_m < \omega < \omega_M$ . Também foi ilustrado a frequência exata onde o (SPP) ocorre nessa configuração.

Figura 24: Polarização *TE*: relação de dispersão para  $\gamma = 0$



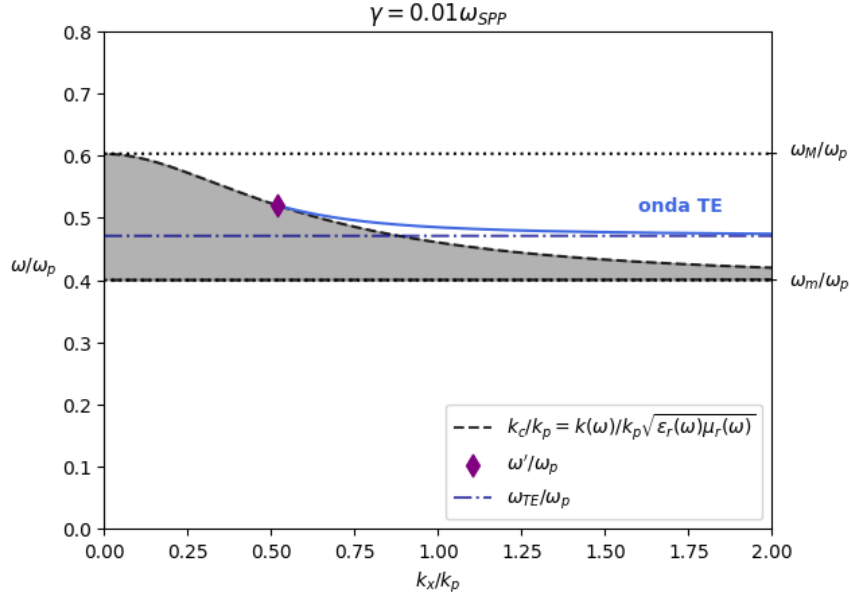
O nosso resultado corrobora com o resultado obtido nas referências [36], [38].

Note que o limite para  $k_c$  (equação (105)) é influenciado por  $\epsilon_r$  e  $\mu_r$ :

$$k_c/k_p = \frac{k(\omega)}{k_p} \sqrt{\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}. \quad (131)$$

Podemos notar a influência de  $\epsilon_r$  e  $\mu_r$  na equação (108). Ambos serão influenciados por  $\gamma_e$  e  $\gamma_m$ , mas, devido ao valor de preenchimento  $F = 0.56$ ,  $\gamma_e$  terá uma maior influência. Portanto, para um determinado valor de  $\gamma_m$ , poderemos reproduzir a mesma fenomenologia com  $a\gamma_e$ , onde  $a \in R$ , os valores de  $a$  e  $b$  dependerão exclusivamente das características de construção e composição do metamaterial. Sendo assim, com o intuito de simplificar nossa análise, vamos considerar  $\gamma = \gamma_e = \gamma_m = b\omega_{SPP}$ , onde  $b \in R$  e  $\omega_{SPP} = \omega_p/\sqrt{2}$ . Portanto, para  $\gamma = 0.01\omega_{SPP}$ , temos:

Figura 25: Polarização *TE*: relação de dispersão para  $\gamma = 0.01\omega_{SPP}$



É possível observar que  $k_x$  da polarização *TE* permaneceu praticamente inalterado. No entanto, o parâmetro que começou a variar e que se tornará significativo mais adiante para analisar a dispersão na polarização *TM* é nossa condição  $k_c$ . Antes de explorarmos isso em detalhes, vamos examinar algumas figuras adicionais para diferentes valores de  $\gamma$ .

Figura 26: Polarização *TE*: relação de dispersão para  $\gamma = 0.02\omega_{SPP}$

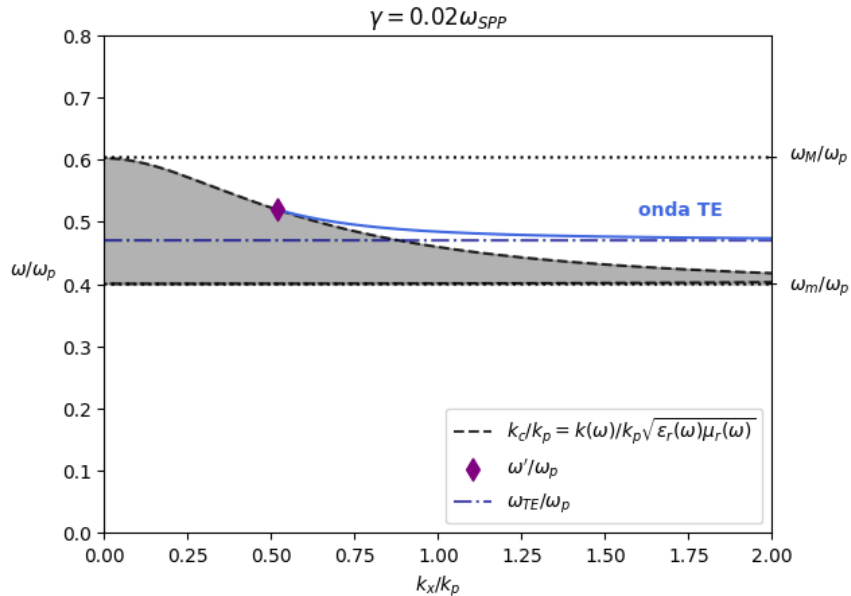




Figura 27: Polarização  $TE$ : relação de dispersão para  $\gamma = 0.05\omega_{SPP}$

