

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÍCARO RODOLFO SOARES COELHO DA PAZ

**Análise de dados intracranianos em humanos: utilizando metodologia simbólica para
caracterizar diferentes processos cognitivos**

Maceió-AL

Dezembro de 2024

ÍCARO RODOLFO SOARES COELHO DA PAZ

Análise de dados intracranianos em humanos: utilizando metodologia simbólica para caracterizar diferentes processos cognitivos

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof^ª. Dra. Fernanda Selingardi Matias

Coorientador: Prof. Dr. Osvaldo Anibal Rosso

Maceió-AL

Dezembro de 2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

A162c Paz, Ícaro Rodolfo Soares Coelho da.

Análise de dados intracranianos em humanos: utilizando metodologia simbólica para caracterizar diferentes processos cognitivos / Ícaro Rodolfo Soares Coelho da Paz. – 2024.

74 f. : il.

Orientadora: Fernanda Selingardi Matias.

Co-orientador: Osvaldo Anibal Rosso.

Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 59-62.

Apêndices: f. 63-74.

1. Neurociência computacional. 2. Teoria da informação. 3. Entropia-complexidade. 4. Eletrocorticografia. 5. Análise de dados. 6. Análise simbólica. 7. Análise de séries temporais. 7. Simbolização de Bandt-Pompe. 8. Sistemas complexos. I. Título.

CDU: 519.246.8



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423

ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO PÓS-GRADUANDO ICARO RODOLFO SOARES COELHO DA PAZ, REALIZADA NO DIA DEZOITO DE DEZEMBRO DE DOIS MIL E VINTE E QUATRO.

Aos dezoito dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e quatro, às nove horas, em sessão pública remota, o professor Italo Marcos Nunes de Oliveira, na qualidade de Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física, instalou os trabalhos para defesa de tese de doutorado do Pós-Graduando **Icaro Rodolfo Soares Coelho da Paz**. O Coordenador apresentou a Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores: Fernanda Selingardi Matias, como presidente da banca examinadora e orientadora, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Maria Socorro Seixas Pereira, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; André de Lima Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Letícia Ribeiro de Paiva, da Universidade Federal de São João Del-Rey; e Caroline Garcia Forlim, do *Max Planck Institute of Human Development*; e como suplentes: Denise Valente dos Santos, da Universidade de Pernambuco; e Sérgio Henrique Albuquerque Lira, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas. Em seguida, a presidente da banca convocou o candidato a expor seu trabalho de tese, intitulado: “**Análise de dados intracranianos em humanos: utilizando metodologia simbólica para caracterizar diferentes processos cognitivos**”. Após a exposição do candidato, teve início a arguição por parte da banca examinadora. A presidente da banca examinadora, após solicitar perguntas ou comentários do público presente, suspendeu os trabalhos para que fosse realizado o julgamento. A banca examinadora decidiu **aprovar o candidato com conceito “B”**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, da qual eu, Raíssa Cavalcante Pinto, secretária do Programa de Pós-Graduação em Física, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e que depois de lida e aprovada, será assinada pela presidente da banca examinadora e demais membros, pelo candidato e por testemunhas que quiserem. Maceió, dezoito de dezembro de dois mil e vinte e quatro.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por iluminar meus caminhos e me dar forças para seguir em frente.

À minha mãe, Quitéria Soares de Oliveira, minha eterna inspiração, sou grato por cada ensinamento, cada gesto de carinho e, sobretudo, por me mostrar que a persistência é a chave para transformar sonhos em realidade. Seu apoio incondicional foi e sempre será meu alicerce.

À minha esposa, Denise Kelly, que esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, suportando minhas inquietações e oferecendo sempre o seu amor e compreensão. Seu apoio foi essencial para que eu chegasse até aqui, e sou imensamente grato por compartilhar essa jornada contigo.

Em memória da minha avó, Margarida Soares de Oliveira, que esteve sempre presente nos momentos desafiadores, trazendo força e conforto para mim e minha mãe. E em memória da minha avó, Cláudia Maria Coelho da Paz Lima, um exemplo de dedicação à família e dona das melhores conversas. Sua partida precoce deixou saudades imensuráveis, mas seu sorriso e sua alegria permanecerão vivos em minhas memórias.

Aos meus avôs, Severino Ribeiro e Euclides Ferreira, que, com sua sabedoria e conselhos, me ensinaram que o conhecimento é a chave para vencer na vida. Ao meu tio, Euclides Júnior, que me mostrou que o bem mais valioso que possuímos é o conhecimento, pois ninguém jamais poderá nos tirar.

Em memória do meu tio, Edmilson Soares, um exemplo de força, alegria e persistência. Sua luta foi árdua, mas sua coragem nunca vacilou. Partiu, mas deixou em nós um legado de resiliência e um amor que jamais se apagará.

Minha profunda gratidão à minha orientadora, Fernanda Selingardi Matias, por sua paciência, dedicação e por ser um exemplo inspirador de profissionalismo e generosidade. Sua capacidade de realizar tantas coisas de forma excepcional fez com que eu a admirasse ainda mais ao longo do tempo. Ao meu coorientador, Osvaldo Anibal Rosso, por sua valiosa contribuição nesta jornada acadêmica.

Aos meus amigos, Júlio Nunes, Katiele Valéria, Leandro Carlos, Pâmela Santos, Laís Santos, Fabiana Carvalho, Fabrício, Iago, Lucas, Cida, Rodrigo e Everton Brito, sou imensamente grato. A amizade de vocês foi um refúgio nos momentos difíceis e uma fonte inesgotável de alegria nos momentos bons. Como dizem, amigos são a família que escolhemos, e eu me sinto abençoado por ter vocês ao meu lado.

Aos professores que foram e sempre serão uma fonte de inspiração para mim: prof. André de Lima Moura, Fábio Marcel Zanetti e Socorro Seixas. O conhecimento e a paixão pelo ensino que vocês transmitiram deixaram marcas profundas em minha trajetória.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho de

pesquisa.

E, por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui. Cada gesto, cada palavra de incentivo e cada momento compartilhado fazem parte dessa conquista.

Muito obrigado!

RESUMO

Compreender como o cérebro processa informações, percebe o mundo e cria modelos para agir sobre ele é um dos principais objetivos da neurociência. Para responder a essa questão, são analisadas séries temporais corticais durante diferentes processos cognitivos, caracterizando as propriedades estatísticas dos sinais cerebrais. Neste estudo, foram analisados dados intracranianos de eletrocorticografia (ECoG) dos potenciais de superfície cerebral em cinco seres humanos durante uma tarefa de busca visual à luz dos quantificadores da teoria da informação. A metodologia de simbolização Bandt-Pompe foi empregada para associar uma função de distribuição de probabilidade a cada série temporal, calculando entropia e complexidade em diferentes escalas de tempo. Os resultados demonstram que diferentes tipos de tarefas visuais podem ser separadas no plano entropia-complexidade multiescala. Isso significa que os quantificadores da teoria da informação podem ser uma ferramenta útil para distinguir os sinais cerebrais em regiões específicas do cérebro. Além disso, usando a abordagem multiescala e incorporando atrasos de tempo para modificar a taxa de amostragem dos dados, foi possível estimar as escalas de tempo mais importantes para o processamento das informações relativas a cada tarefa cognitiva.

Palavras-chaves: neurociência computacional; teoria da informação; entropia-complexidade; eletrocorticografia; análise de dados; análise simbólica; simbolização de Bandt-Pompe; sistemas complexos.

ABSTRACT

Understanding how the brain processes information, perceives the world, and creates models to act upon it is one of the main goals of neuroscience. To address this question, we analyze intracranial electrocorticography (ECoG) data from five human subjects performing a visual search task, using information theory quantifiers. The Bandt-Pompe symbolization methodology is employed to associate a probability distribution function with each time series, allowing the computation of entropy and complexity at different time scales. Our results show that different types of visual tasks can be distinguished in the multiscale entropy-complexity plane, suggesting that information theory quantifiers can serve as a valuable tool to differentiate brain signals in specific cortical regions. Moreover, by applying a multiscale approach and incorporating time delays to modify the data sampling rate, we estimate the most relevant time scales for processing information associated with each cognitive task.

Keywords: computational neuroscience; information theory; entropy-complexity; electrocorticography; data analysis; symbolic analysis; Bandt-Pompe symbolization; complex systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – (a) Todos os canais de repouso de K^+ podem ser dispostos na membrana neuronal como um circuito equivalente constituído de uma bateria em série com um condutor. (b) Pode-se representar cada grupo de canais de Na^+ , K^+ e Cl^- por uma bateria associada ao respectivo grupo de canais, conectada em série com um condutor.	14
Figura 2 – Representação do circuito elétrico equivalente à membrana do neurônio. . .	15
Figura 3 – Complexidade estatística em função da entropia para $D = 3, 4, 5, 6$	22
Figura 4 – (a) Símbolos de mapeamento de permutação RANK e (b) mapeamento de permutação cronológica para $D = 3$. Posto em ordem cronológica de valores de $\vec{\pi}^D$	30
Figura 5 – Símbolos π_i das permutações de padrões ordinários de comprimento $D = 3$, seguindo metodologia BP-PDF e ordem lexicográfica de Lehmer.	35
Figura 6 – (a) Símbolos π_i das permutações para $D=3$, (b) série temporal simples, ρ , (c) obtenção da PDF a partir de uma abordagem simbólica.	36
Figura 7 – Processo de obtenção da PDF por meio da metodologia Bandt & Pompe. Após aplicar $\tau = 50$ a série original 7a, obtemos a série 7b, construímos os símbolos π_i e chegamos ao histogramas 7d que mostra a probabilidade de encontrarmos cada um dos $D!$ símbolos ao longo da série temporal construídos com D elementos.	38
Figura 8 – Localização dos eletrodos no cérebro do macaco. Córtex motor primário (canal 1), córtex primário somatosensorial (canal 2) e áreas parietal posterior (3 e 4).	39
Figura 9 – Diferenças específicas de resposta obtidas por meio de quantificadores da teoria da informação para o canal 2. (a) e (b) Entropia em função de τ e (c) e (d) Complexidade em função de τ . Para $\tau \approx 10$ é possível notar uma maior diferença entre as condições Go e No-Go tanto na entropia como na complexidade.	40
Figura 10 – Plano complexidade-entropia para a janela temporal W_i com maior separação entre cada condição de cada canal. Em cinza os valores de H e C na janela inicial W_1 usada de base em que não diferença entre os tipos de trial.	41
Figura 11 – Ilustração da técnica de eletrocorticografia ECoG.	42
Figura 12 – Localização dos 67 eletrodos implantados nos 5 pacientes (MILLER et al., 2010).	43
Figura 13 – Representação esquemática do desenvolvimento da atividade realizada pelos pacientes.	44

Figura 14 – I) Divisão das janelas temporais com atividade, W_{iA} , e sem atividade, W_{iB} , ambos com intervalo $\Delta t = 2000$ ms. II) Reorganização das janelas W_{iA} e W_{iB} subdividindo o intervalo Δt em n intervalos $\Delta t'$ iguais sem superposição.	45
Figura 15 – Paradigma experimental. (a) Ilustração da tela ao longo do experimento: 2000 ms de períodos de espera observando uma tela branca (chamada de "blank") alternados com 2000 ms de uma tarefa visual de busca ativa(chamada de "search"). (b) Séries temporais da atividade registrada de um eletrodo exemplar (JT3) em uma área occipital durante a tarefa. Em cinza as séries correspondem às duas telas brancas e em vermelho as séries correspondem aos dois períodos de busca ativa mostrados em (a).	46
Figura 16 – Quantificadores da teoria da informação para caracterizar diferentes tarefas cognitivas: período de espera durante os trials de tela branca (<i>blank</i> em preto) e durante os trials de de busca visual (busca ativa, <i>search</i> em vermelho). (a) Entropia H e (b) Complexidade estatística C como função do tempo de atraso de incorporação τ . (c) Distância Euclidiana $d_{blank,search}$ no plano $C \times H$ entre as duas tarefas (veja Eq. 4.1). (d) Plano complexidade-entropia destacando $\tau = 6$ ms, que maximiza a distância para este eletrodo exemplar.	47
Figura 17 – Identificar quais canais e escalas de tempo podem distinguir melhor as duas tarefas cognitivas: tela em branco e tarefa de busca visual. Mapa de calor que representa a distância $d_{blank,search}$ no plano complexidade-entropia entre dois tipos de teste para todos os 67 eletrodos no eixo y e atrasos de tempo τ até 30 ms no eixo x.	48
Figura 18 – distância em função de τ para cada canal dos pacientes (a) JM, (b) JT e (c) RN em quatro intervalos de tempo nao sobrepostos: 0-500ms, 500-1000ms, 1000-1500ms e 1500-2000ms.	50
Figura 19 – Mapa de cores para a distância $d_{blank,search}$ para todos os 67 canais no eixo x e diferentes escalas de tempo τ no eixo y. Os índices foram calculados em janelas não sobrepostas de 200ms: (a) 0 – 200 ms, (b) 200 – 400 ms (c) 400 – 600 ms e (d) 600 – 800 ms.	51
Figura 20 – Mapa de calor indicando a distância Euclideana $d_{blank,search}$ entre as duas tarefas cognitivas ao longo de 10 diferentes janelas de tempo durante os 2 segundos de duração dos trials e em várias escalas de tempo τ . Mostramos três canais espacialmente adjacentes do mesmo paciente: (a) JT2, (b) JT3 e (c) JT4.	52

Figura 21 – Diferenças entre as duas tarefas cognitivas ao longo de diferentes janelas de tempo do teste de 2 segundos e em várias escalas de tempo. Mapa de calor representando a distância $d_{\text{blank, search}}$ no plano $C \times H$ entre os <i>trials</i> de tela branca e de busca ativa para 8 canais ilustrativos de diferentes pacientes. No eixo vertical, mostramos o tempo de incorporação τ e, no eixo horizontal, o curso temporal dos <i>trials</i> de 2 segundos. Os cálculos foram feitos em janelas deslizantes de 200ms a cada 10ms.	52
Figura 22 – Caracterizando a complexidade e a entropia para ambas as condições no plano $C \times H$ em dois momentos diferentes dos testes: de 0 a 200 ms e de 500 ms a 700 ms. (a)-(h) O plano de complexidade-entropia para os 8 canais ilustrativos mostrados na Fig. 21.	54
Figura 23 – Caracterizando diferentes tipos de atividade dos canais para $\tau = 6$, ms. (a) Localização de todos os 67 canais de cinco sujeitos (separados por cores) em um mapa cerebral padrão. Pontos maiores indicam comportamento similar ao canal JT3. (b) Complexidade C_{search} e C_{blank} e (c) distância $d_{\text{blank, search}}$ para todos os canais do paciente JT. (d)-(h) Assimetria da complexidade $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ para todos os locais de cada paciente. Os canais podem ser separados em três grupos: valores positivos de assimetria, valores negativos ou valores próximos de zero durante a maior parte do experimento. Um eletrodo ilustrativo para cada paciente está destacado.	55
Figura 24 – Buscando identificar diferenças entre os trials da busca ativa de acordo com a direção da seta. (a) Entropia e (b) Complexidade em função de τ para as quatro possíveis condições: seta para cima, para baixo, direita e esquerda. (c) Plano complexidade entropia.	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Sistemas dinâmicos e a neurociência	11
1.2	Modelando o neurônio como um sistema dinâmico	11
2	METODOLOGIA	18
2.1	Teoria da Informação Causal	18
2.1.1	Entropia de Shannon	19
2.1.2	Complexidade Estatística	20
2.1.3	Plano de Informação Causal	22
2.2	Método de simbolização de Bandt & Pompe	23
2.2.1	Mapeamento de Permutação	26
2.2.1.1	Mapeamento de Permutação por classificação	27
2.2.1.2	Mapeamento de permutação cronológico	28
2.2.2	Ordem lexicográfica de Lehmer.	30
2.2.2.1	Índice de Lehmer	31
2.2.2.2	Exemplos de Cálculo do Índice de Lehmer	31
2.3	Exemplo da aplicação da metodologia em dados cerebrais	38
3	DADOS ELETROFISIOLOGICOS	42
3.1	Dados intracranianos em humanos	42
3.2	Descrição da tarefa visual	43
3.3	Estrutura dos dados	44
4	RESULTADOS	46
4.1	Calculando entropia e complexidade dos dados intracranianos para di- ferenciar duas tarefas visuais	46
4.2	Subdividindo cada trial em janelas temporais menores que 2s	49
4.3	Subdividindo cada trial em janelas deslizantes com sobreposição	51
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	58
	REFERÊNCIAS	60
6	APÊNDICES	64
6.1	Apêndice A - Artigo publicado	64

1 INTRODUÇÃO

1.1 Sistemas dinâmicos e a neurociência

Uma das principais células que constituem o cérebro é o neurônios. A comunicação entre essas células ocorre por meio da variação do potencial elétrico, que é causada pelo desequilíbrio iônico entre o meio intracelular e o extracelular (BREAKSPEAR; STAM, 2005). Além disso, os neurônios também se comunicam por meio das sinapses. Essa interação complexa, que evolui ao longo do tempo, permite que o cérebro seja estudado como um sistema dinâmico. A abordagem de sistemas dinâmicos fornece ferramentas poderosas para modelar e analisar a evolução temporal de sistemas complexos, como o cérebro. Além disso, essa área da física desempenha um papel fundamental no entendimento de uma ampla gama de fenômenos naturais e artificiais.

Um sistema dinâmico é um conceito central em matemática aplicada e física que estuda a evolução de um sistema ao longo do tempo. Ele consiste em um conjunto de regras ou equações que descrevem como as variáveis do sistema mudam em função do tempo. Os sistemas dinâmicos podem ser encontrados em diversas áreas, desde a mecânica clássica até a biologia, economia e engenharia. Eles são amplamente utilizados para modelar fenômenos complexos e entender seu comportamento ao longo do tempo (MONTEIRO, 2002) .

Podemos caracterizar um sistema dinâmico por seu estado inicial e uma equação ou conjunto de equações que descrevem como o estado evolui com o tempo. Essas equações podem ser diferenciais ou mesmo equações estocásticas, dependendo do sistema em estudo. O que se busca em sistemas dinâmicos é analisar as propriedades e comportamentos ao longo do tempo. Isso inclui o estudo de pontos de equilíbrio, órbitas periódicas, comportamento caótico, estabilidade e bifurcações, entre outros conceitos. O estudo de sistemas dinâmicos é realizado mediante análises por meio de métodos analíticos e numéricos. Isso envolve técnicas matemáticas avançadas, como análise de estabilidade, cálculo variacional, teoria ergódica e sistemas dinâmicos simbólicos (RUFFINO, 2012; VILLATE, 2005; LUCAS et al., 2021a).

A neurociência computacional é uma área interdisciplinar que busca entender o funcionamento do cérebro por meio de modelos matemáticos e computacionais. Os sistemas dinâmicos desempenham um papel fundamental nessa abordagem, permitindo a modelagem e análise de atividades neurais complexas.

1.2 Modelando o neurônio como um sistema dinâmico

O sistema nervoso central é formado fundamentalmente por dois tipos de células: neurônios e células gliais. Os neurônios exibem comportamento dinâmico em resposta a estímulos e interações com outros neurônios. A membrana celular do neurônio possui uma nuvem fina de

íons positivos e negativos, respectivamente na superfície externa e interna. A separação entre as cargas provoca o surgimento de uma diferença de potencial elétrico, conhecido como potencial de membrana, V_m . O potencial na membrana celular, V_m , devido à diferença de potencial entre o meio interno, V_i , e externo, V_e , pode ser descrito como:

$$V_m = V_i - V_e. \quad (1.1)$$

Quando o neurônio está livre de estímulos, a membrana está sob o potencial de repouso, V_r . Na literatura, esse potencial está entre 0 e -70 mV. Por convenção, o potencial externo (V_e) é adotado como sendo 0 mV. Assim, a equação do potencial de membrana em repouso se reduz a:

$$V_r = V_i - 0 \Rightarrow V_r = V_i.$$

Desse modo, conclui-se que o potencial de repouso (V_r) é igual ao potencial interno (V_i), assumindo valores típicos entre -60 mV e -70 mV (KANDEL et al., 2014).