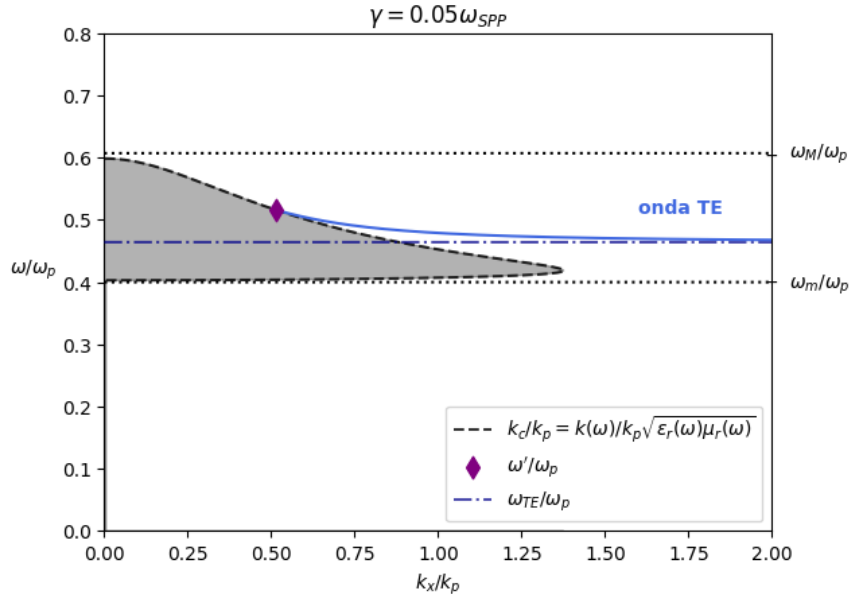
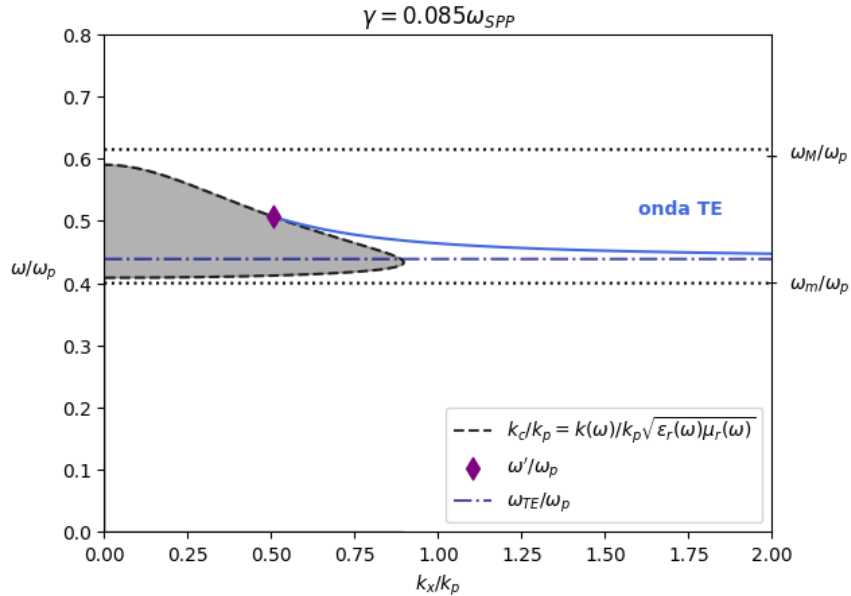
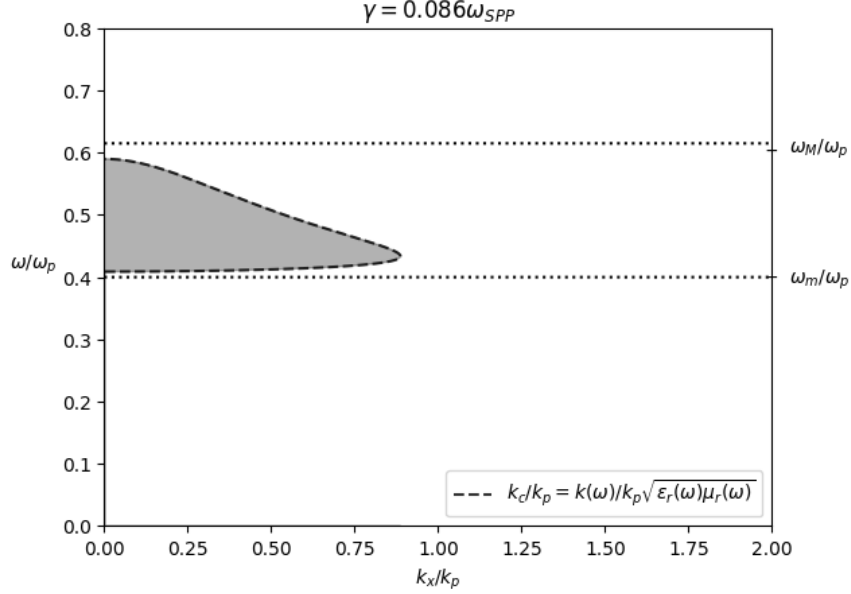


Figura 28: Polarização  $TE$ : relação de dispersão para  $\gamma = 0.085\omega_{SPP}$



Na Figura (28), torna-se evidente que  $k_x$  está passando por uma mudança significativa em seu comportamento. Agora, existem duas frequências  $\omega$  que resultam no mesmo  $k_x$ . A implicação desse fenômeno se tornará mais clara ao estudarmos a polarização  $TM$ . Além disso, esse foi o valor máximo (considerando a quarta casa decimal) para o coeficiente  $b$  de  $\gamma = b \cdot \omega_{SPP}$ . Se aumentarmos mais uma unidade, a configuração torna-se incapaz de sustentar o  $SPP$ , como ilustrado na Figura (28).

Figura 29: Polarização  $TE$ : relação de dispersão para  $\gamma = 0.086\omega_{SPP}$



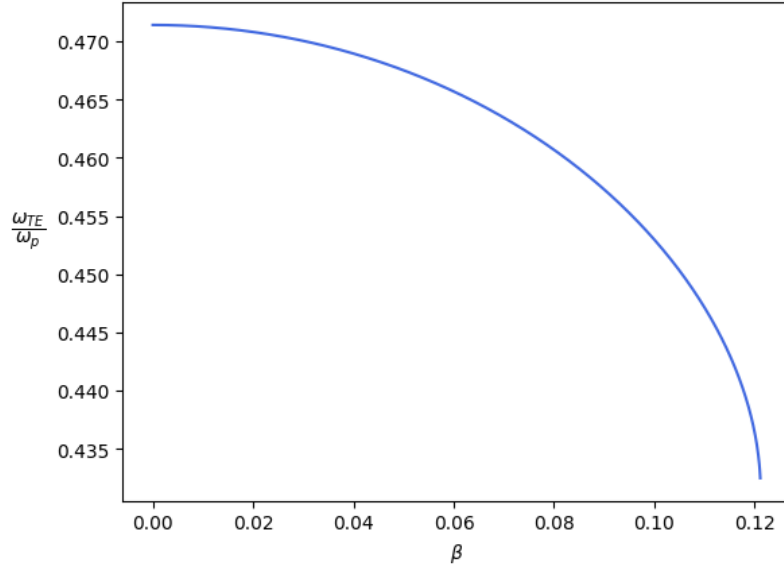
Devido à dissipação de energia no acoplamento da luz com a densidade de cargas, a configuração não consegue sustentar o  $SPP$ . Isso ocorre especialmente quando o ângulo de incidência atinge o ângulo crítico, onde a energia é dissipada devido aos termos  $\gamma_e$  e  $\gamma_m$  presentes nas respostas eletromagnéticas  $\epsilon_e$  e  $\mu_e$ .

Podemos analisar como a frequência em que o  $SPP$  da polarização  $TE$  ( $\omega_{TE}$ ) depende de  $\gamma$ , para isso vamos utilizar a mesma metodologia para variar o  $\gamma$  nas figuras anteriores, vamos considerar que  $\gamma = \beta\omega_{SPP}$ , onde  $\beta \in [0, 1]$ . Substituindo  $\gamma_2 = \beta\omega_{SPP}$  na equação (130), temos:

$$\omega_{TE} = \sqrt{\frac{-2(\beta\omega_{SPP})^2 - (F - 4)\omega_m^2 + \sqrt{((F - 4)\omega_m^2 + (\beta\omega_{SPP})^2)^2 + 8(F - 2)\omega_m^4}}{2(2 - F)}}. \quad (132)$$

Na figura (30), ilustra o gráfico da equação (132), nele podemos ver o intervalo de em que  $\omega_{TE}$  pode variar em função de  $\gamma(\beta)$ .

Figura 30: Frequência do *SPP TE* ( $\omega_{TE}(\beta)$ ) em função do parâmetro  $\beta$



Para a polarização *TM*, vimos que existem dois *SPPs*. O primeiro ocorre devido à divergência da permeabilidade magnética do metamaterial, enquanto o segundo é resultado da troca de sinal da permissividade elétrica do metamaterial em relação à permissividade elétrica do dielétrico. Dito isso, vamos partir da equação (121) e substituir na condição de mudança de sinal. Assim, encontraremos  $\omega_{TM}$  e poderemos determinar a frequência onde ele ocorre. Dito isso:

$$\epsilon_1 + \epsilon_r(\omega_{TM}) = 0, \quad (133)$$

sendo assim, substituindo os valores de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_r$  na equação acima, temos:

$$2 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{TM}^2 + \gamma_e^2} = 0, \quad (134)$$

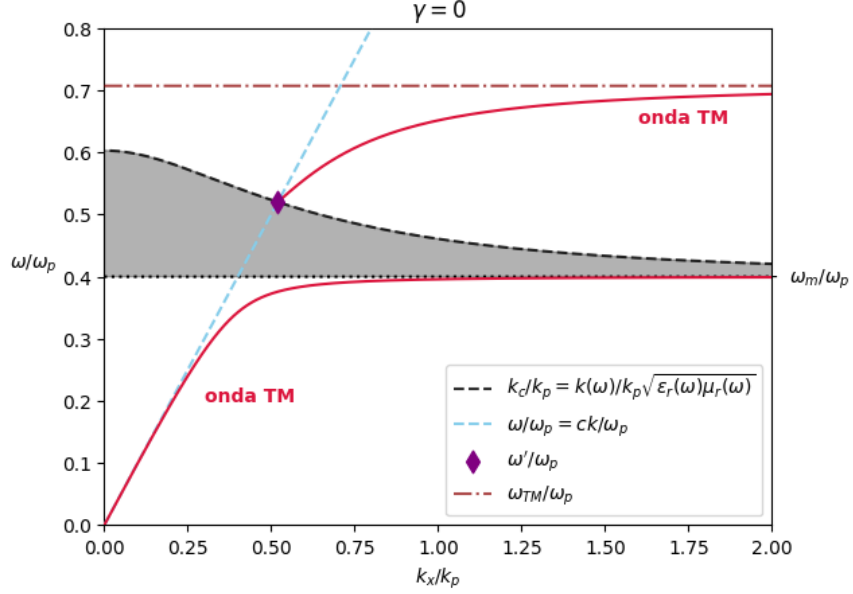
isolando  $\omega$  obtemos:

$$\omega_{TM} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2} - \gamma_e^2} = \sqrt{\omega_{SPP}^2 - \gamma_e^2}. \quad (135)$$

O nosso  $\omega'$ , que é a frequência mais alta que ambas as condições  $k_x > \frac{\omega}{c}$  e  $k_x^2 > \epsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2}$  são satisfeitas dada pela (109), foi obtido via cálculo computacional utilizando o algoritmo *fsolve* do módulo *optimize* da biblioteca *scipy*. Sendo assim, vamos partir para a relação de dispersão, substituindo as equações (121) e (125) na (107), podemos obter sua relação de dispersão. Como já era previsto, para  $\gamma = 0$ , temos a

mesma situação da figura (20), corroborando assim com os resultados das referências [36], [38].

Figura 31: Polarização *TM*: relação de dispersão para  $\gamma = 0$ .