Além do potencial de repouso, os neurônios podem exibir potenciais de ação (V_a), que são alterações rápidas no potencial de membrana em resposta a estímulos. O potencial de membrana, durante o potencial de ação, pode atingir picos de disparo entre +10 mV e +30 mV. Esses picos são de curta duração, geralmente entre 1 e 2 ms, mas essenciais para a transmissão de sinais elétricos ao longo do neurônio (KANDEL et al., 2014).

Visto que existe uma diferença de potencial na membrana celular, que a torna positiva do lado externo e negativa do lado interno, um íon \mathbf{K}^+ no interior da célula será submetido a uma força de difusão. Essa força surge devido ao gradiente de concentração do íon \mathbf{K}^+ , que tende a empurrá-lo para fora da célula, onde a concentração é menor. Ao mesmo tempo, a diferença de potencial elétrico se opõe a esse fluxo de \mathbf{K}^+ , pois a carga positiva do íon é repelida pelo ambiente externo, também positivo. Dessa forma, o íon está submetido a duas forças: uma força química, que depende do gradiente de concentração (motriz química), e uma força elétrica (motriz elétrica), que depende da diferença de potencial através da membrana. Quando essas forças estão em equilíbrio, ou seja, quando a força de difusão é igual a força elétrica, o fluxo líquido do íon \mathbf{K}^+ se torna zero. Nesse ponto, existe um potencial associado, o dito potencial de equilíbrio (E_x). O valor desse potencial pode ser calculado mediante a equação de Nernst, que relaciona o gradiente de concentração do íon e a diferença de potencial elétrico através da membrana. A equação de Nernst é dada por:

$$E_x = \frac{RT}{ZF} \ln \left(\frac{[x^+]_e}{[x^+]_i} \right), \quad (1.2)$$

onde R é a constante universal dos gases, T é a temperatura dada em Kelvin, Z a valência do íon, F a constante de Faraday e $[x^+]_i$ e $[x^+]_e$ são as concentrações iônicas no interior e exterior da célula, respectivamente (KANDEL et al., 2014).

É importante destacar que sempre haverá íons fluindo pela membrana celular, apesar das concentrações iônicas serem mantidas com **gasto de energia** pelas bombas de sódio e potássio. Ou seja, as concentrações dentro e fora da célula são mantidas pelas bombas de sódio e potássio com a utilização de energia (KANDEL et al., 2014).

Como a membrana celular age como um isolante separando cargas de sinais opostos, é possível associar o sistema a um capacitor. Relacionando, desse modo, um potencial elétrico V , uma capacitância de membrana C e Q que é o excedente de cargas (positivas ou negativas) nos extremos da membrana (KANDEL et al., 2014; KOCH, 2004). Podendo escrever então

$$V_m = \frac{Q}{C}, \quad (1.3)$$

isolando Q e derivando ambos os lados da igualdade em relação ao tempo, temos que

$$C \frac{dV_m}{dt} = \frac{dQ}{dt},$$

como $\frac{dQ}{dt} = I_C$, tem-se

$$I_C = C \frac{dV_m}{dt}. \quad (1.4)$$

É importante salientar que I_C é a corrente gerada por todos os íons que atravessam a membrana. Tendo em mente que a corrente I_C é produzida por vários íons diferentes e adotando os de interesse como sendo sódio (Na^+) e potássio (K^+), consegue-se expressar $I_C = I_{Na} + I_K + I_v$. Dessa forma,

$$I_{Na} + I_K + I_v = C \frac{dV_m}{dt} \quad (1.5)$$

onde I_v é a corrente de vazamento produzida pelos demais íons que não foram tomados como principais.

Observe que assim como foi considerado que a membrana pode ser associada a um capacitor, os canais iônicos da membrana celular também podem ser considerados como os elementos de um circuito elétrico formado por uma série de resistores com resistência r_x cada e uma bateria de força eletromotriz determinada pelo potencial de equilíbrio E_X , sendo $X = Na^+, K^+$, entre outros íons.

É de interesse saber o quão fácil é para o canal conduzir a corrente, por isso, será usado o conceito de condutância γ_X , onde

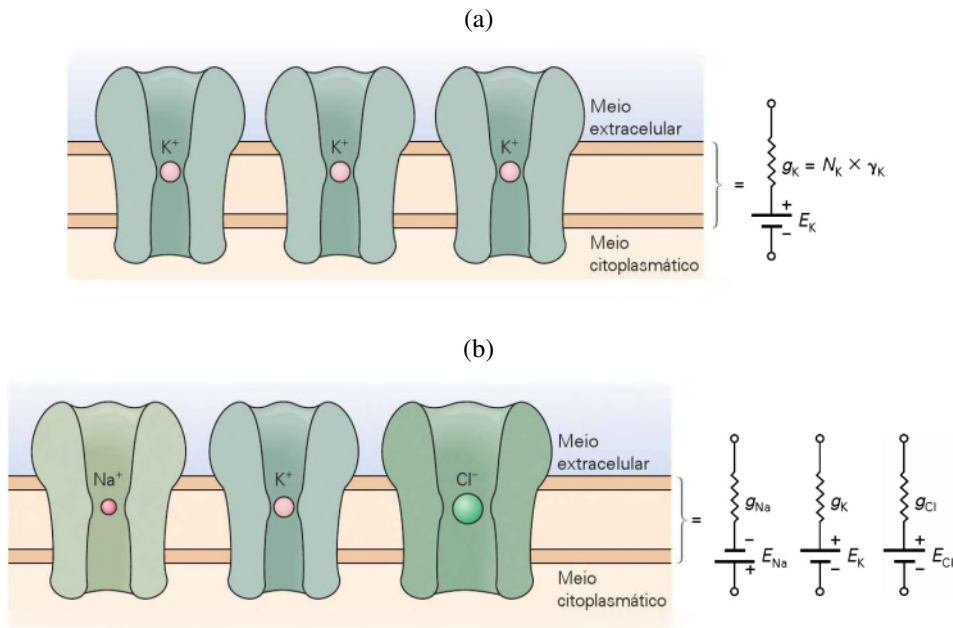
$$\gamma_X = \frac{1}{r_X}.$$

Devido ao grande número de canais permeáveis ao mesmo íon na superfície da célula, vamos escrever a condutância associada a todos esses canais como g_X . Sendo então

$$g_X = \gamma_X N_X.$$

Lembrando que γ_X é a condutância de um único canal relacionado ao íon X e N_X é o número desses canais (KANDEL et al., 2014). Observe que na figura 1b existe um canal de íons de Cl^- de condutância g_{Cl} , essa contribuição e outras podem ser incluídas em nosso modelo em uma condutância de vazamento dada por g_v .

Figura 1 – (a) Todos os canais de repouso de K^+ podem ser dispostos na membrana neuronal como um circuito equivalente constituído de uma bateria em série com um condutor. (b) Pode-se representar cada grupo de canais de Na^+ , K^+ e Cl^- por uma bateria associada ao respectivo grupo de canais, conectada em série com um condutor.



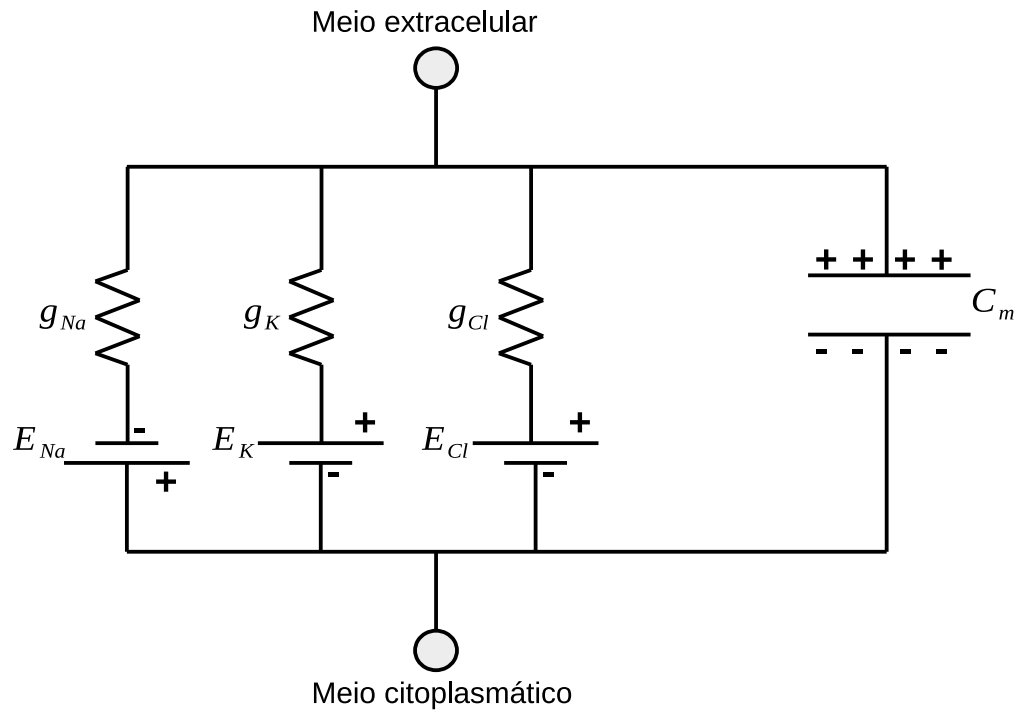
Fonte: Adaptado de (KANDEL et al., 2014)

É possível dizer que o neurônio possui três propriedades elétricas importantes para sinalização elétrica: a condutância da membrana em repouso (g_r) — que também pode ser expressa em termos de resistência, $g_r = \frac{1}{R_r}$ —, a capacitância da membrana (C_m) e, por fim, a resistência axial intracelular (r_a), que corresponde à resistência encontrada pela corrente elétrica ao fluir através do citoplasma do axônio.

Essas características permitem construir um circuito elétrico que representa uma membrana neuronal equivalente, como pode ser visto na figura 2, onde é ilustrado o circuito elétrico equivalente que modela o comportamento da membrana neuronal. Nesse circuito, a condutância da membrana em repouso é representada pelo símbolo de um resistor, que reflete a permeabilidade da membrana aos íons de Na^+ , K^+ e Cl^- que dependem da voltagem e são responsáveis pelos eventos dinâmicos de despolarização e repolarização durante o potencial de ação. A capacitância da membrana é representada por um capacitor, que modela a capacidade da membrana de armazenar carga elétrica em resposta a alterações no potencial elétrico. Por

simplificação, é considerada uma condutância constante relacionada a íons menores e canais passivos, sendo atribuída uma condutância variável aos canais permeáveis a sódio e potássio por esses dependerem da voltagem.

Figura 2 – Representação do circuito elétrico equivalente à membrana do neurônio.



Fonte: Adaptado de (KANDEL et al., 2014)

Através de equações diferenciais, os sistemas dinâmicos podem descrever a atividade neuronal e as interações sinápticas entre os neurônios. Modelos de sistemas dinâmicos são capazes de capturar a dinâmica temporal das redes neurais e simular a evolução dos estados neuronais ao longo do tempo (ERMENTROUT; TERMAN, 2010).

Um exemplo notável é o modelo de neurônio de Hodgkin-Huxley, que descreve a dinâmica elétrica dos neurônios e suas correntes iônicas. Esse modelo utiliza um conjunto de equações diferenciais para descrever como a voltagem do neurônio muda em resposta a estímulos elétricos e químicos. O modelo de circuito descrito anteriormente foi utilizado para descrever matematicamente a atividade elétrica do neurônio gigante de uma lula (KOCH, 2004) (Prêmio Nobel de Fisiologia ou Medicina em 1963). Quatro equações diferenciais descrevem o modelo que utiliza o potencial de membrana V_m do neurônio e as correntes iônicas que atravessam a membrana celular.

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = g_{Na} m^3 h (E_{Na} - V_m) + g_k n^4 (E_k - V_m) + g_m (V_r - V_m) + I + \sum I_{sin} \quad (1.6)$$

$$\frac{dn}{dt} = a_n(1 - n) - b_n n \quad (1.7)$$

$$\frac{dm}{dt} = a_m(1 - m) - b_m m \quad (1.8)$$

$$\frac{dh}{dt} = a_h(1 - h) - b_h h \quad (1.9)$$

Sendo m , n e h associados a valores de variáveis adimensionais de abertura e fechamento dos canais iônicos (KOCH, 2004). $C_m = 9 \mu F$ é a capacitância da membrana, considerando um recorte de membrana com área $30 \times 30 \times \pi \mu m^2$, conforme descrito em (MATIAS et al., 2011), I é a corrente externa que o neurônio recebe, I_{sin} é a corrente advinda dos acoplamentos sinápticos com outros neurônios (KOCH, 2004). Os valores de condutâncias máximas são conhecidos $g_{Na} = 1080\pi$ mS, $g_k = 324\pi$ mS, $g_m = 2,7\pi$ mS. Os potenciais de reversão são $E_{Na} = 115$ mV, $E_k = -12$ mV e o potencial de repouso $V_r = 10,6$ mV, desse modo, tem-se

$$a_n = \frac{10 - V_m}{100 \left[e^{\left(\frac{10 - V_m}{10} \right)} - 1 \right]} \quad (1.10)$$

$$b_n = 0,125 e^{\left(\frac{-V_m}{80} \right)} \quad (1.11)$$

$$a_m = \frac{25 - V_m}{10 \left[e^{\left(\frac{25 - V_m}{10} \right)} - 1 \right]} \quad (1.12)$$

$$b_m = 4e^{\left(\frac{-V_m}{18}\right)} \quad (1.13)$$

$$a_h = 0,07e^{\left(\frac{-V_m}{20}\right)} \quad (1.14)$$

$$b_h = \frac{1}{e^{\left(\frac{30-V_m}{10}\right)} + 1} \quad (1.15)$$

É importante salientar que, no presente modelo, o potencial de repouso é tomado como referência em 0 mV (MATIAS et al., 2011).

Outro modelo neuronal bastante utilizado na literatura é o modelo de Izhikevich, que foi proposto em 2003 e é capaz de reproduzir padrões de disparos neuronais de ratos (IZHIKEVICH, 2003). As equações que descrevem o modelo são

$$\frac{dV_m}{dt} = 0.04V_m^2 + 5V_m + 140 - u + \sum I_{sin} \quad (1.16)$$

$$\frac{du}{dt} = a(bV_m - u) \quad (1.17)$$

Condições após disparo: Se $V_m \geq 30$ mV,

$$\begin{cases} V_m \leftarrow c \\ u \leftarrow u + d \end{cases}$$

como visto anteriormente, V_m representa o potencial da membrana do neurônio, enquanto u está associado à recuperação da membrana, atuando como variável controle que regula a dinâmica dos canais iônicos. Os parâmetros a , b , c e d são adimensionais e desempenham papéis específicos no modelo. O parâmetro a controla a taxa de recuperação da membrana, enquanto b determina a sensibilidade da variável de recuperação u às variações do potencial de membrana V_m . O parâmetro c define o valor do potencial de membrana após um pico de disparo (reset), e d regula a recuperação da variável u após um disparo. Esses parâmetros podem ser ajustados para reproduzir diferentes padrões de disparo neuronal. Neste modelo, o potencial de repouso é assumido como -60 mV.

Sendo assim, tanto o modelo neuronal de Hodgkin-Huxley como o de Izhikevich descrevem matematicamente a atividade elétrica neuronal. A partir desses modelos, é possível simular a atividade elétrica de regiões cerebrais formadas por uma grande quantidade de neurônios conectados através de sinapses. Essa atividade coletiva de diversos neurônios pode ser comparada a dados eletrofisiológicos obtidos através de experimentos de neuroimagem como eletroencefalograma (EEG), potencial de campo local (LFP) e eletrocorticografia (ECoG). Tanto a atividade elétrica neuronal gerada por simulação computacional como aquelas obtidas por experimentos eletrofisiológicos podem ser analisadas sob a luz da teoria da informação, como veremos no próximo capítulo.

2 METODOLOGIA

As análises de séries temporais feitas em sistemas dinâmicos de maneira geral podem ser aplicadas em séries temporais de redes neuronais simuladas por equações diferenciais bem como em séries de dados eletrofisiológicos reais obtidas diretamente do sistema nervoso. Essas redes neuronais são compostas por um grande número de neurônios interconectados e seu comportamento coletivo é governado por dinâmicas complexas. Uma possível metodologia para analisar séries temporais é a chamada análise simbólica, que desempenha um papel crucial na caracterização de sistemas dinâmicos complexos como o cérebro. Essa abordagem se baseia na representação simbólica das séries temporais que descrevem o comportamento do sistema (MONTEIRO, 2002).

Dessa forma, na neurociência computacional, a análise simbólica desempenha várias funções importantes. Ela permite estudar a dinâmica cerebral, identificar padrões emergentes e descrever propriedades globais do sistema neural (MONTANI et al., 2015; ZUNINO; SORIANO; ROSSO, 2012). Além disso, a análise simbólica também pode ser utilizada na identificação de transições de fase, pontos de equilíbrio e compreensão do comportamento caótico em redes neurais complexas (ROSSO et al., 2001; AZIZ; ARIF, 2006).

2.1 Teoria da Informação Causal

Os avanços decorrentes da Terceira Revolução Industrial culminaram na propagação da comunicação instrumentalizada via Internet (PHILBECK; DAVIS, 2018), o que abriu espaço para uma nova forma de se trabalhar com sistemas de comunicação, transmissão de dados, criptografia e análise de dados. Surgiu assim uma área que envolve física, estatística e probabilidade chamada Teoria da Informação.

A Teoria da Informação proposta por Claude Shannon em 1948 estuda o armazenamento e a propagação de informação considerando a comunicação como um problema matemático rigorosamente respaldado na estatística (STONE, 2015). Na Teoria da Informação causal, a causalidade é respeitada já que as correlações temporais entre amostras sucessivas são consideradas no processo de obtenção da Função de Densidade de Probabilidade (PDF).

Em neurociência, o cérebro pode ser considerado um sistema dinâmico não linear em vários níveis de análise (MCKENNA; MCMULLEN; SHLESINGER, 1994), onde a grandeza que varia com o decorrer do tempo é o potencial da membrana neuronal. Desse modo, é possível associar características particulares às séries temporais por meio dos quantificadores da Teoria da Informação Causal (CORDEIRO et al., 2018). Ao obter a variação do potencial da membrana neuronal ao longo do tempo, devemos atrelar a série a uma função de distribuição de probabilidade (PDF). Apesar de não haver um consenso de qual seja a melhor forma para construir a PDF, será abordada neste trabalho uma metodologia simbólica que respeita a causalidade.

A metodologia utilizada aqui foi proposta por Bandt e Pompe (BANDT; POMPE, 2002) para vincular a série temporal a uma PDF que respeita a causalidade em sua construção. A partir da PDF é possível calcular diferentes quantificadores de teoria da informação como entropia de Shannon e complexidade estatística, como veremos a seguir.

2.1.1 Entropia de Shannon

Seja uma série temporal $\chi \equiv \{x_i; i = 1, 2, 3, \dots, M\}$ com χ sendo um observável e M o número de medidas realizadas. Considere que a probabilidade de ocorrer um evento x_i é:

$$p_i = P(\chi = x_i), \quad (2.1)$$

em que

$$0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad (2.2)$$

onde N é o número de estados acessíveis ao sistema.

A quantidade de informação I_i relacionada ao evento i é definida por Shannon em (SHANNON, 1948) como:

$$I_i = \ln \left(\frac{1}{p_i} \right), \quad (2.3)$$

desde que $p_i > 0$. Para $p_i = 0$, a quantidade de informação I_i não é definida, pois um evento impossível não carrega informação. Note que, quando $p_i \rightarrow 0$, $I_i \rightarrow \infty$, refletindo a ideia de que eventos extremamente raros seriam altamente informativos se ocorressem. No entanto, eventos com $p_i = 0$ nunca ocorrem e, portanto, não contribuem para a informação do sistema.