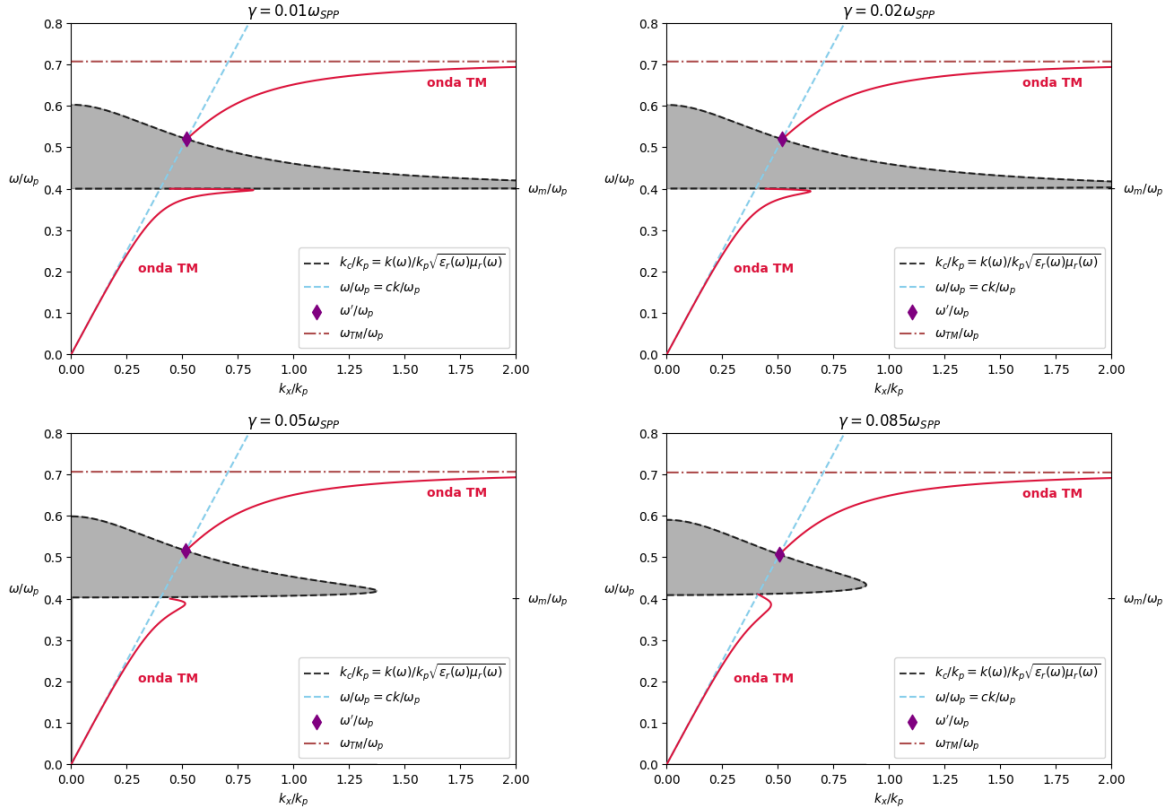
Onde a dispersão de  $k_c$  é dada pela relação de comparação (105), onde  $k_x$  deve ser maior que  $k_c$  para que a relação seja obedecida, basicamente  $k_c$  rege o início da segunda parte da onda *TM*. O nosso resultado corrobora com o resultado obtido na referência [38].

Agora, é importante notar que  $k_c$  é dado por:

$$k_c = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)}. \quad (136)$$

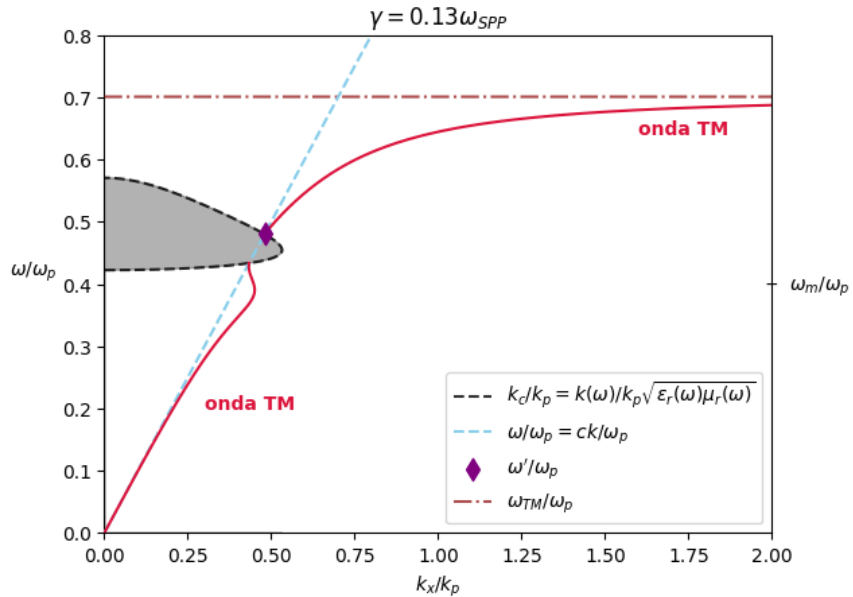
Como  $k_c$  depende de  $\epsilon_r(\omega)$  e  $\mu_r(\omega)$ , ele será sensível ao alterarmos  $\gamma$  também. A partir daí podemos fazê-lo "recuar" em relação a  $k_x$  o que proporcionará alguns efeitos intrigantes, dito isso, vamos ilustrar quatro situações diferentes com  $\gamma = 0.01\omega_{SPP}$ ,  $0.02\omega_{SPP}$ ,  $0.05\omega_{SPP}$ ,  $0.085\omega_{SPP}$ , temos:

Figura 32: Polarização  $TM$ : relação de dispersão para diferentes valores de  $\gamma$ .



Como podemos ver, conforme aumentamos o valor de  $\gamma$ , a condição  $k_p$  vai recuando. Ilustrando a relação de dispersão para  $\gamma = 0.13\omega_{SPP}$ , temos:

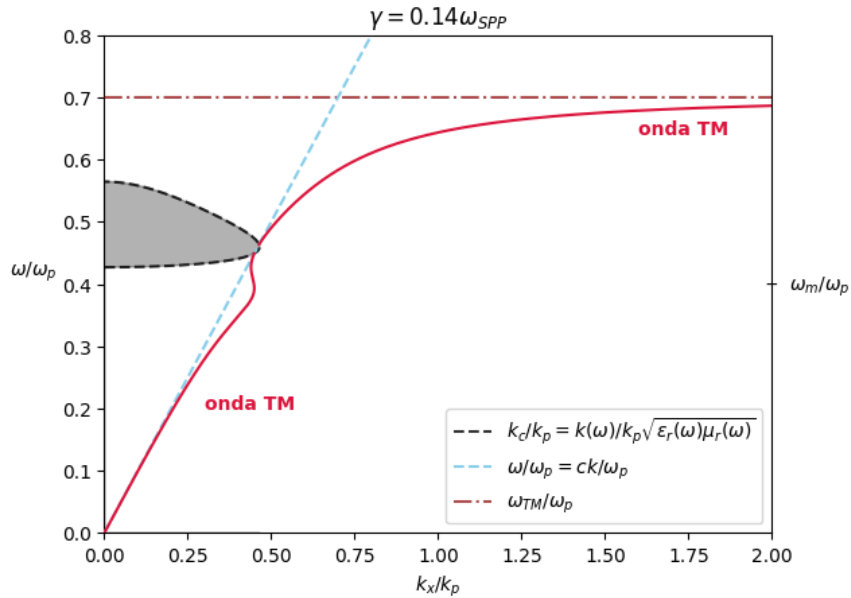
Figura 33: Polarização  $TM$ : relação de dispersão para  $\gamma = 0.13\omega_{SPP}$ .



Conforme demonstrado na figura 33, ao aumentarmos ainda mais o valor de  $\gamma$ , a condição  $k_c$  recua progressivamente. Isso sugere que podemos aumentar ainda mais o

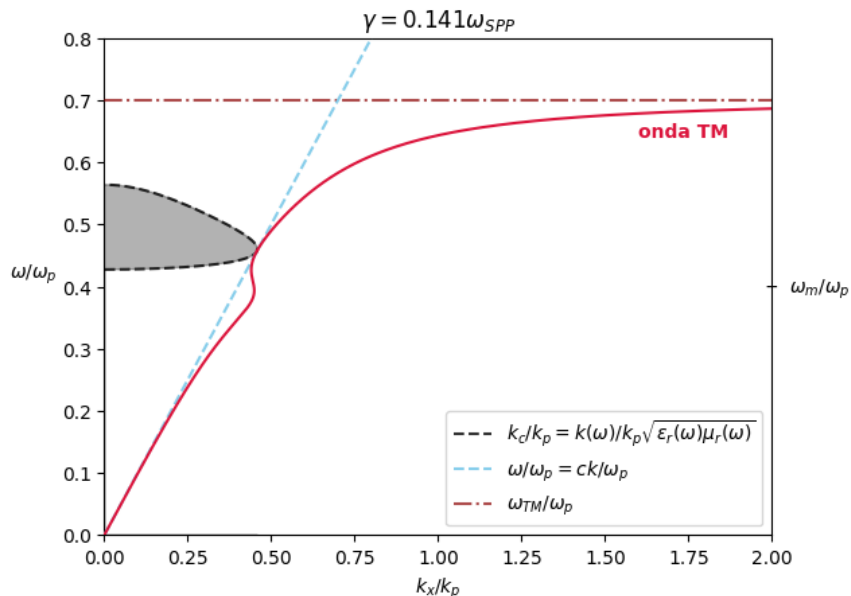
valor de  $\gamma$  e permitir que a onda *TM* permaneça contínua nesse ponto. Dito isso, para  $\gamma = 0.14$ , temos a seguinte situação:

Figura 34: Polarização *TM*: relação de dispersão para  $\gamma = 0.14\omega_{SPP}$ .



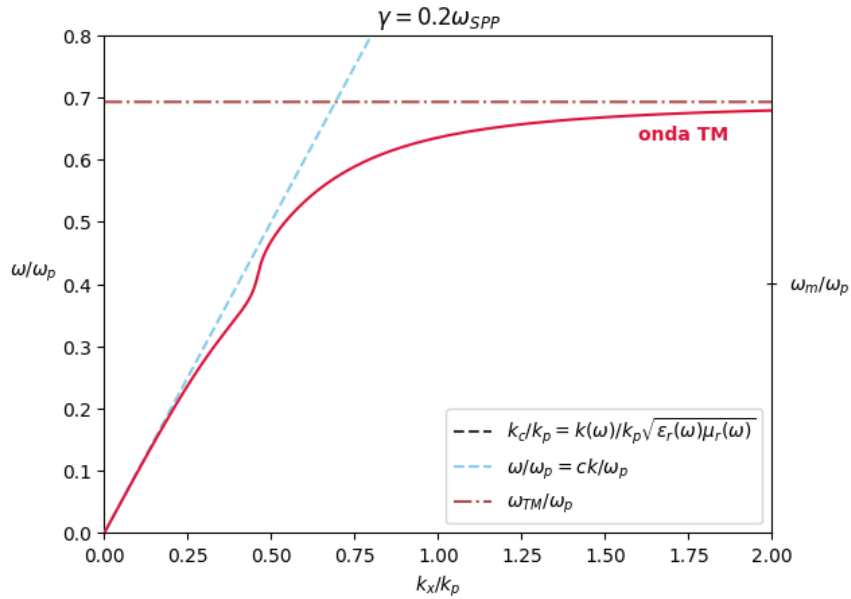
Na figura (34), foi apresentada a relação de dispersão para  $\gamma = 0.14\omega_{SPP}$ . O termo  $\omega'$  foi omitido do gráfico para facilitar a visualização do ponto de encontro entre a parte superior e inferior da onda referente à polarização *TM*. Essas duas partes ainda não se encontraram devido à condição  $k_c$ , que ainda não retrocedeu o suficiente. Considerando  $\gamma = 0.141\omega_{SPP}$ , temos:

Figura 35: Polarização *TM*: relação de dispersão para  $\gamma = 0.141\omega_{SPP}$ .