Para um evento x_i com probabilidade de ocorrência $p_i \neq 1$, eventos menos prováveis (com p_i menor) carregam uma quantidade maior de informação. Por outro lado, se um evento x_k tem probabilidade $p_k = 1$, então a probabilidade de ocorrência dos demais eventos $x_{i \neq k}$ é nula, ou seja, $p_{i \neq k} = 0$. Nesse caso, a informação transmitida pelo evento x_k é nula, pois, de acordo com a equação 2.3, temos:

$$I_k = \ln \left(\frac{1}{p_k} \right) = \ln \left(\frac{1}{1} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Isso indica que um evento certo ($p_k = 1$) não transmite informação, já que não há surpresa associada à sua ocorrência. Portanto, a quantidade de informação transmitida está diretamente relacionada ao grau de surpresa ou imprevisibilidade de um evento (HAYKIN, 2001).

Shannon propôs que a quantidade de informação contida em um sistema deve ser consistente com conceitos já estabelecidos na mecânica estatística. Desse modo, a entropia de Shannon é definida como (SHANNON, 1948):

$$S(\chi) = - \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i). \quad (2.5)$$

Assim, $S(\chi)$ representa a quantidade média de informação associada a uma sequência de eventos. A entropia pode ser interpretada como uma medida da incerteza ou desordem do sistema, sendo máxima quando todos os eventos são igualmente prováveis e mínima quando um evento é certo (ou seja, quando $p_k = 1$ para algum k) (KRIPPENDORFF, 2009).

Caso fosse conhecido que um dos eventos x_k tenha probabilidade $p_k = 1$ de ocorrer, isto é, dada uma PDF do tipo $P_0 = \{p_k = 1, p_{i \neq k} = 0\}$, a eq. 2.5 retorna um valor de $S(P_0) = 0$. Desse modo, $S_{min} = 0$. Para uma PDF de distribuição uniforme $P_u = \{p_i = \frac{1}{N}; \forall i = 1, 2, 3, \dots, N\}$ a entropia é $S(P_u) = \ln(N)$, ou seja, S_{max} .

Pode-se então escrever a entropia de Shannon normalizada como $H(P) = \frac{S(P)}{S_{max}}$, ou

$$H(P) = \frac{S(P)}{\ln(N)}. \quad (2.6)$$

onde $S_{max} = \ln(N)$ é a entropia máxima do sistema, alcançada quando todos os N estados são igualmente prováveis. A entropia normalizada $H(P)$ está definida no intervalo $0 \leq H(P) \leq 1$.

Para $H(P) = 0$, o sistema é totalmente organizado, com um único estado certo e todos os demais estados com probabilidade zero. Nesse caso, não há incerteza ou desordem, e o sistema não contém informações significativas. No entanto, quando a entropia é máxima, $H(P) = 1$, o sistema é completamente desorganizado, com todos os estados igualmente prováveis. Nesse cenário, a incerteza é máxima, mas não há correlações ou padrões discerníveis no sistema (SHANNON, 1948).

Observe que, em ambos os extremos, não é possível extrair informações relevantes sobre o sistema. A entropia de Shannon fornece uma medida da desordem global do sistema, mas não consegue capturar variações na desordem local. Por exemplo, se o sistema é composto por subsistemas com diferentes níveis de organização, a entropia global pode mascarar essas diferenças locais. Para analisar a desordem em escalas menores ou em partes específicas do sistema, são necessárias outras medidas, como a entropia condicional ou a divergência de Kullback-Leibler (WILLEMS, 2006).

2.1.2 Complexidade Estatística

Além dos casos extremos de mínima e máxima entropia que podem vir a ser um sistema totalmente organizado ou completamente aleatório, existem sistemas em estados intermediários que são relevantes e complexos. Seria então interessante definir uma grandeza que destaque os

graus de estruturas físicas intermediárias que estão entre os extremos da entropia retratados na PDF do sistema em questão.

Desse modo, é promissor utilizar uma medida de complexidade estatística onde é possível se ter sensibilidade aos detalhes essenciais dos processos dinâmicos subjacentes ao conjunto de dados (MARTIN; PLASTINO; ROSSO, 2003)

$$C(P, P_u) = H(P) \cdot Q_J(P, P_u), \quad (2.7)$$

onde $H(P)$ é a entropia de Shannon normalizada que quantifica a incerteza ou desordem global do sistema. $Q_J(P, P_u)$ é a medida de desequilíbrio que nos permite identificar se o sistema possui estados "privilegiados"(ou mais prováveis) entre os estados acessíveis (MARTIN; PLASTINO; ROSSO, 2006).

A medida de desequilíbrio $Q_J(P, P_u)$ é definida em termos da divergência de Jansen-Shannon $J(P, P_u)$ que quantifica a diferença entre duas distribuições de probabilidade P e P_u . Podemos escrever:

$$Q_J(P, P_u) = Q_0 J(P, P_u), \quad (2.8)$$

onde $0 \leq Q_J \leq 1$. A divergência de Jensen-Shannon é dada por:

$$J(P, P_u) = S \left[\frac{(P + P_u)}{2} \right] - \frac{S(P)}{2} - \frac{S(P_u)}{2}, \quad (2.9)$$

sendo S a entropia de Shannon. Essa divergência é particularmente útil para comparar composições simbólicas entre diferentes sequências, pois fornece uma medida simétrica e bem comportada da diferença entre distribuições (GROSSE et al., 2002).

A constante Q_0 é um fator de normalização que garante que Q_J esteja no intervalo $[0, 1]$. Ela é definida como:

$$Q_0 = -2 \left\{ \left(\frac{N+1}{N} \right) \ln(N+1) - 2\ln(2N) + \ln(N) \right\}^{-1}, \quad (2.10)$$

onde N é o número de estados acessíveis do sistema. Essa normalização é essencial para garantir que a medida de complexidade $C(P, P_u)$ seja adimensional e comparável entre diferentes sistemas.

É importante salientar, mediante a eq. 2.7, que é possível observar que a complexidade depende de duas distribuições de probabilidade, a distribuição associada ao sistema em questão, P , e a outra distribuição uniforme, P_u . É possível notar, por outro lado que, para um certo valor de H , C fica restrito ao intervalo de C_{min} e C_{max} , complexidade mínima e máxima respectivamente (MARTIN; PLASTINO; ROSSO, 2003). Portanto, a complexidade é definida como o produto entre uma medida de informação (como a entropia de Shannon) e uma medida de desequilíbrio. Essa definição pode ser interpretada como uma forma de quantificar o quão distante o sistema

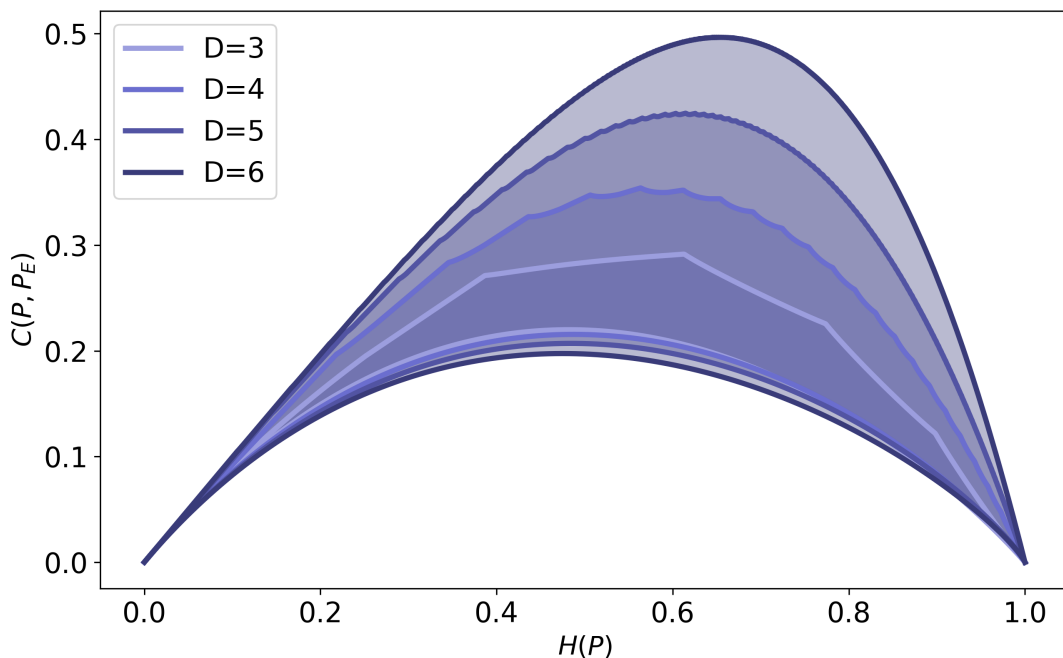
está de uma distribuição uniforme, ou seja, o quão longe está de uma situação em que todos os estados são igualmente prováveis (MARTIN; PLASTINO; ROSSO, 2003).

2.1.3 Plano de Informação Causal

Em sistemas complexos, o plano de informação causal pode ser utilizado para observar a evolução temporal de quantificadores da Teoria da Informação. Desse modo, é empregado um quantificador, que pode ser um dos já comentados anteriormente (entropia de Shannon ou complexidade Estatística) em função do tempo. Mediante a segunda Lei da Termodinâmica é conhecido que, para sistemas isolados, a entropia cresce monotonicamente com o tempo. Podemos estudar a evolução temporal desse tipo de sistema, utilizando a entropia como variável independente em um diagrama bidimensional (FRIEDEN; SOFFER, 1995; PLASTINO; PLASTINO, 1996).

Aqui, podemos atentar ao fato de que na mecânica estatística, muitas vezes, quando o sistema de interesse é isolado, é comum observar como ele evolui para o equilíbrio a partir de uma distribuição inicial arbitrária e discreta de probabilidade. No equilíbrio, espera-se que a distribuição de probabilidade seja equiprovável ou uniforme. Essa suposição é amplamente utilizada na descrição de sistemas em equilíbrio, sem perda de generalidade (SETHNA, 2021; BINNEY et al., 1992).

Figura 3 – Complexidade estatística em função da entropia para $D = 3, 4, 5, 6$.



Fonte: Autor.

Dessa forma, uma maneira de obter informações a partir de uma perspectiva global é por meio de um plano de informação causal, como ilustrado na figura 3. Nesse plano, a entropia de Shannon normalizada $H(P)$ é representada no eixo horizontal, variando no intervalo $[0, 1]$, enquanto a complexidade estatística $C(P, P_e)$ é representada no eixo vertical, com valores

no intervalo $[C_{\min}, C_{\max}]$. Para cada valor de entropia, existem valores mínimos e máximos de complexidade, que dependem do número de estados acessíveis ao sistema, descrito pelo parâmetro D . Esse parâmetro, que será discutido em detalhes mais adiante, está relacionado ao fatorial do número de estados ($D!$) e influencia diretamente as fronteiras do plano de informação causal.

2.2 Método de simbolização de Bandt & Pompe

A função densidade de probabilidade (PDF) descreve a probabilidade da ocorrência de cada estado acessível a um sistema. Pode-se usar a PDF para calcular importantes quantificadores da teoria da informação como entropia de Shannon e complexidade Estatística. Como os quantificadores da teoria da informação são fundamentados na probabilidade da ocorrência de um evento em uma distribuição temporal, se faz necessário previamente o cálculo da PDF para que posteriormente sejam calculados os quantificadores do sistema dinâmico estudado. Existem alguns métodos a respeito de como obter adequadamente a PDF, por exemplo, análise de Fourier, método de kernel e dinâmica simbólica binária (ROSSO; CRAIG; MOSCATO, 2009; CHEN, 2000; MISCHAIKOW et al., 1999; ROSSO et al., 2012).

A metodologia simbólica proposta por Bandt-Pompe (BANDT; POMPE, 2002) apresenta diversas vantagens que justificam sua utilização na análise de sistemas dinâmicos. Primeiramente, ela é independente de escala, o que permite sua aplicação a sistemas com diferentes características dinâmicas. Além disso, é robusta a ruídos, sendo adequada para a análise de dados reais que frequentemente contêm interferências. Outra vantagem é sua simplicidade computacional, que permite a análise eficiente de grandes conjuntos de dados. Por fim, o método é capaz de capturar não-linearidades e padrões complexos em séries temporais, diferentemente de abordagens lineares como a análise de Fourier. Essas características tornam a metodologia de Bandt-Pompe uma escolha versátil e eficaz para o estudo de sistemas dinâmicos (BANDT; POMPE, 2002; ROSSO; CRAIG; MOSCATO, 2009). Neste trabalho, adotaremos essa abordagem, baseada na metodologia simbólica proposta por Bandt e Pompe (BANDT; POMPE, 2002).

Retomamos nossa série temporal $\chi(t) \equiv \{x_i; i = 1, 2, 3, \dots, M\}$ com M sendo o número de elementos da série, onde cada medida foi realizada em intervalos de tempo regulares e iguais. Para analisar essa série, utilizaremos o vetor de símbolo $\vec{\pi}^{(D)}$, descrito por:

$$\vec{\pi}^{(D)} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{D-1}), \quad (2.11)$$

onde todos os elementos de $\vec{\pi}^{(D)}$ são únicos, isto é, $\pi_i \neq \pi_k, \forall i \neq k$. O parâmetro $D \in \mathbb{N}$, com $D \geq 2$, indica a quantidade de informação a ser incluída. O parâmetro $\tau \in \mathbb{N}$, com $\tau \geq 1$, define o tempo característico da série temporal. Dividindo a série temporal em vetores sobrepostos de

comprimento D , obtemos:

$$\vec{Y}_s^{(D,\tau)} = (x_s, x_{s+\tau}, \dots, x_{s+(D-1)\tau}), \quad (2.12)$$

para $s = 1, 2, \dots, M - (D - 1)\tau$. Aqui, s é o índice que indica a posição inicial de cada vetor na série temporal. Esses vetores são então mapeados para um padrão ordinal $\vec{\pi}^{(D)}$ em ordem crescente dos elementos $x_s \in \vec{Y}_s^{(D,\tau)}$, culminando em:

$$\vec{\pi}^{(D)} = (r_0, r_1, \dots, r_{(D-1)}), \quad (2.13)$$

onde r_i são os índices que ordenam os elementos, de modo que:

$$x_{s+r_0} < x_{s+r_1} < \dots < x_{s+r_{(D-1)}}, \quad (2.14)$$

garantindo que $r_i < r_{i+1}$ se $x_i < x_{i+1}$.

Para analisar a distribuição de probabilidades dos padrões ordinais, utilizamos a metodologia BP-PDF (*Back Propagation-Probability Density Function*), Obtida a partir do histograma de frequências dos símbolos associados à série temporal $\vec{Y}_s^{(D,\tau)}$. Considerando todas as $D!$ permutações possíveis de π com ordem D , a distribuição de probabilidades é dada por $P = (p(\pi))$ (SACO et al., 2010), onde

$$p(\pi_s^{(D)}) = \frac{\# \left\{ \vec{Y}_s^{(D,\tau)} \text{ do tipo } \pi_s^{(D)} \right\}}{M - (D - 1)\tau}, \quad (2.15)$$

e $\#$ representa o número de ocorrências. A BP-PDF satisfaz as condições $0 \leq p(\pi^{(D)}) \leq 1$ e $\sum_{\pi^{(D)}} p(\pi^{(D)}) = 1$. É importante notar que a BP-PDF é invariante a transformações monotônicas não lineares, o que significa que desvios ou escalas não lineares introduzidos por dispositivos de medição não alteram a estimativa dos quantificadores (SACO et al., 2010).

Para ilustrar a metodologia, consideremos a série temporal

$$\chi(t) = \left\{ 11, 13, 4, 7, 5, 6, 13, 0, 2, 4, 12, 15, 6, 10, 1, 0, 8, 0, 10, 13, 2, 15, 14, 3 \right\},$$

com um total de $M = 24$ elementos. O parâmetro τ pode ser variado para observar diferentes padrões na série temporal. Quando $\tau = 1$, observamos elementos adjacentes da série, resultando na sequência $\chi(t) = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_M)$. Aumentando para $\tau = 2$, a série é reduzida para $\chi(t) = (x_i, x_{i+2}, x_{i+4}, \dots, x_{M-1})$, e para $\tau = 3$, a série torna-se $\chi(t) = (x_i, x_{i+3}, x_{i+6}, \dots, x_{M-2})$.

Vamos considerar diferentes configurações para ilustrar como a variação de τ afeta a construção dos vetores de símbolo:

- Para $\tau = 1$:

$$\chi(t) = \{11, 13, 4, 7, 5, 6, 13, 0, 2, 4, 12, 15, 6, 10, 1, 0, 8, 0, 10, 13, 2, 15, 14, 3\}$$

Neste caso, a série original é mantida sem alterações, e a série é percorrida uma única vez.

- Para $\tau = 2$, percorremos a série tomando o primeiro valor e "ignorando" o valor seguinte (observe que os valores em negrito são os escolhidos ao percorrer a série, enquanto os cinza são os "ignorados"). Esse processo é repetido ao longo da série:

$$\chi(t) = \{\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{13}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{12}, \mathbf{15}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, \mathbf{15}, \mathbf{14}, \mathbf{3}\}.$$

Em seguida, a série é percorrida novamente, iniciando do primeiro valor "ignorado":

$$\chi(t) = \{\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{13}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{12}, \mathbf{15}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, \mathbf{15}, \mathbf{14}, \mathbf{3}\}.$$

Temos como resultado as séries:

$$\chi(t) = \{11, 4, 5, 13, 2, 12, 6, 1, 8, 10, 2, 14\};$$

$$\chi(t) = \{13, 7, 6, 0, 4, 15, 10, 0, 0, 13, 15, 3\}.$$

- Para $\tau = 3$, percorremos a série original tomando o primeiro valor e "ignorando" os dois valores seguintes, repetindo esse processo ao longo da série:

$$\chi(t) = \{\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{13}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{12}, \mathbf{15}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, \mathbf{15}, \mathbf{14}, \mathbf{3}\}.$$

Percorrendo a série novamente, iniciando do primeiro termo não utilizado:

$$\chi(t) = \{\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{13}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{12}, \mathbf{15}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, \mathbf{15}, \mathbf{14}, \mathbf{3}\}.$$

Por fim, a série é percorrida mais uma vez para utilizar os termos restantes:

$$\chi(t) = \{\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{13}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{12}, \mathbf{15}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, \mathbf{15}, \mathbf{14}, \mathbf{3}\}.$$

Ficamos com as séries:

$$\chi(t) = \{11, 7, 13, 4, 6, 0, 10, 15\};$$

$$\chi(t) = \{13, 5, 0, 12, 10, 8, 13, 14\};$$

$$\chi(t) = \{4, 6, 2, 15, 1, 0, 2, 3\}.$$

Nota-se que, com o aumento de τ , o número de elementos gerados a cada ciclo de análise da série original diminui. No entanto, ao final do processo, todos os termos da série são considerados, preservando a informação essencial. O parâmetro τ está diretamente relacionado ao tempo característico da série temporal, que pode ser interpretado como a escala de tempo em que as correlações ou padrões dinâmicos do sistema se manifestam. Ao variar τ , é possível explorar diferentes escalas temporais, capturando informações sobre a dinâmica do sistema em múltiplos níveis. Por exemplo, um τ pequeno pode revelar flutuações rápidas e de curto prazo, enquanto um τ maior pode destacar tendências de longo prazo ou comportamentos mais lentos. Dessa forma, a escolha adequada de τ permite uma análise mais rica e detalhada do sistema em estudo, fornecendo informações sobre sua estrutura temporal e dinâmica subjacente (ZUNINO; SORIANO; ROSSO, 2012).