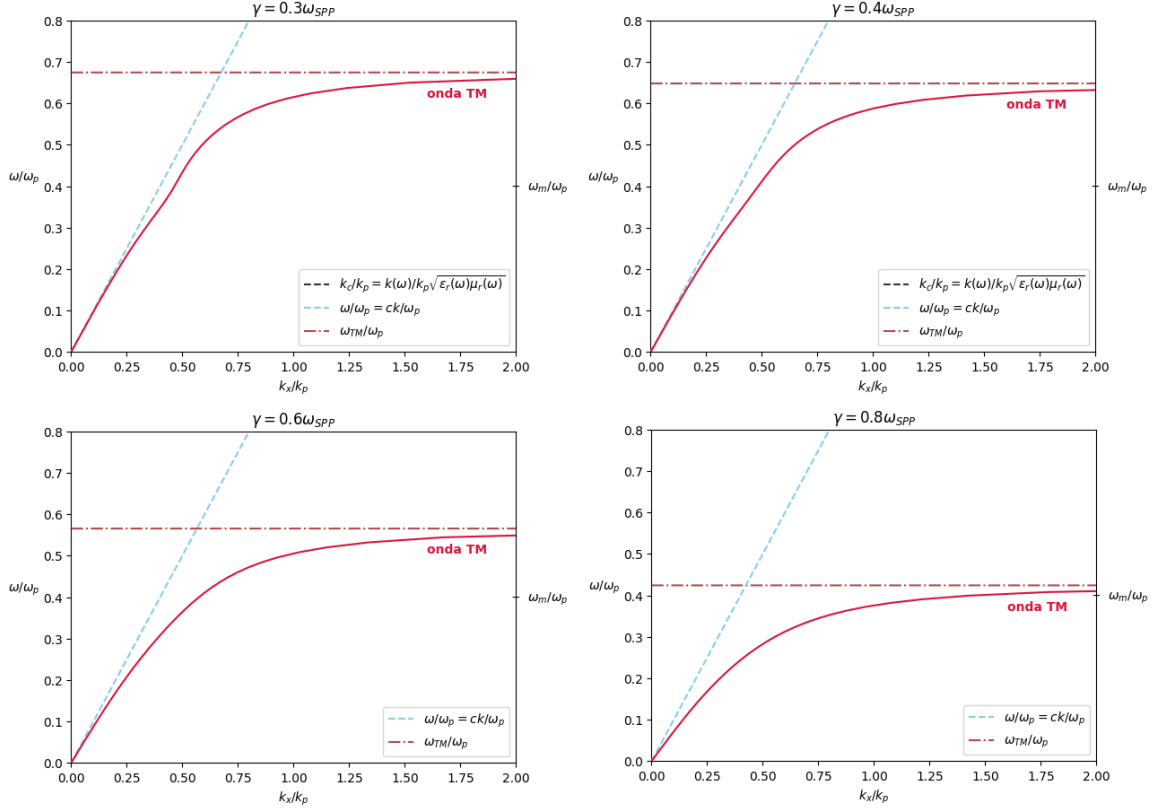
Na figura (35), para  $\gamma = 0.141\omega_{SPP}$ , podemos observar que finalmente conseguimos retroceder a condição  $k_c$  o suficiente para que a onda se torne contínua nesse ponto de encontro. Esse efeito caracteriza a ausência do primeiro *SPP* e demonstra que ao adicionarmos um valor significativo para  $\gamma$ , conseguimos obter um único *SPP* em uma única onda contínua (dentro da região de interesse). Abaixo segue a dispersão para valores ainda maiores de  $\gamma$ .

Figura 36: Polarização *TM*: relação de dispersão para  $\gamma = 0.2\omega_{SPP}$ .



Na figura (36), podemos ver que  $k_c$  já não precisa ser considerado dentro da região de interesse, pois não exerce influência direta no nosso sistema. Na figura (37), ilustramos mais algumas situações onde  $\gamma = 0.3\omega_{SPP}$ ,  $\gamma = 0.4\omega_{SPP}$ ,  $\gamma = 0.6\omega_{SPP}$  e  $\gamma = 0.8\omega_{SPP}$ , note que a frequência  $\omega_{SPP}$  decai conforme  $\gamma$  aumenta.

Figura 37: Polarização *TM*: relação de dispersão para diferentes valores de  $\gamma$ .



Como vimos anteriormente, ao alterarmos o valor de  $\gamma$ , modificamos o comportamento de  $k_x$  e, conseqüentemente, a quantidade de *SPPs* e onde ele ocorre. Conforme observado nas figuras anteriores, a frequência que caracteriza o *SPP* remanescente é a frequência  $\omega_{TM}$ , conforme definida pela equação (135). A partir da equação (135), podemos isolar  $\omega_{TM}$  em função de  $\gamma$  e analisar seu comportamento por meio de um gráfico. Temos, então:

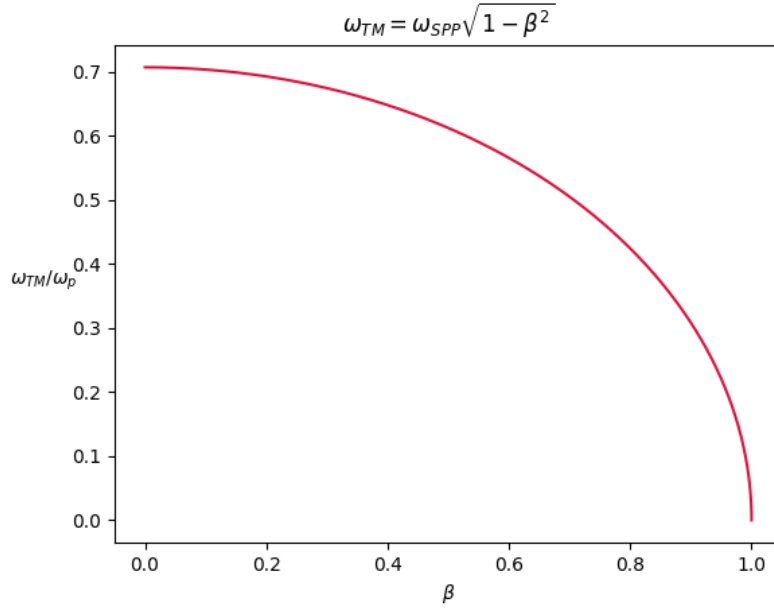
$$\omega_{TM} = \sqrt{\omega_{SPP}^2 - \gamma^2}, \quad (137)$$

considerando a mesma metodologia para  $\gamma$  onde  $\gamma = \beta\omega_{SPP}$ , onde  $\beta \in [0, 1]$ . Temos:

$$\omega_{TM} = \omega_{SPP}\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (138)$$



Figura 38: Frequência do *SPP TM* ( $\omega_{TM}(\beta)$ ) em função do parâmetro  $\beta$



Na figura (38), podemos observar com mais clareza o comportamento de  $\omega_{TM}$ . Para  $\beta = 0$ , temos o caso padrão em que  $\omega_{TM} = \omega_{SPP} = \omega_p/\sqrt{2}$ , representando o mesmo *SPP* observado na configuração dielétrico-metal. Conforme aumentamos o valor de  $\beta$ , podemos reduzir esse valor progressivamente até atingir o ponto mínimo, em que  $\omega_{TM} = 0$ . Além disso, observe que o intervalo que  $\omega_{TM}$  pode percorrer à medida que  $\gamma(\beta)$  varia é consideravelmente maior do que o intervalo de  $\omega_{TE}$ . Isso implica em uma maior flexibilidade no manuseio de  $\omega_{TM}$  para alcançar nossos objetivos. No entanto, é importante ressaltar que isso depende das características físicas reais do metamaterial e das técnicas de engenharia moderna para construir o metamaterial com o nível de perda desejado para atingir os objetivos almejados.

## 8 Conclusões e Perspectivas

Como vimos neste trabalho, introduzimos o conceito de metamaterial e exploramos o comportamento ondulatório da luz por meio das equações de Maxwell. A partir desse conceito, foi possível descrever a teoria por trás da fenomenologia das ondas de superfície. Observamos que na configuração metal-dielétrico é possível sustentar uma onda de superfície, mas para isso, ela precisa atender a certas exigências, acoplando a luz às oscilações de densidade de cargas, formando assim o *Surface Plasmon Polariton (SPP)*. Essas exigências residem no fato de a permissividade elétrica do metal mudar de sinal e ser igual em módulo.

A partir daí, exploramos a configuração dielétrico-metamaterial e, embora haja algumas semelhanças entre as duas configurações, notamos que essa configuração específica apresenta diferenças significativas. Primeiramente, como a permeabilidade magnética do metamaterial depende da frequência, podemos fazer com que ela seja igual em módulo e oposta em sinal à permeabilidade magnética do dielétrico, originando um *SPP* para a polarização do tipo *TE*, o que era inédito até então. Quanto à polarização *TM*, observamos que a onda é interrompida, originando outro *SPP* devido à divergência da permeabilidade magnética do metamaterial, totalizando dois *SPPs*.

Além disso, examinamos o comportamento de ambas as polarizações ao introduzirmos perdas tanto na permeabilidade magnética quanto na permissividade elétrica. Verificamos que, dependendo do nível do fator de perda, tanto o *SPP* da polarização *TE* quanto o da polarização *TM* podem não ser sustentados (para a polarização *TM*, apenas o primeiro *SPP* pode não ser sustentado). Observamos também que ao alterarmos o fator de perda, podemos mudar a frequência em que o *SPP* ocorre, o que é de grande importância.

Essas características são extremamente importantes e podem influenciar o funcionamento de diversos dispositivos ópticos. Os *SPPs*, em particular, são utilizados em vários dispositivos sensoriais que exploram as ondas de superfície para detectar variações ópticas de diversos tipos, inclusive dispositivos ultra sensíveis utilizando acoplamento forte entre *SPP* e ressonâncias de plasmon magnéticas [35]. Ao induzirmos a não sustentação de alguns tipos específicos de *SPPs* ou a variação da frequência em que o *SPP* ocorre, podemos controlar a sensibilidade desses dispositivos a determinadas frequências, o que é essencial para atingir nossos objetivos, tudo isso com base no controle do fator de perda.