Finalmente, a escolha do parâmetro D utilizados na construção dos símbolos é crucial, pois determina tanto o número de elementos em cada vetor de símbolo (D) quanto o número de estados acessíveis ao sistema ($D!$). Para garantir a confiabilidade das estatísticas, é importante que o comprimento da série temporal M seja significativamente maior que $D!$, ou seja, $M \gg D!$. (KOWALSKI et al., 2007). Recomenda-se $3 \leq D \leq 6$, embora isso dependa do tipo de sistema e do tamanho da série temporal (BANDT; POMPE, 2002). Por exemplo, para $D = 3$, cada vetor de símbolo terá 3 elementos, e haverá 6 símbolos distintos ($3!$).

Usando $\tau = 3$, em uma nova série temporal ξ menor, visando fins didáticos, onde $\xi(t) = \{11, 7, 13, 4, 6, 0, 10, 15, 5\}$, por questões de simplificação e para $D = 3$, tem-se:

$$\xi(t) = \{ \text{11}, \text{7}, \text{13}, \text{4}, \text{6}, \text{0}, \text{10}, \text{15}, \text{5} \} \mapsto \vec{Y}_1^{(3,3)} = (11, 4, 10);$$

$$\xi(t) = \{ \text{11}, \text{7}, \text{13}, \text{4}, \text{6}, \text{0}, \text{10}, \text{15}, \text{5} \} \mapsto \vec{Y}_2^{(3,3)} = (7, 6, 15);$$

$$\xi(t) = \{ \text{11}, \text{7}, \text{13}, \text{4}, \text{6}, \text{0}, \text{10}, \text{15}, \text{5} \} \mapsto \vec{Y}_3^{(3,3)} = (13, 0, 5).$$

Veja que, para $\tau = 3$ e $D = 3$, o número de vetores gerados depende do comprimento da série temporal. No exemplo acima, com nove elementos, foram gerados três vetores. No entanto, se a série temporal tivesse apenas oito elementos, o número de vetores seria reduzido para dois, pois o índice s varia de 1 até $M - (D - 1)\tau$, onde M é o número de elementos da série. Nesse caso, para $M = 8$, teríamos $s = 1, 2$, resultando em apenas dois vetores: $\vec{Y}_1^{(3,3)} = (11, 4, 10)$ e $\vec{Y}_2^{(3,3)} = (7, 6, 15)$.

2.2.1 Mapeamento de Permutação

Nesta seção, exploraremos como os símbolos podem ser construídos na metodologia de Bandt-Pompe por meio de duas abordagens distintas: o mapeamento por classificação (RANK) e o mapeamento cronológico (CHRONOLOGICAL). Esses métodos permitem transformar os vetores extraídos da série temporal em padrões ordinais, que são essenciais para a análise da complexidade e da estrutura dinâmica do sistema.

2.2.1.1 Mapeamento de Permutação por classificação

O mapeamento por classificação (RANK) ordena os elementos de cada vetor em termos de magnitude, capturando a relação relativa entre os valores. Por outro lado, o mapeamento cronológico (CHRONOLOGICAL) preserva a ordem temporal dos elementos, refletindo a sequência em que os eventos ocorrem na série temporal. Ambos os métodos têm aplicações específicas e podem fornecer insights complementares sobre o comportamento do sistema. Para ilustrar, vamos utilizar a série temporal $\rho \equiv \{x_t\}$, descrita por:

$$\rho \equiv \{11, 7, 13, 4, 6, 0, 10, 15\}.$$

No mapeamento de permutação do tipo RANK, os valores da série temporal são reordenados de acordo com sua magnitude. Considere os parâmetros $D = 3$ e $\tau = 1$ para a série temporal ρ . Como já visto anteriormente, mediante esses parâmetros, tomaremos três valores consecutivos da série temporal original, já que $\tau = 1$, e reordenamos em termos de suas magnitudes. por exemplo,

$$\{11, 7, 13, 4, 6, 0, 10, 15\} \mapsto \vec{Y}_1^{(3,1)} = (11, 7, 13).$$

Em sequência, podemos atribuir índices ao vetor de símbolo de acordo com a magnitude dos valores: o valor de menor magnitude recebe o índice 0, o de magnitude intermediária recebe o índice 1, o maior valor recebe o índice 2. Para isso é utilizado a função de Rank definida por:

$$R[x_{t+n}] = \sum_{k=0}^{D-1} \mathbb{I}(x_{t+k} \leq x_{t+n}), n = 0, \dots, D-1. \quad (2.16)$$

Onde $\mathbb{I}(\bullet)$ é o indicador da função que é 1 caso a condição seja verdadeira ou 0 caso a condição seja falsa. Veja que para todos os vetores componentes $x_{t+n} \in x_t^D$, sendo $1 \leq R(x_{t+n}) \leq D$.

Por fim, de $\vec{Y}_t^{(D)} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+D-1})$ mapeamos o vetor de símbolo, de modo que $\vec{\pi}^{(D)} = (R[x_t], R[x_{t+1}], \dots, R[x_{t+D-1}])$ (TRAVERSARO et al., 2018).

Vamos usar como exemplo o vetor $\mapsto \vec{Y}_1^{(3,1)} = (11, 7, 13)$. Para o primeiro elemento, (11), $t = 0$ e fazendo a soma de $n = 0$ a $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} R[11] &= \mathbb{I}(11 \leq 11) + \mathbb{I}(7 \leq 11) + \mathbb{I}(13 \leq 11) \\ R[11] &= 1 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

.

Para o elemento 7, temos

$$\begin{aligned} R[7] &= \mathbb{I}(11 \leq 7) + \mathbb{I}(7 \leq 7) + \mathbb{I}(13 \leq 7) \\ R[7] &= 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Para o elemento 13, temos

$$R[13] = \mathbb{I}(11 \leq 13) + \mathbb{I}(7 \leq 13) + \mathbb{I}(13 \leq 13)$$

$$R[13] = 1 + 1 + 1 = 3$$

Obtemos, desse modo:

$$\vec{Y}_1^{(3,1)} = (11_2, 7_1, 13_3) \mapsto \vec{\pi}_0^{(3)} = (2, 1, 3).$$

De forma análoga para os demais valores, podemos escrever:

$$\vec{Y}_2^{(3,1)} = (7_2, 13_3, 4_1) \mapsto \vec{\pi}_1^{(3)} = (2, 3, 1)$$

$$\vec{Y}_3^{(3,1)} = (13_3, 4_1, 6_2) \mapsto \vec{\pi}_2^{(3)} = (3, 1, 2)$$

$$\vec{Y}_4^{(3,1)} = (4_2, 6_3, 0_1) \mapsto \vec{\pi}_3^{(3)} = (2, 3, 1)$$

$$\vec{Y}_5^{(3,1)} = (6_2, 0_1, 10_3) \mapsto \vec{\pi}_4^{(3)} = (2, 1, 3)$$

$$\vec{Y}_6^{(3,1)} = (0_1, 10_2, 15_3) \mapsto \vec{\pi}_5^{(3)} = (1, 2, 3)$$

2.2.1.2 Mapeamento de permutação cronológico

Tendo $\vec{Y}_t^{(D)} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+D-1})$ podemos reorganizar de acordo com as magnitudes $\vec{\pi}^{(D)} = (i_1, i_2, \dots, i_D)$, de forma que $x_{t+i_1} \leq x_{t+i_2}, \dots, x_{t+i_D}$ (TRAVERSARO et al., 2018). Obtemos assim, considerando o exemplo anterior,

$$\vec{Y}_1^{(3)} = (x_1, x_2, x_3) = (11, 7, 13)$$

. Ordenando o vetor em ordem crescente e adicionando os índices, temos:

$$(7, 11, 13) = (7_1, 11_2, 13_3)$$

. Pode-se voltar as posições, mas mantendo os índices

$$\vec{Y}_1^{(3)} = (11_2, 7_1, 13_3) \mapsto \vec{\pi}_0^{(3)} = (2, 1, 3)$$

Obtemos,

$$\vec{Y}_2^{(3,1)} = (7_2, 13_3, 4_1) \mapsto \vec{\pi}_1^{(3)} = (2, 3, 1)$$

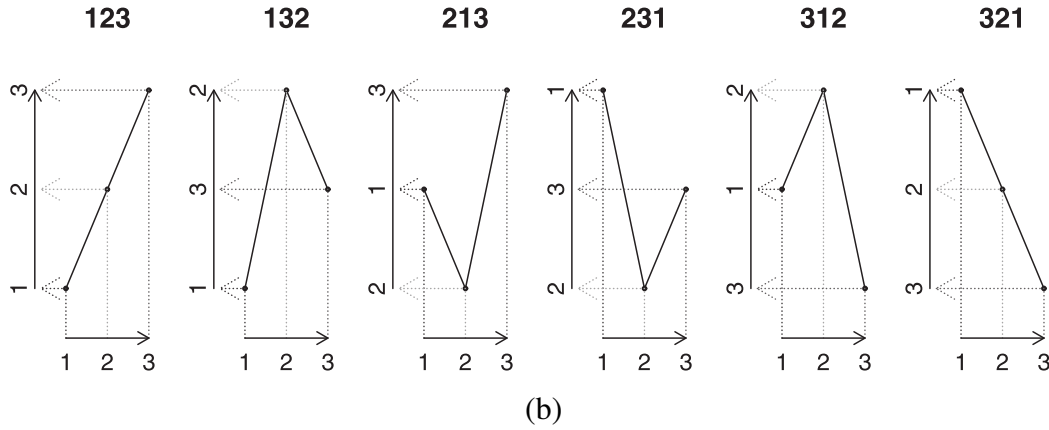
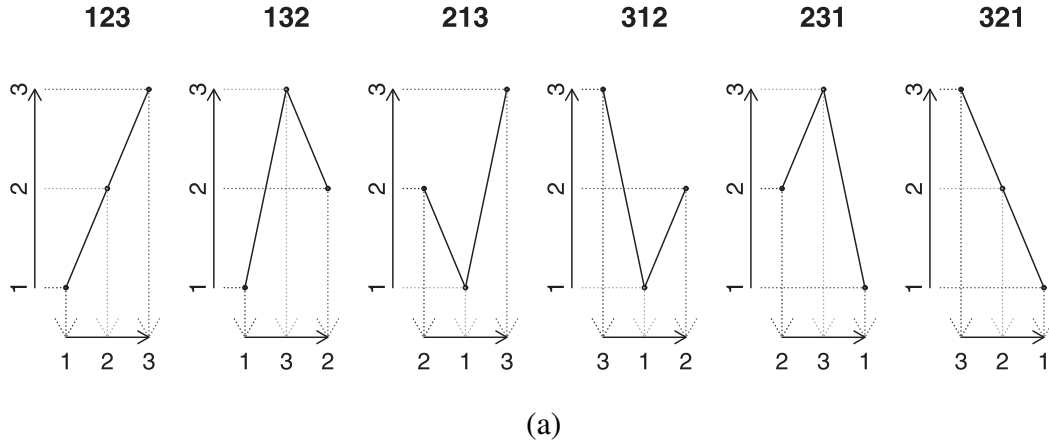
$$\vec{Y}_3^{(3,1)} = (13_3, 4_1, 6_2) \mapsto \vec{\pi}_2^{(3)} = (3, 1, 2)$$

$$\begin{aligned}\vec{Y}_4^{(3,1)} &= (4_2, 6_3, 0_1) \mapsto \vec{\pi}_3^{(3)} = (2, 3, 1) \\ \vec{Y}_5^{(3,1)} &= (6_2, 0_1, 10_3) \mapsto \vec{\pi}_4^{(3)} = (2, 1, 3) \\ \vec{Y}_6^{(3,1)} &= (0_1, 10_2, 15_3) \mapsto \vec{\pi}_5^{(3)} = (1, 2, 3).\end{aligned}$$

Observe a figura 4 a seguir onde é apresentado o mapeamento de permutação por classificação figura 4 (a) e o mapeamento de permutação cronológica figura 4 (b). Perceba que a figura 4 (a) ilustra como os valores da série temporal são reordenados de acordo com sua magnitude. Nessa figura, os índices no eixo vertical (ranks) são fixos e ordenados por amplitude, e são mapeados para o eixo do tempo (horizontal). O padrão resultante é obtido lendo os rótulos no eixo horizontal da esquerda para a direita (em ordem cronológica). Isso significa que, para cada vetor, os valores são substituídos pelos seus ranks, mantendo a ordem temporal. A figura 4 (b) mostra como os índices temporais são ordenados de acordo com a amplitude dos valores. Nessa figura, os índices no eixo do tempo (horizontal) são fixos em ordem cronológica, e são mapeados para o eixo vertical (amplitude). O padrão resultante é obtido lendo os rótulos no eixo vertical de baixo para cima (na direção da amplitude crescente). Isso reflete a sequência em que os eventos ocorrem na série temporal, preservando a ordem temporal dos elementos.

As principais diferenças entre o mapeamento por classificação (RANK) e o mapeamento cronológico (CHRONOLOGICAL) residem na forma como os valores são ordenados e mapeados para os padrões ordinais. No mapeamento por classificação, os valores são reordenados de acordo com sua magnitude, capturando a relação relativa entre os valores, enquanto no mapeamento cronológico, a ordem temporal dos elementos é preservada, refletindo a sequência em que os eventos ocorrem. Essas diferenças podem levar a padrões ordinais distintos, especialmente em séries com valores repetidos, e cada método pode fornecer informações complementares sobre o comportamento do sistema. A escolha entre os dois métodos depende do objetivo da análise e das características específicas da série temporal em estudo.

Figura 4 – (a) Símbolos de mapeamento de permutação RANK e (b) mapeamento de permutação cronológica para $D = 3$. Posto em ordem cronológica de valores de $\vec{\pi}^D$.



Fonte: (TRAVERSARO et al., 2018)

2.2.2 Ordem lexicográfica de Lehmer.

Veja que os símbolos montados a partir do mapeamento por classificação (figura 4 (a)), cujas permutações são **312** e **231**, e os montados a partir do mapeamento cronológico (figura 4 (b)), com permutações **231** e **312**, são distintos em termos de permutação, mas ainda podem ocupar a mesma posição na ordem lexicográfica. Na metodologia de Bandt-Pompe, segmentos de séries temporais são transformados em permutações de ordens com base na classificação relativa dos valores no segmento. Independentemente de como a permutação foi gerada, o índice de Lehmer traduz diretamente a posição relativa da permutação em uma ordem lexicográfica.

A ordem lexicográfica é uma forma sistemática de organizar permutações, similar à ordenação de palavras em um dicionário. Nessa ordem, as permutações são dispostas de acordo com a sequência de seus elementos, comparando-os da esquerda para a direita. Por exemplo, para permutações de três elementos, a ordem lexicográfica é:

$$[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1].$$

O índice de Lehmer fornece uma maneira única de identificar a posição de uma permutação nessa ordem. Ele é calculado com base no número de elementos menores à direita de cada posição da permutação, ponderados por fatoriais. Essa abordagem permite que permutações visualmente distintas, como **312** e **231**, sejam corretamente posicionadas na ordem lexicográfica, garantindo consistência na análise.

2.2.2.1 Índice de Lehmer

O índice de Lehmer para uma permutação $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d]$ é calculado como:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^d \ell_i \cdot (d - i)!, \quad (2.17)$$

onde ℓ_i é o número de elementos à direita de ω_i que são menores que ω_i , e d é o comprimento da permutação (RAMÍREZ, 2003). Esse índice fornece uma posição única da permutação na ordem lexicográfica.

Na metodologia de Bandt-Pompe, é possível obter subsequências da série temporal utilizando o mapeamento por classificação, onde os valores são ordenados do menor para o maior dentro do segmento, ou o mapeamento cronológico, em que os valores são avaliados em sua ordem original, mas ainda considerando suas posições relativas. Embora essas permutações possam ser visualmente distintas, o índice de Lehmer captura apenas a ordem relacional dos elementos (SCHWARZ,).

2.2.2.2 Exemplos de Cálculo do Índice de Lehmer

Considere o segmento $[1, 2, 3]$:

1. Para $\omega_1 = 1$, não existem elementos menores à direita:

$$\ell_1 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 1)! = 0 \cdot 2 = 0.$$

2. Para $\omega_2 = 2$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_2 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 2)! = 0.$$

3. Para $\omega_3 = 3$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([1, 2, 3]) = 0 + 0 + 0 = 0. \quad (2.18)$$

Agora, considere o segmento $[1, 3, 2]$:

1. Para $\omega_1 = 1$, não existe um elemento menor à direita:

$$\ell_1 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 1)! = 0 \cdot 2 = 0.$$

2. Para $\omega_2 = 3$, existe um elemento menor (2) à direita:

$$\ell_2 = 1 \implies 1 \cdot (3 - 2)! = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Para $\omega_3 = 2$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([1, 3, 2]) = 0 + 1 + 0 = 1. \quad (2.19)$$

Considere o segmento $[2, 1, 3]$:

1. Para $\omega_1 = 2$, existe um elemento menor (1) à direita:

$$\ell_1 = 1 \implies 1 \cdot (3 - 1)! = 1 \cdot 2 = 2.$$

2. Para $\omega_2 = 1$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_2 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 2)! = 0.$$

3. Para $\omega_3 = 3$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([2, 1, 3]) = 2 + 0 + 0 = 2. \quad (2.20)$$

Considere o segmento $[2, 3, 1]$:

1. Para $\omega_1 = 2$, existe um elemento menor (1) à direita:

$$\ell_1 = 1 \implies 1 \cdot (3 - 1)! = 1 \cdot 2 = 2.$$

2. Para $\omega_2 = 3$, existe um elemento menor (1) à direita:

$$\ell_2 = 1 \implies 1 \cdot (3 - 2)! = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Para $\omega_3 = 1$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([2, 3, 1]) = 2 + 1 + 0 = 3. \quad (2.21)$$

Considere o segmento $[3, 1, 2]$:

1. Para $\omega_1 = 3$, existem dois elementos menores $(1, 2)$ à direita:

$$\ell_1 = 2 \implies 2 \cdot (3 - 1)! = 2 \cdot 2 = 4.$$

2. Para $\omega_2 = 1$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_2 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 2)! = 0.$$

3. Para $\omega_3 = 2$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([3, 1, 2]) = 4 + 0 + 0 = 4. \quad (2.22)$$

Considere o segmento $[3, 2, 1]$:

1. Para $\omega_1 = 3$, existem dois elementos menores $(2, 1)$ à direita:

$$\ell_1 = 2 \implies 2 \cdot (3 - 1)! = 2 \cdot 2 = 4.$$

2. Para $\omega_2 = 2$, existe um elemento menor (1) à direita:

$$\ell_2 = 1 \implies 1 \cdot (3 - 2)! = 1 \cdot 1 = 1.$$

3. Para $\omega_3 = 1$, não há elementos menores à direita:

$$\ell_3 = 0 \implies 0 \cdot (3 - 3)! = 0.$$

O índice de Lehmer é:

$$L([3, 2, 1]) = 4 + 1 + 0 = 5. \quad (2.23)$$

Desse modo, podemos concluir que $L([3, 1, 2]) \neq L([2, 3, 1])$. No entanto, o índice de Lehmer atua como uma ferramenta que abstrai as diferenças entre o mapeamento por classificação e o cronológico, traduzindo cada permutação para uma posição única na ordem lexicográfica. Por exemplo, no mapeamento por classificação, a permutação **312** pode ser gerada a partir de um segmento como $[3, 1, 2]$, enquanto no mapeamento cronológico, a permutação **231** pode surgir

de um segmento como $[2, 3, 1]$. Apesar de serem visualmente distintas, o índice de Lehmer as posiciona de forma consistente na ordem lexicográfica, garantindo que a estrutura relacional dos dados seja preservada. Independentemente do método de construção de permutação adotado, a metodologia de Bandt-Pompe assegura que as dinâmicas subjacentes da série temporal sejam corretamente capturadas.

Vamos analisar com mais detalhes a etapa em que atribuímos símbolos aos padrões encontrados na metodologia. No caso específico em que estamos considerando $D = 3$ (ou seja, padrões de comprimento 3), existem 6 combinações possíveis, que podem ser obtidas através de uma permutação dos três objetos distintos. Para ilustrar essa permutação, vamos considerar os objetos A, B e C.

Agora, vamos listar todas as formas possíveis de organizar esses objetos em uma sequência de três elementos: (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B) e (C,B,A). Cada uma dessas sequências representa uma combinação única e distinta dos objetos. No total, temos 6 possibilidades, como mencionado anteriormente.

A próxima etapa é atribuir símbolos a cada uma dessas permutações de forma a garantir uma prescrição única para quantificadores, como a entropia de Shannon. Para isso, é necessário respeitar a ordem lexicográfica de Lehmer. Essa ordem determina uma sequência específica de símbolos para cada permutação, garantindo que não haja ambiguidade na representação dos padrões.

Ao seguir a ordem lexicográfica de Lehmer, cada permutação recebe um símbolo correspondente, formando um conjunto de símbolos que representa todas as possíveis combinações. Essa atribuição de símbolos é importante para realizar análises posteriores, como o cálculo da Entropia de Shannon, em que os símbolos são utilizados como elementos de referência.

É importante destacar que cada permutação única recebe um símbolo distinto, garantindo que não haja ambiguidade na representação dos padrões. O índice de Lehmer, que traduz cada permutação para uma posição única na ordem lexicográfica, assegura que permutações diferentes sejam mapeadas para símbolos diferentes. Por exemplo, as permutações $(1, 2, 3)$ e $(1, 3, 2)$ têm índices de Lehmer distintos ($L = 0$ e $L = 1$, respectivamente) e, portanto, recebem símbolos diferentes. Dessa forma, o conjunto de símbolos formado é unívoco e reflete todas as possíveis combinações de permutações.

Portanto, o processo de atribuição de símbolos aos padrões encontrados segue uma ordem específica, garantindo uma representação única e unívoca dos padrões (ver Fig. 5) e permitindo a aplicação de medidas quantitativas, como a entropia de Shannon, para avaliar a complexidade e a informação contida nos padrões identificados (SCHWARZ,).

Ao analisar a associação dos objetos (A, B, C) com sua ordem (1, 2, 3), podemos estabelecer uma correspondência semelhante com as demais permutações. Por exemplo, a permutação (A, C, B) pode ser associada à ordem (1, 3, 2), a permutação (B, A, C) à ordem (2, 1,

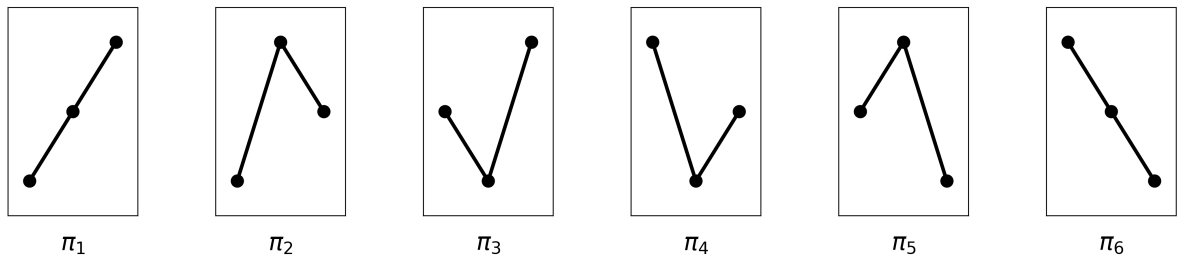
3), a permutação (B, C, A) à ordem (2, 3, 1), a permutação (C, A, B) à ordem (3, 1, 2) e, por fim, a permutação (C, B, A) também à ordem (3, 2, 1).

Para construir um símbolo que represente cada permutação, podemos seguir um procedimento específico. Primeiro, traçamos uma linha vertical na qual colocamos o número associado à ordem lexicográfica dos elementos. Em seguida, na linha horizontal, colocamos a permutação dos termos e os valores relacionados à ordem em que os elementos se encontram. Por exemplo, considerando a permutação (A, C, B) e a ordem lexicográfica (1, 3, 2), traçamos uma linha vertical com os números 1, 3 e 2. Essa construção é exemplificada na figura 4. Na linha horizontal, colocamos a permutação (A, C, B) e os valores correspondentes à ordem em que os elementos estão dispostos na permutação, que são 1, 3 e 2.

Por fim, ligamos os pontos de interseção entre o valor da ordem lexicográfica e o valor da ordem na permutação. Esse processo cria uma representação gráfica que mostra como os elementos estão ordenados na permutação específica.

Essa abordagem permite a criação de símbolos que representam de forma única e visual as diferentes permutações, possibilitando análises posteriores dos padrões identificados. Os símbolos obtidos são essenciais para a quantificação de grandezas como a entropia de Shannon, que é utilizada para avaliar a complexidade e a informação contida nos padrões das permutações (SCHWARZ,) que podem ser visualizadas na figura 5.

Figura 5 – Símbolos π_i das permutações de padrões ordinários de comprimento $D = 3$, seguindo metodologia BP-PDF e ordem lexicográfica de Lehmer.



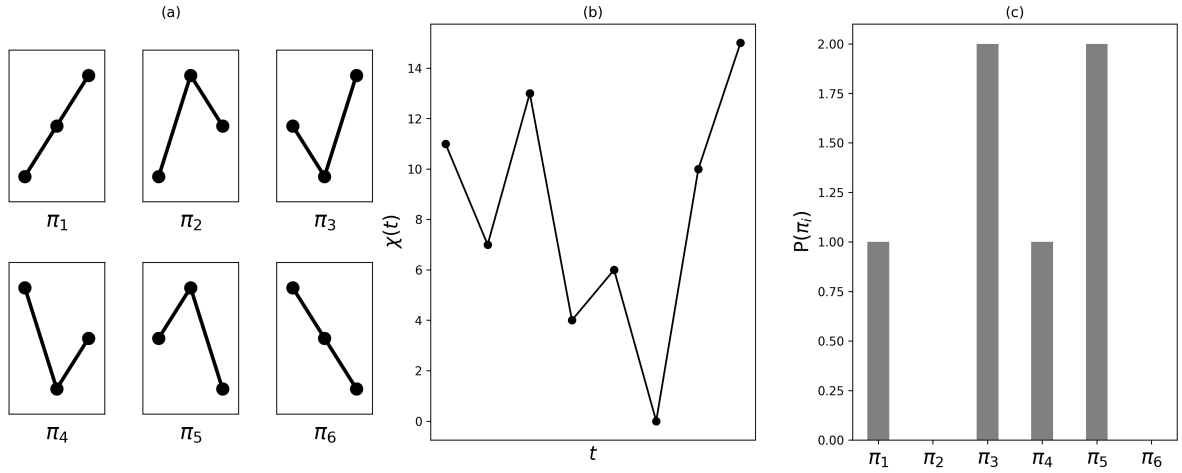
Fonte: Autor, 2024.

Como foi visto anteriormente, a ordem lexicográfica permite ordenar os símbolos de forma sistemática, garantindo que, independentemente do método de mapeamento utilizado (classificação ou cronológico), a mesma ordenação seja obtida. A figura 5 ilustra os símbolos ordenados de acordo com a ordem lexicográfica, destacando a consistência na representação dos padrões.

Tomando a série temporal $\chi(t) = 11, 7, 13, 4, 6, 0, 10, 15$ para $D = 3$ e $\tau = 1$ podemos criar os seguintes vetores de símbolo por meio da permutação de mapeamento cronológico:

$$\vec{Y}_1^{(3,1)} = (11, 7, 13) \mapsto (11_1, 7_2, 13_3) \mapsto (7_2, 11_1, 13_3) \mapsto (2, 1, 3);$$

Figura 6 – (a) Símbolos π_i das permutações para D=3, (b) série temporal simples, ρ , (c) obtenção da PDF a partir de uma abordagem simbólica.



Fonte: Autor, 2024.

$$\vec{Y}_2^{(3,1)} = (7, 13, 4) \mapsto (7_1, 13_2, 4_3) \mapsto (4_3, 7_1, 13_2) \mapsto (3, 1, 2);$$

$$\vec{Y}_3^{(3,1)} = (13, 4, 6) \mapsto (13_1, 4_2, 6_3) \mapsto (4_2, 6_3, 13_1) \mapsto (2, 3, 1);$$

$$\vec{Y}_4^{(3,1)} = (4, 6, 0) \mapsto (4_1, 6_2, 0_3) \mapsto (0_3, 4_1, 6_2) \mapsto (3, 1, 2);$$

$$\vec{Y}_5^{(3,1)} = (6, 0, 10) \mapsto (6_1, 0_2, 10_3) \mapsto (0_2, 6_1, 10_3) \mapsto (2, 1, 3);$$

$$\vec{Y}_6^{(3,1)} = (0, 10, 15) \mapsto (0_1, 10_2, 15_3) \mapsto (0_1, 10_2, 15_3) \mapsto (1, 2, 3).$$

Podemos escrever, dessa forma, os símbolos associados como:

$$\vec{Y}_1^{(3,1)} = (11, 7, 13) \mapsto \pi_3^{(3)};$$

$$\vec{Y}_2^{(3,1)} = (7, 13, 4) \mapsto \pi_4^{(3)};$$

$$\vec{Y}_3^{(3,1)} = (13, 4, 6) \mapsto \pi_5^{(3)};$$

$$\vec{Y}_4^{(3,1)} = (4, 6, 0) \mapsto \pi_4^{(3)};$$

$$\vec{Y}_5^{(3,1)} = (6, 0, 10) \mapsto \pi_3^{(3)};$$

$$\vec{Y}_6^{(3,1)} = (0, 10, 15) \mapsto \pi_1^{(3)},$$

observe que os símbolos $\pi_1^{(3)}, \pi_3^{(3)}, \pi_4^{(3)}, \pi_5^{(3)}$ são mostrados na figura 5 e na figura 6a.

Para realizar a análise proposta neste estudo, utiliza-se a metodologia BP-PDF, que consiste na construção de um histograma (ver figura 6c) normalizado contendo as probabilidades dos símbolos aparecerem na série inicial de M elementos. Esse histograma, também conhecido como Função de Densidade de Probabilidade (PDF), desempenha um papel fundamental na obtenção de grandezas importantes, como a entropia de Shannon e a complexidade. Observe que, para a série temporal $\chi(t)$ mostrada na figura 6b, são utilizados os símbolos ordenados lexicograficamente (figura 6a) para o cálculo da PDF, conforme ilustrado na figura 6c.

A PDF é uma ferramenta poderosa para caracterizar a distribuição de probabilidade dos símbolos em uma série de dados. Ela fornece informações valiosas sobre a frequência de ocorrência de cada símbolo, permitindo a quantificação da incerteza ou desordem presente na série. A partir da PDF, é possível calcular a entropia de Shannon, uma medida da quantidade média de informação contida na série, que está diretamente relacionada à sua complexidade.

A análise da PDF permite investigar as características estatísticas da série $\chi(t)$, fornecendo percepções sobre a distribuição dos símbolos e a dinâmica subjacente. Com isso, é possível explorar a entropia de Shannon e a complexidade da série, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos padrões e propriedades dos dados em estudo.

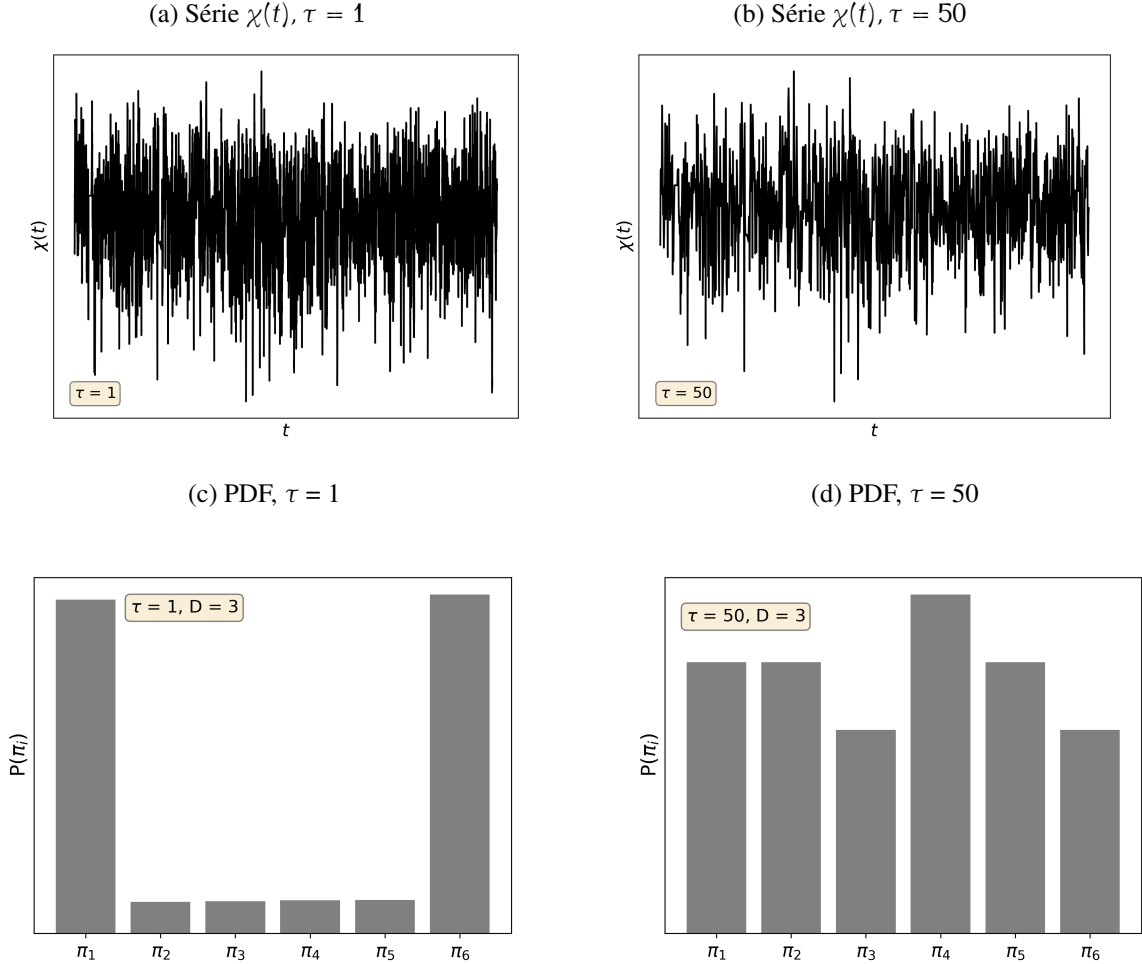
Na figura 7, é utilizada uma série temporal que representa valores do potencial elétrico médio da membrana neuronal. Inicialmente (figura 7a), é aplicado $\tau = 1$, ou seja, a série é mantida com todos os elementos originais. Em seguida, é adotado $\tau = 50$ na figura 7b, onde a série temporal é percorrida pela primeira vez. Após a criação dos 6 símbolos (para $D = 3$, temos $3! = 6$), verifica-se quantas vezes cada símbolo aparece ao longo da série temporal. Os gráficos correspondentes são apresentados na figura 7c, para $\tau = 1$, e na figura 7d, para $\tau = 50$.

Observa-se que, para o valor maior de τ ($\tau = 50$), há uma quantidade significativamente maior de ocorrências de certos símbolos que, anteriormente (com $\tau = 1$), não apareciam com tanta frequência. Esse comportamento pode ser interpretado como uma indicação de que, ao aumentar o valor de τ , estamos capturando padrões de longo prazo ou de baixa frequência na série temporal, que não são evidentes em escalas de tempo menores ($\tau = 1$).

Quando $\tau = 1$, a análise é sensível a flutuações rápidas e de curto prazo, o que pode resultar em uma distribuição mais uniforme dos símbolos. Por outro lado, ao aumentar τ para 50, a análise passa a ser influenciada por correlações de longo prazo, destacando padrões que se repetem em intervalos maiores. Isso pode indicar a presença de estruturas temporais ou dinâmicas subjacentes que só se tornam aparentes em escalas de tempo maiores.

Portanto, a maior frequência de certos símbolos para $\tau = 50$ sugere que a série temporal possui componentes de baixa frequência ou comportamentos periódicos que não são capturados adequadamente com $\tau = 1$. Essa conclusão reforça a importância da escolha adequada do parâmetro τ na análise de séries temporais, pois ele influencia diretamente a capacidade de identificar e caracterizar diferentes escalas de dinâmica no sistema.

Figura 7 – Processo de obtenção da PDF por meio da metodologia Bandt & Pompe. Após aplicar $\tau = 50$ a série original 7a, obtemos a série 7b, construímos os símbolos π_i e chegamos ao histogramas 7d que mostra a probabilidade de encontrarmos cada um dos D ! símbolos ao longo da série temporal construídos com D elementos.



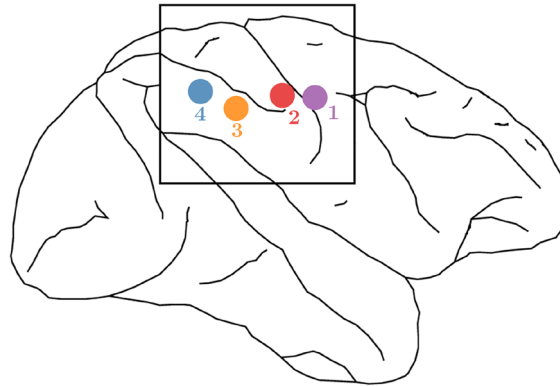
Fonte: Autor, 2024.

2.3 Exemplo da aplicação da metodologia em dados cerebrais

A metodologia Bandt e Pompe já foi utilizada anteriormente em um estudo feito com dados intracranianos de macacos (LUCAS et al., 2021b), como pode ser visto na figura 8. Esse estudo se baseou na análise simbólica realizada em séries temporais de potenciais de campo locais (LFP) de quatro regiões do córtex de um macaco indicadas na figura 8. O objetivo do trabalho foi caracterizar e quantificar as diferenças na atividade cerebral durante uma tarefa do tipo "Go" e uma do tipo "No-Go" (em que o animal deve, respectivamente, liberar uma alavanca ou não liberar, dependendo do estímulo visual observado).

No geral, uma tarefa do tipo "Go/No-Go" consiste em dois tipos de estímulos que são apresentados: estímulos "Go" e estímulos "No-Go". Para os estímulos "Go", os participantes são instruídos a realizar uma resposta ou ação específica, geralmente pressionar um botão, como foi o caso do estudo em questão, mas também pode estar relacionado a dar uma resposta verbal. Já

Figura 8 – Localização dos eletrodos no cérebro do macaco. Córtex motor primário (canal 1), córtex primário somatosensorial (canal 2) e áreas parietal posterior (3 e 4).



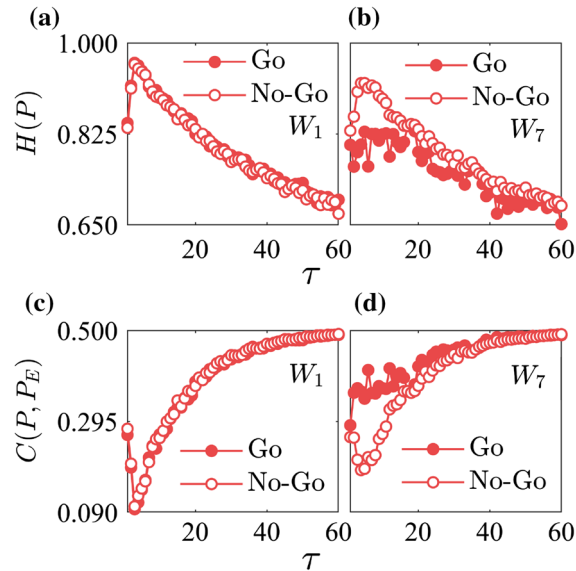
Fonte: (LUCAS et al., 2021b).

para os estímulos "No-Go", os participantes devem inibir a resposta e não fazer nada.