## REFERÊNCIAS

- [1] VESELAGO, V. G. The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . Soviet Physics Uspekhi, v. 10, n. 4, p. 509-514, 1967.
- [2] VESELAGO, V. G. Electrodynamics of Materials with Negative Index of Refraction. Uspekhi Fizicheskikh Nauk, v. 45, n. 4, p. 406-407, 2003.
- [3] VASELAGO, V., NARIMANOV, E. The left hand of brightness: past, present and future of negative index materials. Nature Mater 5, 759–762 (2006).
- [4] SMITH, D. R.; PADILLA, W. J.; VIER, D. C.; NEMAT-NASSER, S. C.; SCHULTZ, S. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity. Applied Physics Letters, v. 84, n. 18, p. 4184-4187, 2000.
- [5] PENDRY, J. B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. Phys. Rev. Lett., v. 85, n. 18, p. 3966-3969, out. 2000.
- [6] PENDRY, J. B.; HOLDEN, A. J.; ROBBINS, D. J.; STEWART, W. J. Low Frequency Plasmons in Thin-Wire Structures. Journal of Physics: Condensed Matter, v. 10, n. 22, p. 4785-4809, 1998.
- [7] PENDRY, J. B.; HOLDEN, A. J.; ROBBINS, D. J.; STEWART, W. J. Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, v. 47, n. 11, p. 2075-2084, 1999.
- [8] PENDRY, J. B.; SCHURIG, D.; SMITH, D. R. Controlling Electromagnetic Fields. Science, v. 312, n. 5781, p. 1780-1782, 2006.
- [9] SCHURIG, D.; MOCK, J. J.; JUSTICE, B. J.; CUMMER, S. A.; PENDRY, J. B.; STARR, A. F.; SMITH, D. R. Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies. Science, v. 314, n. 5801, p. 977-980, 2006.
- [10] SHALAEV, V. M.; BOLTASSEVA, A. Scalability Issues in Metamaterials and Plasmonics: From Science to Technology. Optical Materials Express, v. 1, n. 1, p. 3-11, 2011.
- [11] PINES, David; BOHM, David. A Collective Description of Electron Interactions: II. Collective vs Individual Particle Aspects of the Interactions. Physical Review, v. 85, p. 338, jan. 1952.
- [12] PINES, David. Collective Energy Losses in Solids. Rev. Mod. Phys., v. 28, p. 184, jul. 1956.

- [13] TONKS, L. Oscillations in Ionized Gases. In: SUITS, C. Guy (Ed.). Plasma and Oscillations. Pergamon, 1961. p. 122-139. ISBN: 978-1-4831-9913-9.
- [14] Ritchie, R. H. "Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films." Physical Review, v. 106, p. 874-881, 1957.
- [15] POWELL, C. J.; SWAN, J. B. Origin of the Characteristic Electron Energy Losses in Aluminum. Phys. Rev., v. 115, n. 4, p. 869-875, ago. 1959.
- [16] STERN, E. A.; FERRELL, R. A. Surface Plasma Oscillations of a Degenerate Electron Gas. Phys. Rev., v. 120, n. 1, p. 130-136, out. 1960.
- [17] Raether, H. Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings. Berlin: Springer, 1988.
- [18] MAIER, S. A. et al. Plasmonics—A Route to Nanoscale Optical Devices. Advanced Materials, Weinheim, v. 13, n. 19, p. 1501-1505, 2001.
- [19] Anker, J., Hall, W., Lyandres, O. et al. Biosensing with plasmonic nanosensors. Nature Mater 7, 442–453 (2008).
- [20] LOVAT, V.; VALICENTE, F. H.; CAVALCANTI, G. P.; et al. Plasmonic Nanos-structure Design for Efficient Light Coupling into Solar Cells. \*Nano Letters\*, v. 12, n. 7, p. 4007-4011, 2012..
- [21] DRUDE, P. Zur Elektronentheorie der Metalle. Annalen der Physik, v. 306, n. 3, p. 566-613, 1900.
- [22] DRUDE, P. Zur Optik der Metalle. Annalen der Physik, v. 316, n. 3, p. 566-613, 1904.
- [23] GRIFFITHS, David J. Introduction to Electrodynamics. 4th Edition. Pearson, 2013.
- [24] ASHCROFT, Neil W; MERMIN, N. David. Solid State Physics. 1st Edition. Saunders College Publishing, 1976
- [25] WARTAK, Marek S. Computational Photonics: An Introduction with MATLAB. 1st Edition. Cambridge University Press, 2013.
- [26] Victor Ya. PRINZ, Electromagnetic “Magic” of Supermaterials. NEWS OF SCIENCE, 2012. Disponível em: <https://scfh.ru/en/papers/electromagnetic-magic-of-supermaterials/>. Acesso em: 01/11/2021.

- [27] PENDRY, J. B. et al. Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 25, p. 4773-4776, jun. 1996. American Physical Society. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.4773.
- [28] Liu, Y., Zhang, X. (2011). *Metamaterials: a new frontier of science and technology*. Chemical Society Reviews, 40(5), 2494-2507. The Royal Society of Chemistry.
- [29] Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., & Stewart, W. J. (1999). Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*.
- [30] Reyes-Gómez, E., Cavalcanti, S.B., Oliveira, L.E. (2013). Signature of bulk longitudinal plasmon-polaritons in the transmission/reflection spectra of one-dimensional metamaterial heterostructures. *Superlattices and Microstructures*, 64, 590-600.
- [31] RITCHIE, R. H. Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films. *Physical Review*, v. 106, n. 4, p. 874, jun. 1957.
- [32] Ebbesen, T. W.; Lezec, H. J.; Ghaemi, H. F.; Thio, T.; Wolff, P. A. (1998). Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature*, 391(6668), 667-669.
- [33] Raether, H. (1988). *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [34] ZHANG, Junxi; ZHANG, Lide; XU, Wei. Surface plasmon polaritons: physics and applications. *Journal of Physics D: Applied Physics*, [S.l.], v. 45, n. 11, p. 113001, feb. 2012.
- [35] Ji, Y., Tang, C., Xie, N., Chen, J., Gu, P., Peng, C., Liu, B. (2019). High-performance metamaterial sensors based on strong coupling between surface plasmon polaritons and magnetic plasmon resonances. *Results in Physics*, 14, 102397.
- [36] Markoš, P., Soukoulis, C. M. *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials (STU - Student edition)*. Princeton University Press, 2008.
- [37] Igor I. Smolyaninov, "Surface electromagnetic waves in lossy conductive media: tutorial," *J. Opt. Soc. Am. B* 39, 1894-1901 (2022)
- [38] RUPPIN, R. Surface polaritons of a left-handed medium. *Physics Letters A*, v. 277, n. 1, p. 61-64, 2000.

- [39] Podolskiy, V. A., Alekseyev, L. V., Narimanov, E. E. (2005). Strongly anisotropic media: the THz perspectives of left-handed materials. *Journal of Modern Optics*, 52(16), 2343–2349.
- [40] ZENNECK, J. Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie. *Annalen der Physik*, [S.l.], v. 328, n. 10, p. 846-866, 1907.