A figura 9 ilustra as diferenças entre os ensaios "Go" e "No-Go" na região 2 (córtex somatosensorial primário) durante duas janelas de tempo: W_1 (0-90 ms) e W_7 (300-390 ms). A entropia (H) e a complexidade (C) são plotadas em função do tempo de incorporação (τ), que varia de 1 a 60, correspondendo a uma subamostragem da série temporal de 5 ms até 300 ms. Em W_1 , não há diferença significativa entre os ensaios Go e No-Go, pois o estímulo visual ainda não foi processado. No entanto, em W_7 , a entropia para os ensaios "Go" é significativamente menor do que para os ensaios "No-Go", indicando que o cérebro está processando informações específicas da resposta "Go". Além disso, a complexidade para os ensaios "Go" em W_7 é maior do que para os ensaios "No-Go", especialmente para valores de τ entre 3 e 6 (15-30 ms), sugerindo que a informação relevante para a tarefa é processada nessa escala de tempo. Esses resultados mostram que tanto a entropia quanto a complexidade são úteis para distinguir entre ensaios "Go" e "No-Go", especialmente após o processamento do estímulo visual.

A figura 10 apresenta o plano de complexidade-entropia multiescala para diferentes regiões do cérebro (regiões 1, 2, 3 e 4) durante duas janelas de tempo: W_1 (0-90 ms) e uma janela pós-estímulo que mostra uma separação ilustrativa entre ensaios "Go" e "No-Go". Na região 1 (córtex motor primário), durante W_{11} (500-590 ms), as curvas para ensaios "Go" e "No-Go" são diferentes, mas as curvas "No-Go" em W_{11} são mais semelhantes às de W_1 , sugerindo um efeito de rebote beta, onde a atividade oscilatória retorna ao estado inicial após o término do ensaio. Na região 2 (córtex somatosensorial primário), durante W_7 (300-390 ms), a diferença entre ensaios "Go" e "No-Go" é mais pronunciada, com os ensaios "Go" mostrando maior complexidade e menor entropia em comparação com os ensaios "No-Go". Nas regiões 3 e 4 (córtex parietal posterior), as diferenças entre ensaios "Go" e "No-Go" começam a aparecer mais cedo (em W_4 , 150-240 ms), indicando que o córtex parietal processa informações específicas da resposta mais cedo. O plano de complexidade-entropia permite visualizar a separação entre ensaios "Go" e

Figura 9 – Diferenças específicas de resposta obtidas por meio de quantificadores da teoria da informação para o canal 2. (a) e (b) Entropia em função de τ e (c) e (d) Complexidade em função de τ . Para $\tau \approx 10$ é possível notar uma maior diferença entre as condições Go e No-Go tanto na entropia como na complexidade.

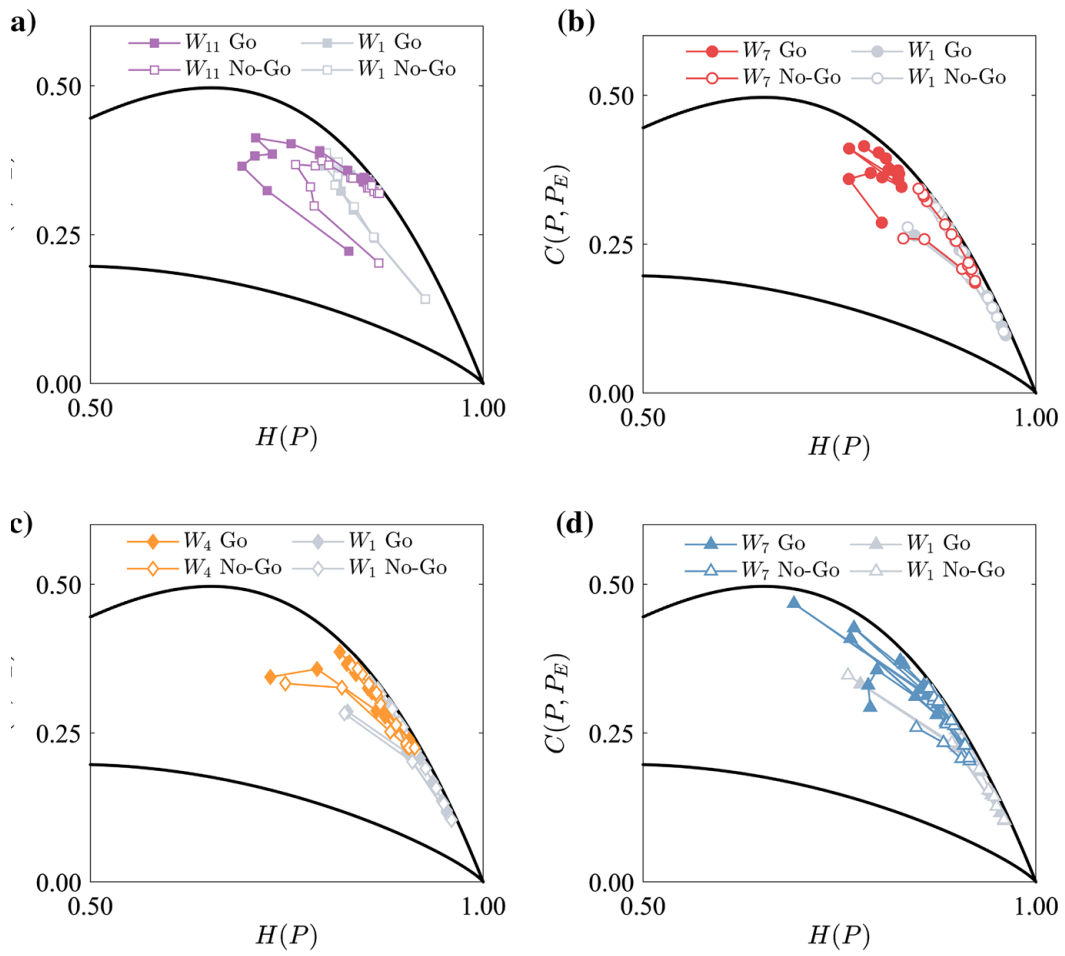


Fonte: (LUCAS et al., 2021b).

"No-Go" em diferentes regiões e janelas de tempo, destacando que o córtex motor primário tem propriedades estatísticas diferentes das outras regiões, com uma complexidade que nunca atinge o estado mais desordenado.

Os resultados após os cálculos dos quantificadores da teoria da informação como entropia de Shannon e complexidade, como pode ser observado na figura 9, evidenciaram diferenças significativas entre a atividade cerebral durante estímulos de "Go" e "No-Go". A separação entre as curvas no plano complexidade por entropia de Shannon pode ser observada na figura 10 para diferentes canais e janelas temporais ao longo da tarefa.

Figura 10 – Plano complexidade-entropia para a janela temporal W_i com maior separação entre cada condição de cada canal. Em cinza os valores de H e C na janela inicial W_1 usada de base em que não diferença entre os tipos de trial.



Fonte: (LUCAS et al., 2021b).

3 DADOS ELETROFISIOLÓGICOS

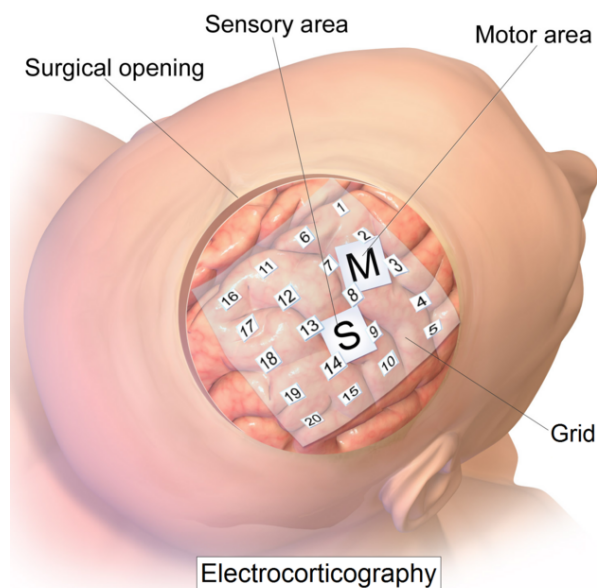
3.1 Dados intracranianos em humanos

A aquisição dos dados analisados nesta tese foi realizada por meio de uma técnica invasiva de neuroimagem conhecida como eletrocorticografia (ECoG). Esse procedimento envolve a disposição de eletrodos diretamente sobre a superfície do córtex cerebral para medir a atividade elétrica do cérebro. Esse recurso é usado em pacientes que realizam cirurgias cerebrais para fins clínicos, fornecendo informação sobre regiões do cérebro responsáveis por funções características, como fala, locomoção ou percepção sensorial (CRONE et al., 1998; MILLER et al., 2016).

A figura 11 ilustra esse procedimento. Comparada com técnicas de neuroimagem não invasivas, como o eletroencefalograma (EEG) ou ressonância magnética funcional (fMRI), a ECoG requer intervenção cirúrgica para posicionar os eletrodos. No entanto, a ECoG oferece vantagens significativas na qualidade do sinal elétrico obtido, permitindo a caracterização da atividade cerebral em tempo real.

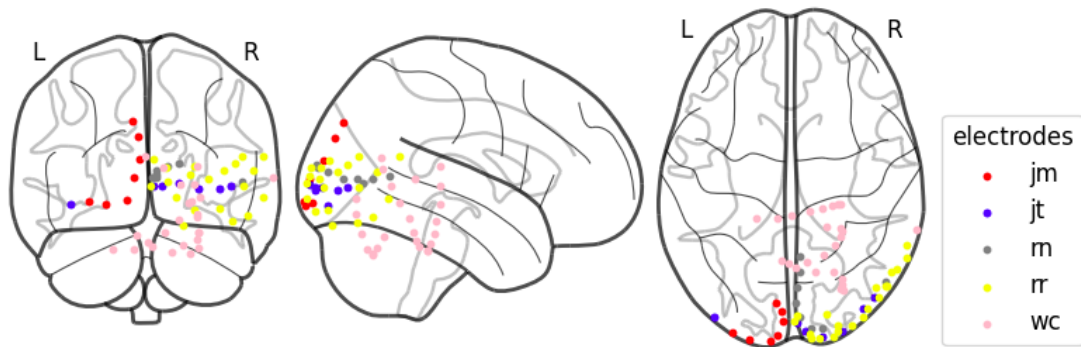
A ECoG tem sido amplamente utilizada tanto em pesquisas acadêmicas quanto em aplicações clínicas. Uma das principais vantagens da ECoG é sua alta resolução temporal e espacial. Ao registrar a atividade elétrica diretamente da superfície cerebral, a ECoG permite a captura de informações detalhadas sobre a dinâmica neural com uma precisão temporal muito alta. Isso é particularmente valioso para o estudo de processos neurais rápidos e a compreensão de como diferentes regiões cerebrais interagem em tempo real.

Figura 11 – Ilustração da técnica de eletrocorticografia ECoG.



Fonte: (ELETROCORTICOGRAPHIA,)

Figura 12 – Localização dos 67 eletrodos implantados nos 5 pacientes (MILLER et al., 2010).



Fonte: Autor, 2024.

Além disso, existe a possibilidade da utilização de ECoG para realizar mapeamento funcional cortical pré-cirúrgico em pacientes que serão submetidos a procedimentos neurocirúrgicos. Essa técnica permite identificar áreas cerebrais críticas, como aquelas envolvidas na fala, movimento ou percepção sensorial, ajudando os cirurgiões a evitar danos a regiões importantes durante o procedimento clínico.

A ECoG tem sido utilizada em uma variedade de cenários de pesquisa e aplicações clínicas. Além dos exemplos mencionados anteriormente, a ECoG também desempenha um papel importante no estudo da atividade cerebral em pessoas com epilepsia, análises relacionadas à compreensão da linguagem, memória e interfaces cérebro-computador (KUCEWICZ et al., 2018; WANG et al., 2021; KURUVILLA; FLINK, 2003).

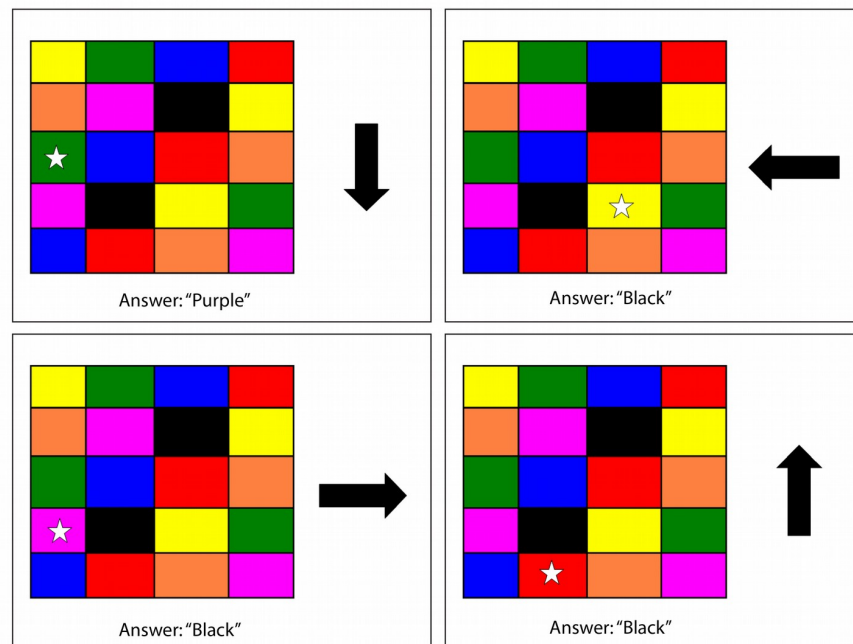
Os dados usados no presente trabalho foram obtidos a partir de uma base de dados aberta (MILLER et al., 2010). Utilizamos os dados de 5 pacientes totalizando 67 eletrodos. A localização aproximada desses canais está ilustrada na figura 12 sendo 8 eletrodos do paciente JM, 7 do JT, 8 do RN, 20 de RR e 24 eletrodos de WC. Para a aquisição dos dados, foram utilizados arranjos de eletrodos de platina subdurais (Ad-Tech, Racine, WI, EUA) distribuídos como combinações de arranjos retangulares fronto-temporo-parietal de $8 \times [4, 6, 8]$ e $1 \times [4, 6, 8]$ faixas temporais e occipitais lineares. Os eletrodos tinham 4 mm de diâmetro (2,3 mm expostos), 1 cm de distância entre eletrodos e foram embutidos em silastic (MILLER et al., 2010).

3.2 Descrição da tarefa visual

Os dados são medidas de ECoG durante uma tarefa visual realizada por pacientes frente a um monitor LCD, distante um metro. Os estímulos de busca visual têm duração de 2s e foram intercalados com estímulos de outros 2s durante os quais a tela estava em branco. A tarefa de busca visual consiste em identificar a cor de um quadrado específico ao ver uma imagem colorida no monitor (ver exemplos na figura 13). A imagem é formada por uma matriz de 5 linhas e 4

colunas de caixas coloridas, uma estrela branca posicionada no centro de uma dessas caixas e uma seta preta centrada à direita da caixa. Em cada estímulo de busca visual, a estrela aparece aleatoriamente em uma das caixas coloridas, e a seta apontando aleatoriamente em uma das quatro direções cardeais (“direita”, “esquerda”, “para cima” ou “para baixo”). O objetivo do paciente é indicar a cor da caixa adjacente à estrela na direção da seta como pode ser visto na figura 13.

Figura 13 – Representação esquemática do desenvolvimento da atividade realizada pelos pacientes.

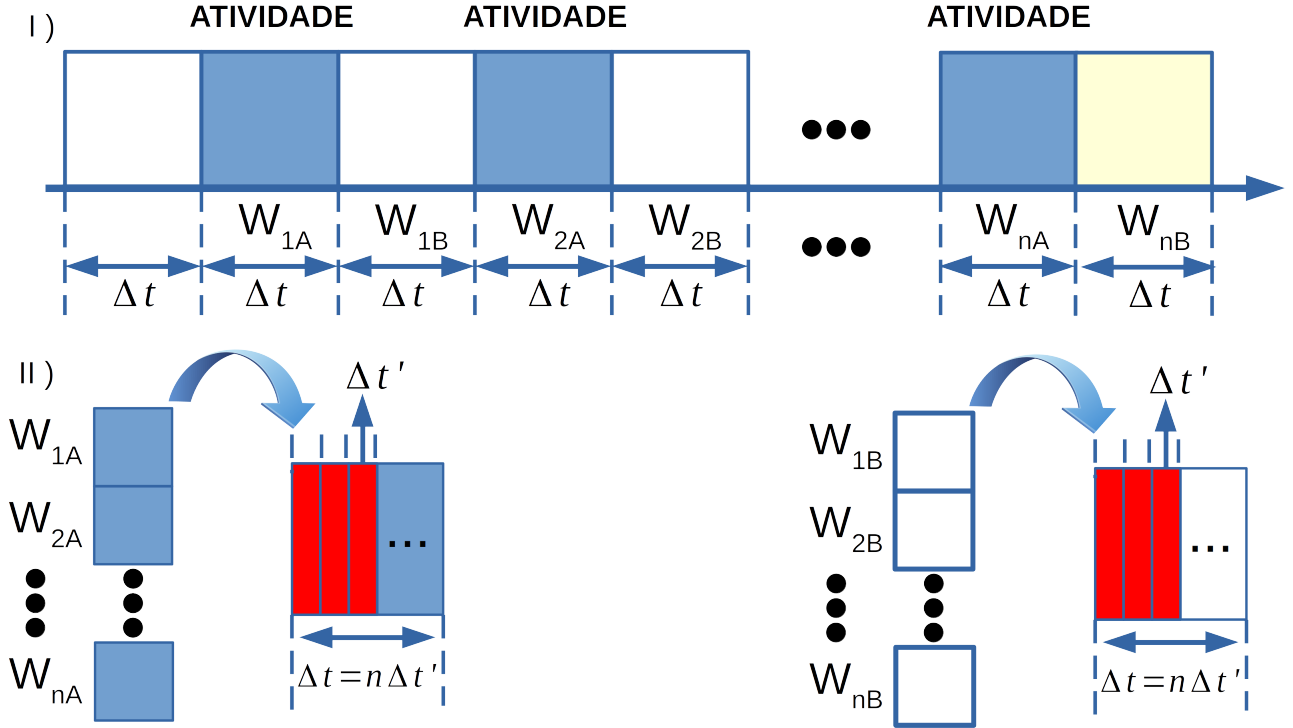


Fonte: notas do conjunto de dados de pesquisa visual (MILLER et al., 2010)

3.3 Estrutura dos dados

A dados analisados dizem respeito a atividade elétrica registrada por 67 canais em 5 pacientes, durante períodos alternados de 2 s com atividade no monitor (tarefa de busca ativa) e com monitor em branco (tarefa de tela branca). Foram utilizadas 120 janelas ou intervalos para análise da série temporal relacionada ao monitor com a atividade (chamadas trials de execução ou busca ativa) e, como comparativo, 120 janelas onde o monitor está em branco (chamadas trials de espera ou tela branca). Pode ser observado na figura 14 que as janelas estão identificadas como W_{iA} quando existe tarefa no monitor e W_{iB} quando o monitor está em branco. O passo seguinte foi unir todas as 120 janelas W_{iA} e todas as 120 janelas W_{iB} em séries temporais únicas. Em seguida, analisar em n intervalos menores $\Delta t'$.

Figura 14 – I) Divisão das janelas temporais com atividade, W_{iA} , e sem atividade, W_{iB} , ambos com intervalo $\Delta t = 2000$ ms. II) Reorganização das janelas W_{iA} e W_{iB} subdividindo o intervalo Δt em n intervalos $\Delta t'$ iguais sem superposição.



Fonte: Autor, 2024.

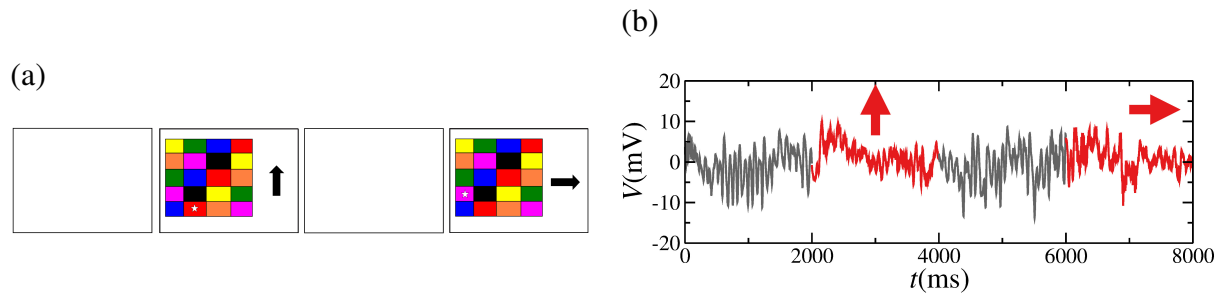
Para o primeiro intervalo, usamos $\Delta t' = 500$ ms, o que nos fornece $n = 4$, ou seja, $w_{1a}, w_{2a}, \dots, w_{4a}$, onde cada w_{ia} contém um intervalo de 500 pontos: $w_{1a} = [1, 500]$, $w_{2a} = [501, 1000]$, $w_{3a} = [1001, 1500]$, $w_{4a} = [1501, 2000]$ perceba que todas as 120 janelas W_{iA} estão concatenadas em uma mesma pilha, assim como W_{iB} , mediante $D = 6$, $\tau = 50$ para cada um dos oito canais. Posteriormente serão analisados intervalos de janelas $\Delta t' = 200$ ms, utilizando $D = 6$, $\tau = 50$ e $\tau = 15$. Desse modo teremos $\Delta t' = 200$ ms, $n = 10$ e $w_{1a}, w_{2a}, \dots, w_{10a}$.

4 RESULTADOS

4.1 Calculando entropia e complexidade dos dados intracranianos para diferenciar duas tarefas visuais

Ao longo deste capítulo, utilizamos as medidas de teoria da informação para caracterizar a atividade elétrica de certas regiões cerebrais durante duas tarefas cognitivas distintas: busca ativa e tela branca. Os resultados principais descritos abaixo foram publicados recentemente (PAZ et al., 2024) (o artigo está no Apêndice desta tese). A figura 15(a) mostra um exemplo do que é visto na tela durante 8 segundos consecutivos: 2 s de tela branca seguidos por 2 s de tarefa de busca ativa, seguidos novamente por 2 s de tela branca e mais 2 s de uma nova configuração de busca ativa. Na figura 15(b) vemos as séries temporais da atividade elétrica registradas em um eletrodo "modelo"(denominado JT3) durante esses 8 segundos. Em cinza vemos a atividade durante a tela branca e em vermelho a atividade de busca ativa.

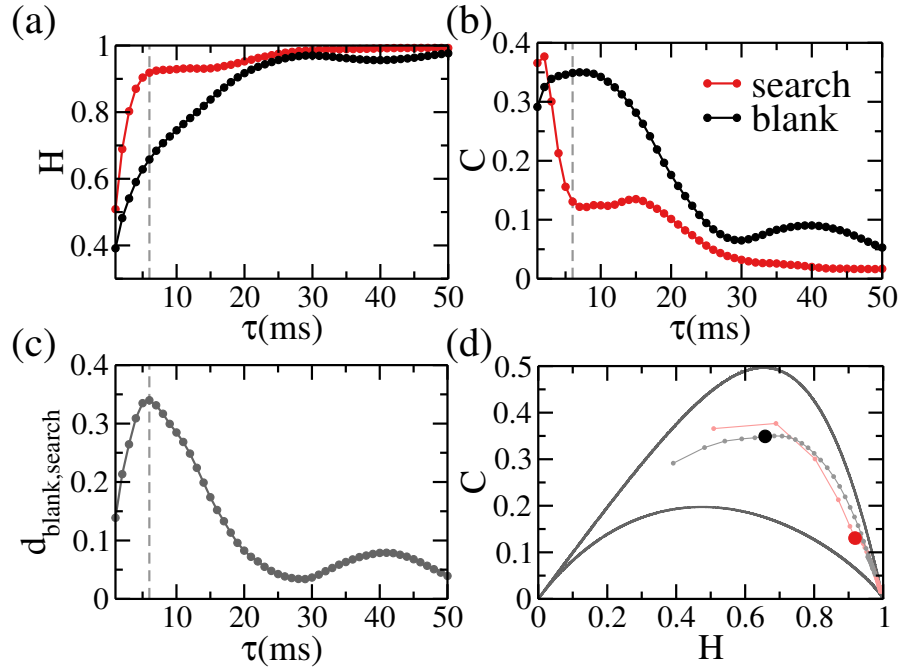
Figura 15 – Paradigma experimental. (a) Ilustração da tela ao longo do experimento: 2000 ms de períodos de espera observando uma tela branca (chamada de "blank") alternados com 2000 ms de uma tarefa visual de busca ativa(chamada de "search"). (b) Séries temporais da atividade registrada de um eletrodo exemplar (JT3) em uma área occipital durante a tarefa. Em cinza as séries correspondem às duas telas brancas e em vermelho as séries correspondem aos dois períodos de busca ativa mostrados em (a).



Fonte: Autor, 2024.

Existem diversas medidas que podem ser calculadas a partir dessas séries temporais, aqui utilizamos os quantificadores da teoria da informação como entropia (H) e complexidade (C) para diferentes taxas de amostragem τ , como descritos anteriormente. Calculamos H_{blank} e C_{blank} como função do tempo de atraso de incorporação τ variando de 1 ms a 50 ms, considerando todos os 120 *trials* de tela branca concatenados ao longo da duração total de 2 segundos de cada *trial* o que nos dá séries de 240s com 240000 pontos para cada canal. Em seguida, calculamos a entropia H_{search} e a complexidade C_{search} de maneira similar para todos os 120 *trials* de busca ativa concatenados. As curvas vermelhas na figura 16 (a) e (b) mostram entropia e complexidade por τ durante a busca ativa para o canal exemplar JT3. As curvas pretas mostram H_{blank} e C_{blank} por τ para o mesmo canal durante a tela branca. É possível perceber que a separação entre as curvas preta e vermelha é mais significativa para τ entre 3 e 20.

Figura 16 – Quantificadores da teoria da informação para caracterizar diferentes tarefas cognitivas: período de espera durante os trials de tela branca (*blank* em preto) e durante os trials de busca visual (busca ativa, *search* em vermelho). (a) Entropia H e (b) Complexidade estatística C como função do tempo de atraso de incorporação τ . (c) Distância Euclidiana $d_{\text{blank},\text{search}}$ no plano $C \times H$ entre as duas tarefas (veja Eq. 4.1). (d) Plano complexidade-entropia destacando $\tau = 6$ ms, que maximiza a distância para este eletrodo exemplar.



Fonte: Autor, 2024.

Para quantificar a separação entre os pontos das curvas associadas ao períodos de busca e ao período de tela branca, definimos uma distância Euclideana no plano entropia versus complexidade entre duas condições i e j como:

$$d_{i,j} = \sqrt{(H_i - H_j)^2 + (C_i - C_j)^2}. \quad (4.1)$$

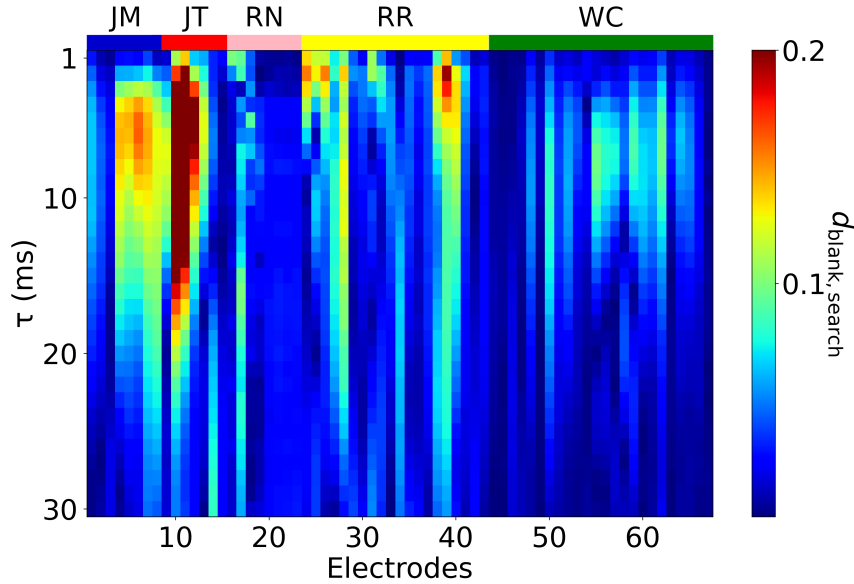
Essa grandeza nos fornece a medida da distância entre os pontos das curvas nos planos de complexidade por entropia. A figura 16(c) ilustra graficamente como essa distância varia para este eletrodo exemplar JT3. Note que para $\tau = 6$ a distância é máxima. Na figura 16(d) vemos o plano $C \times H$ para todos os valores de τ com destaque para $\tau = 6$. Note que para valores grandes de τ as duas condições se aproximam da região do plano que indica séries muito ruidosas e a distância entre elas diminui.

Definimos também um índice de assimetria para a complexidade como na Ref. (LUCAS et al., 2021b):

$$A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}}) = \frac{C_{\text{search}} - C_{\text{blank}}}{C_{\text{search}} + C_{\text{blank}}}. \quad (4.2)$$

Tanto $d_{\text{blank},\text{search}}$ como $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ são calculados de maneira independente para cada τ .

Figura 17 – Identificar quais canais e escalas de tempo podem distinguir melhor as duas tarefas cognitivas: tela em branco e tarefa de busca visual. Mapa de calor que representa a distância $d_{\text{blank}, \text{search}}$ no plano complexidade-entropia entre dois tipos de teste para todos os 67 eletrodos no eixo y e atrasos de tempo τ até 30 ms no eixo x.



Fonte: Autor, 2024.

No intuito de identificar rapidamente os eletrodos e as escalas de tempo que melhor distinguem os diferentes tipos de *trials*, a Fig. 17 apresenta o mapa de calor da distância $d_{\text{blank}, \text{search}}$ para todos os 67 eletrodos e 30 valores de τ analisados. O eixo vertical indica o tempo de incorporação τ , enquanto o eixo horizontal exibe os 67 canais de cinco pacientes na seguinte ordem: 8 eletrodos do paciente JM, 7 do JT, 8 do RN, 20 do RR e 24 do WC. Veja que o eletrodo 11 corresponde ao eletrodo JT3. O código de cores na figura 17 representa a magnitude da distância $d_{\text{blank}, \text{search}}$ entre os tipos de *trials*.

Na figura 17, observamos que os pontos vermelhos no mapa indicam onde $d_{\text{blank}, \text{search}}$ é maior. Isso significa que, considerando a série temporal completa de 2 s de atividade em nossa análise, apenas alguns canais possuem separação evidente entre os dois tipos de *trials*. Além disso, a escala de tempo em torno de $\tau = 6$ ms é especialmente útil para distinguir o tipo de atividade em diversos desses canais, não apenas no canal "modelo".

Essas diferenças pronunciadas entre as duas condições para vários eletrodos de diferentes pacientes em $\tau = 6$ ms sugerem que processos de informação relevantes estão ocorrendo nessa escala de tempo. Além disso, alguns canais do mesmo sujeito que estão espacialmente próximos entre si apresentam padrões consistentes no mapa de calor, o que revela robustez nos resultados obtidos. Por exemplo, muitos canais occipitais de JM e JT apresentam valores altos de $d_{\text{blank}, \text{search}}$. Todos os pacientes apresentam alguns canais que são mais eficazes na distinção entre as duas condições em comparação com outros, o que indica que nem todas as regiões medidas estão igualmente envolvidas nas tarefas.

Portanto, nossos resultados sugerem que regiões que apresentam maiores distâncias entre os tipos de *trials* estão mais envolvidas em uma das duas condições. Por um lado, os sítios relacionados à tarefa de busca visual, por exemplo, poderiam estar envolvidos no reconhecimento das setas, da estrela ou das cores. Por outro lado, regiões relacionadas à expectativa e à preparação estariam mais engajadas nos períodos de espera. Além disso, as escalas de tempo que maximizam a distância estariam relacionadas a processos de informação específicos que ocorrem nessas regiões.

4.2 Subdividindo cada trial em janelas temporais menores que 2s

Pode-se argumentar que, embora os estímulos visuais externos permaneçam fixos durante todo o teste, uma janela de 2 segundos é muito longa ao considerar os diferentes processos cognitivos. Se esse for o caso, é provável que estejamos misturando diferentes processos nas análises mostradas nas figuras 16 e 17. Em particular, nos testes de busca visual, vários processos internos distintos ocorrem em sequência: reconhecer a direção da seta, procurar pela estrela e, em seguida, identificar a cor da caixa correta.

Portanto, nos passos seguintes, dividimos o intervalo de tempo total de 2 segundos de cada *trial* em intervalos menores. Inicialmente analisamos 4 intervalos de 500ms sem sobreposição : 0-500ms, 500-1000ms, 1000-1500ms, 1500-2000ms.

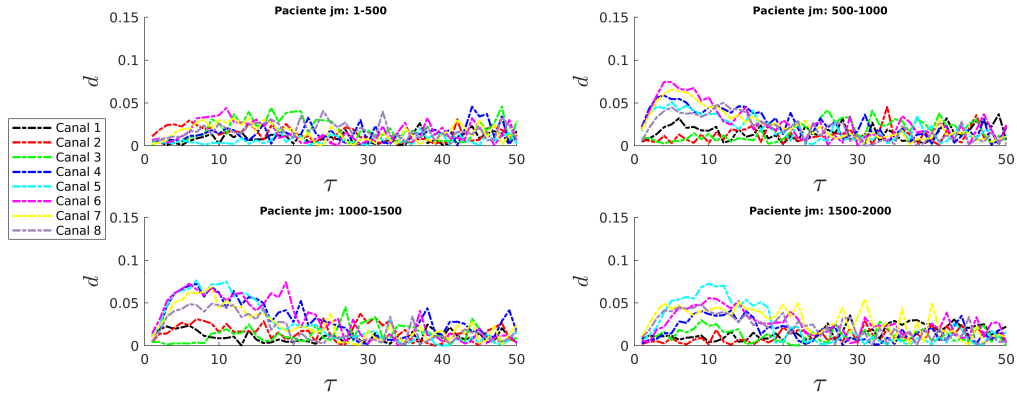
Na figura 18 mostramos as distâncias entre as duas condições para todos os eletrodos de três pacientes (JM, JT e RN) nos 4 intervalos analisados. Esses valores de d indicam uma maior separação entre os pontos das curvas para tela branca e busca ativa no plano CxH para canais e intervalos específicos. Em particular, a primeira janela de 0-500ms exibe distâncias menores que as seguintes. Aparentemente, a janela de 500-1000ms possui os maiores valores de distância para os 3 pacientes ilustrados.

O cálculo de d pode ser utilizado como uma medida para direcionar as análises futuras. Ao identificar os intervalos da tarefa em que os valores de d são mais expressivos, é possível focar nesses intervalos para uma investigação mais aprofundada. Dessa forma, o cálculo de d fornece orientações sobre os pontos de maior discrepância nos planos de complexidade por entropia. Por exemplo, a análise dos gráficos do paciente JT em comparação aos dos pacientes JM e RN (figuras 18(a) e (c), respectivamente), revela que seus dados apresentam maiores valores de d , indicando uma maior separação entre as tarefas, especialmente para $\tau \approx 6$ ms e o intervalo de 500 – 1000ms.

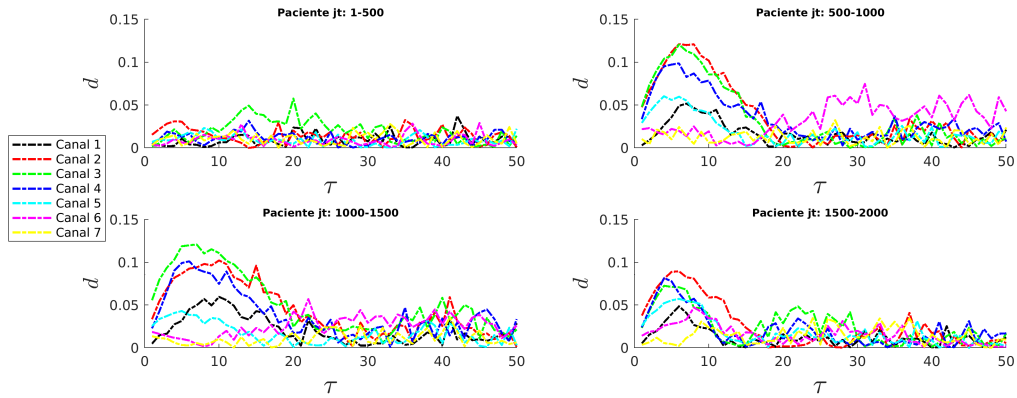
Em seguida, separamos cada trial em intervalos de tempos ainda menores. Analisamos 10 janelas de 200ms não sobrepostas. A figura 19 mostra o mapa de cores relativo a distância entre as duas condições das quatro primeiras janelas: 0-200ms, 200-400ms, 400-600ms e 600-800ms para os 67 canais no eixo y e $1 < \tau < 50$ ms no eixo x. Um exemplo é que para as janelas 3 e 4 há uma maior separação das duas condições (valores mais altos da distância) em $\tau \approx 6$ ms.

Figura 18 – distância em função de τ para cada canal dos pacientes (a) JM, (b) JT e (c) RN em quatro intervalos de tempo nao sobrepostos: 0-500ms, 500-1000ms, 1000-1500ms e 1500-2000ms.

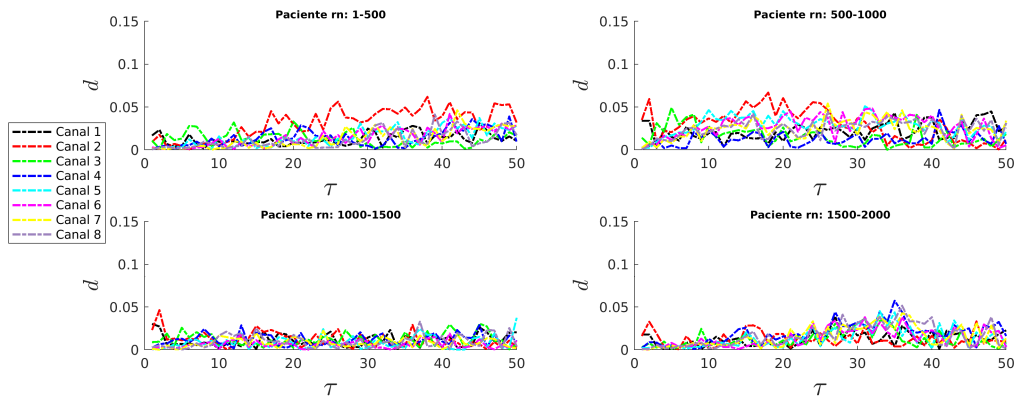
(a)



(b)



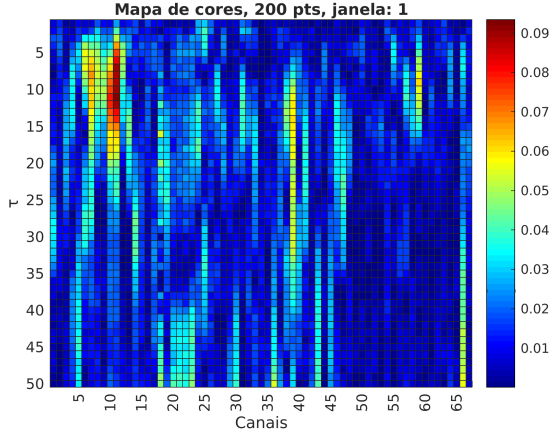
(c)



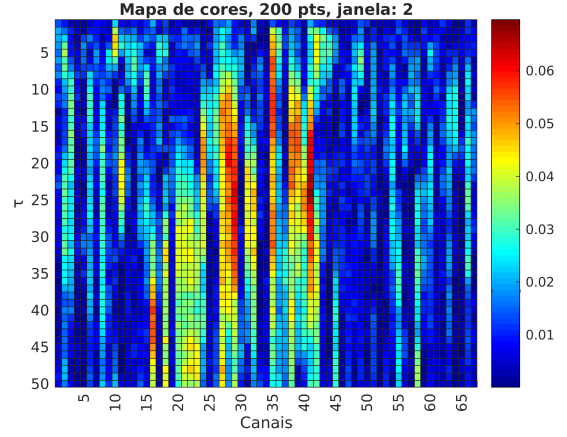
Fonte: Autor, 2024.

Figura 19 – Mapa de cores para a distância $d_{\text{blank, search}}$ para todos os 67 canais no eixo x e diferentes escalas de tempo τ no eixo y. Os índices foram calculados em janelas não sobrepostas de 200ms: (a) 0 – 200 ms, (b) 200 – 400 ms (c) 400 – 600 ms e (d) 600 – 800 ms.

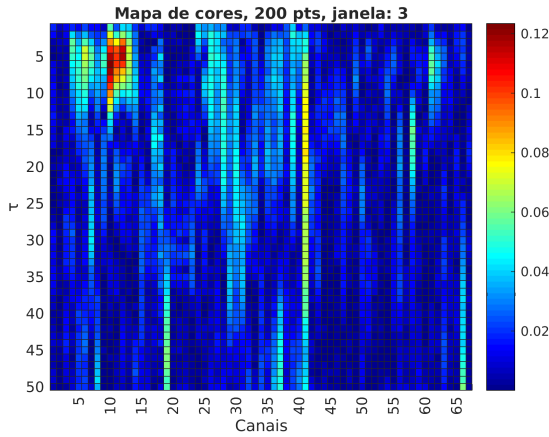
(a)



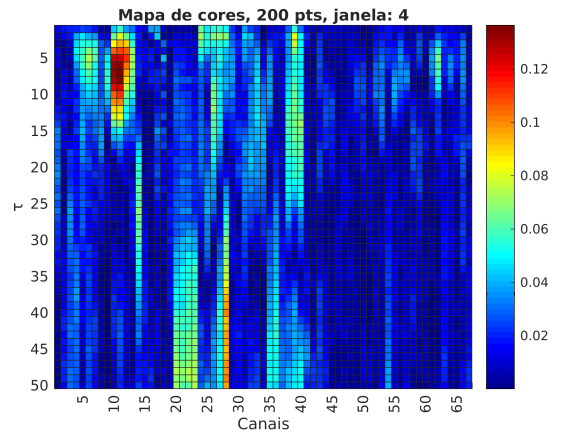
(b)



(b)



(b)



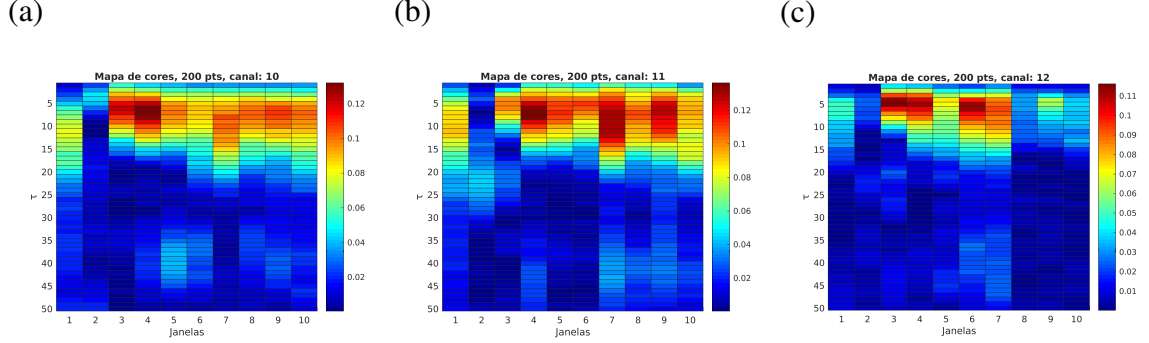
Fonte: Autor, 2024.

Na figura 20 vemos para 3 canais adjacentes do paciente JT o mapa de cores da distância em cada um dos 10 intervalos de tempo. De fato, as janelas 3 e 4 (de 400-600 e 600-800 exibem as maiores diferenças entre as duas condições. Em particular, na janela de 200-400ms a distância é praticamente nula para todos os valores de τ .

4.3 Subdividindo cada trial em janelas deslizantes com sobreposição

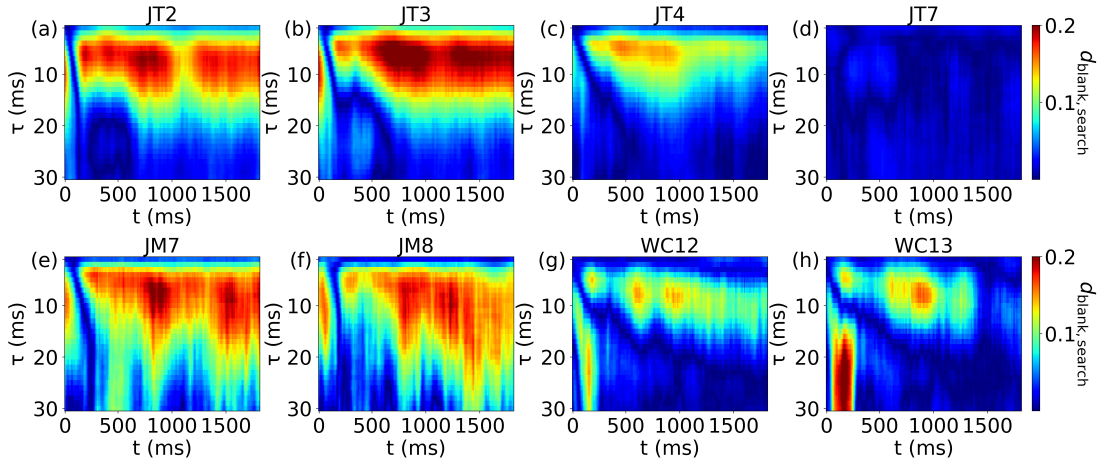
Finalmente, dividimos o intervalo de 2s em intervalos de 200 ms usando uma janela deslizante de 10 ms (0 – 200 ms, 10 – 210 ms, 20 – 220 ms, etc...). Para cada intervalo, repetimos a análise calculando entropia e complexidade para ambas as condições (tela em branco e busca) como função do tempo. Em seguida, calculamos a distância $d_{\text{blank, search}}$ e o índice de assimetria da complexidade $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ entre os dois tipos de *trials* (ver Equações 4.1 e 4.2). Verificamos para muitos eletrodos que existem intervalos de tempo específicos em que a distância entre as

Figura 20 – Mapa de calor indicando a distância Euclidiana $d_{\text{blank, search}}$ entre as duas tarefas cognitivas ao longo de 10 diferentes janelas de tempo durante os 2 segundos de duração dos trials e em várias escalas de tempo τ . Mostramos três canais espacialmente adjacentes do mesmo paciente: (a) JT2, (b) JT3 e (c) JT4.



Fonte: Autor, 2024.

Figura 21 – Diferenças entre as duas tarefas cognitivas ao longo de diferentes janelas de tempo do teste de 2 segundos e em várias escalas de tempo. Mapa de calor representando a distância $d_{\text{blank, search}}$ no plano $C \times H$ entre os *trials* de tela branca e de busca ativa para 8 canais ilustrativos de diferentes pacientes. No eixo vertical, mostramos o tempo de incorporação τ e, no eixo horizontal, o curso temporal dos *trials* de 2 segundos. Os cálculos foram feitos em janelas deslizantes de 200ms a cada 10ms.



Fonte: Autor, 2024.

duas condições é significativa.

Vale mencionar que o paciente WC também apresenta outra escala de tempo para $15 < \tau < 30$ que exibe diferenças pronunciadas entre as duas condições no início do teste (ver fig. 21 (h)). Isso também ocorre para outros eletrodos e merece maior investigação, pois sugere que diferentes processos cognitivos estão ocorrendo em diferentes escalas de tempo. No entanto, daqui em diante, focamos nossa análise em $\tau = 6$ ms, pois os resultados são mais pronunciados e robustos nessa escala de tempo para os eletrodos disponíveis.

Após identificar τ e janelas de tempo que melhor distinguem as duas condições, mostramos na Fig. 22 o plano de complexidade-entropia para os mesmos 8 canais ilustrativos da Fig.

21 (b). Podemos visualizar H e C para ambas as condições, $\tau = 6$, e dois intervalos de tempo diferentes: de 0 a 200 ms e de 500 ms a 700 ms.

Averiguamos que a análise em pequenos intervalos de tempo é útil não apenas para distinguir as duas tarefas, mas também para revelar características específicas da atividade cortical em cada condição separadamente. Inicialmente, pode-se ingenuamente esperar que a atividade dos canais e seus índices não mudem ao longo do tempo para os *trials* com tela em branco. Primeiro, porque os estímulos visuais externos permanecem os mesmos, e segundo, porque o paciente está apenas aguardando. No entanto, os níveis de atenção, expectativa e preparação podem variar consistentemente do início ao fim do teste, o que pode influenciar os valores de entropia e complexidade.

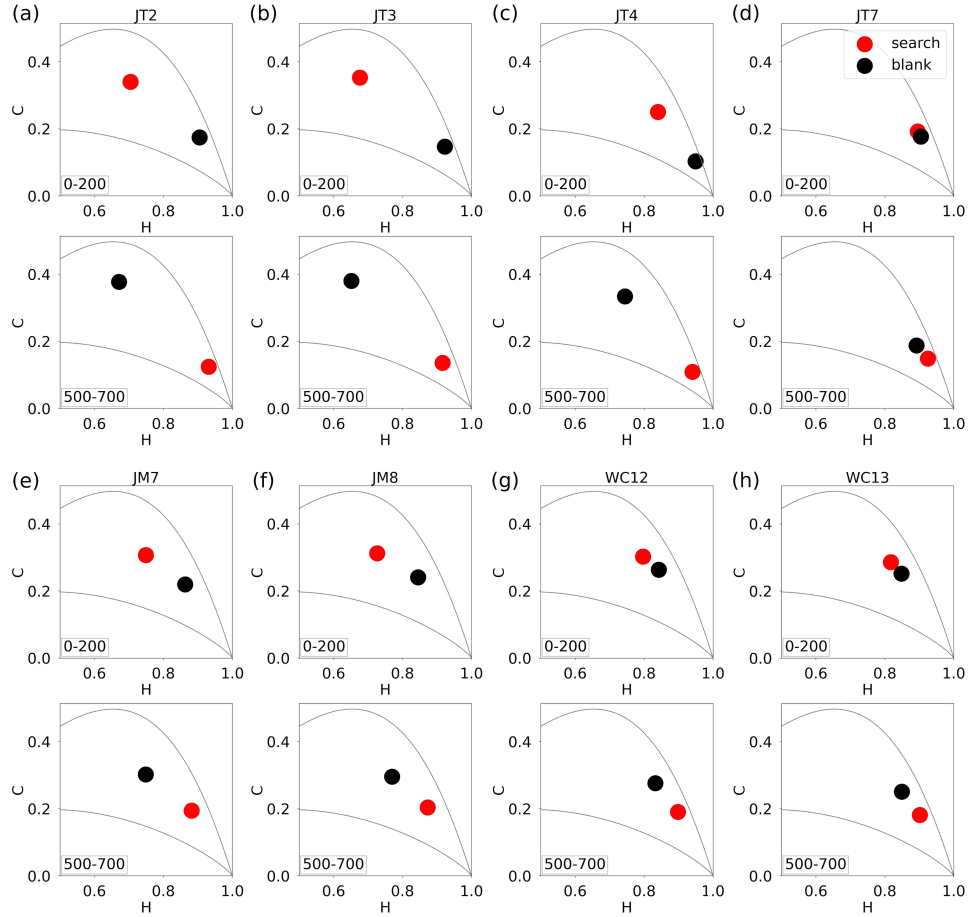
De fato, muitos canais apresentam diferenças nos índices ao longo dos intervalos de tempo durante a apresentação da tela em branco em torno de uma escala de tempo específica de $\tau = 6$ ms. Como exemplo, pode-se comparar a posição vertical dos pontos pretos para o intervalo de 0 a 200 ms e de 500 a 700 ms na figura 22(b) para o local exemplar JT3. A figura em questão mostra que C_{blank} está próximo de 0,2 no primeiro intervalo analisado (de 0 a 200 ms) e próximo de 0,4 no segundo intervalo (de 500 a 700 ms). Isso significa que a complexidade não apenas muda, mas aumenta durante a janela de espera.

Também mostramos que, em alguns pontos, há uma inversão na posição dos pontos correspondentes às condições de tela em branco e busca no plano $C \times H$ ao comparar os dois intervalos de tempo (veja a figura 22). No início do teste, a posição das tentativas de tela em branco no plano $C \times H$ está mais próxima de séries temporais ruidosas. Em contraste, no segundo intervalo, a condição de busca está mais próxima do canto inferior direito, indicando maior semelhança com dados aleatórios. Para ilustrar essa inversão, compare a posição dos pontos preto e vermelho nos intervalos de 0 a 200 ms e de 500 a 700 ms na figura 22 (b).

A inversão da posição de ambas as condições no plano $C \times H$, assim como o aumento de C_{blank} ao longo do experimento, não são resultados triviais, especialmente porque não ocorrem para todos os valores de τ nem para todos os canais. Para identificar melhor essas mudanças ao longo do experimento, além de complexidade e distância, calculamos também o índice de assimetria para a complexidade $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ para todos os sítios. Um valor positivo desse índice indica $C_{\text{search}} > C_{\text{blank}}$, enquanto um valor negativo ocorre quando $C_{\text{blank}} > C_{\text{search}}$. Portanto, a inversão de posição no plano $C \times H$ é caracterizada por uma mudança no sinal do índice de assimetria.

Na figura 23 (a), ilustramos a posição de todos os 67 canais em um mapa cerebral padrão. As cores representam os eletrodos de diferentes pacientes. Círculos maiores indicam os canais que apresentam a inversão no plano $C \times H$ ao longo do experimento para $\tau = 6$ ms. Vale mencionar que muitos eletrodos nas regiões occipitais, associadas a processos visuais, apresentam características semelhantes. Por exemplo, as posições dos eletrodos de JM e JT estão em regiões occipitais equivalentes, mas em hemisférios diferentes.

Figura 22 – Caracterizando a complexidade e a entropia para ambas as condições no plano $C \times H$ em dois momentos diferentes dos testes: de 0 a 200 ms e de 500 ms a 700 ms. (a)-(h) O plano de complexidade-entropia para os 8 canais ilustrativos mostrados na Fig. 21.

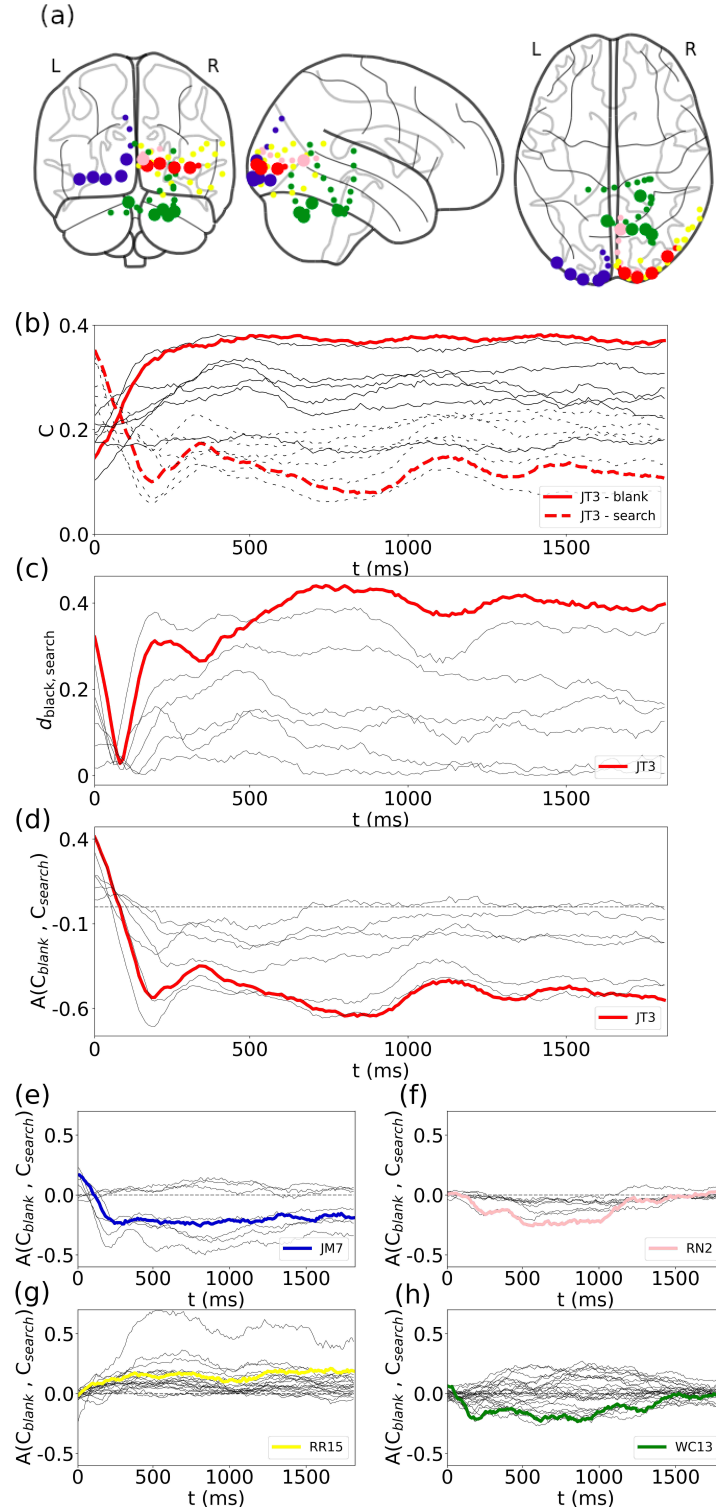


Fonte: Autor, 2024.

Assim, na figura 23 (b), mostramos a complexidade ao longo do tempo durante a duração do experimento de 2 segundos para ambas as condições, $\tau = 6$ ms, e todos os eletrodos do paciente JT. Para o canal exemplar JT3 (destacado com linhas mais espessas), C_{blank} é menor no início do experimento e aumenta durante os primeiros centenas de milissegundos. Em seguida, permanece razoavelmente estável em valores altos, próximos de 0,4. A complexidade C_{search} apresenta um comportamento oposto, com valores elevados no início do experimento que diminuem ao longo dos primeiros centenas de milissegundos. A inversão ocorre quando $C_{\text{search}} = C_{\text{blank}}$, o que acontece entre a janela de tempo de 200 ms iniciando em 80 ms e a próxima iniciando em 90 ms.

Na figura 23 (c), mostramos a distância $d_{\text{blank, search}}$ ao longo da duração do experimento de 2 segundos. Podemos observar que, para o canal JT3 e outros eletrodos, a distância diminui e se aproxima de zero quando os índices de ambas as condições trocam de posição no plano $C \times H$. Em seguida, a distância aumenta novamente e eventualmente atinge valores maiores do

Figura 23 – Caracterizando diferentes tipos de atividade dos canais para $\tau = 6$, ms. (a) Localização de todos os 67 canais de cinco sujeitos (separados por cores) em um mapa cerebral padrão. Pontos maiores indicam comportamento similar ao canal JT3. (b) Complexidade C_{search} e C_{blank} e (c) distância $d_{\text{blank, search}}$ para todos os canais do paciente JT. (d)-(h) Assimetria da complexidade $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ para todos os locais de cada paciente. Os canais podem ser separados em três grupos: valores positivos de assimetria, valores negativos ou valores próximos de zero durante a maior parte do experimento. Um eletrodo ilustrativo para cada paciente está destacado.



Fonte: Autor, 2024.

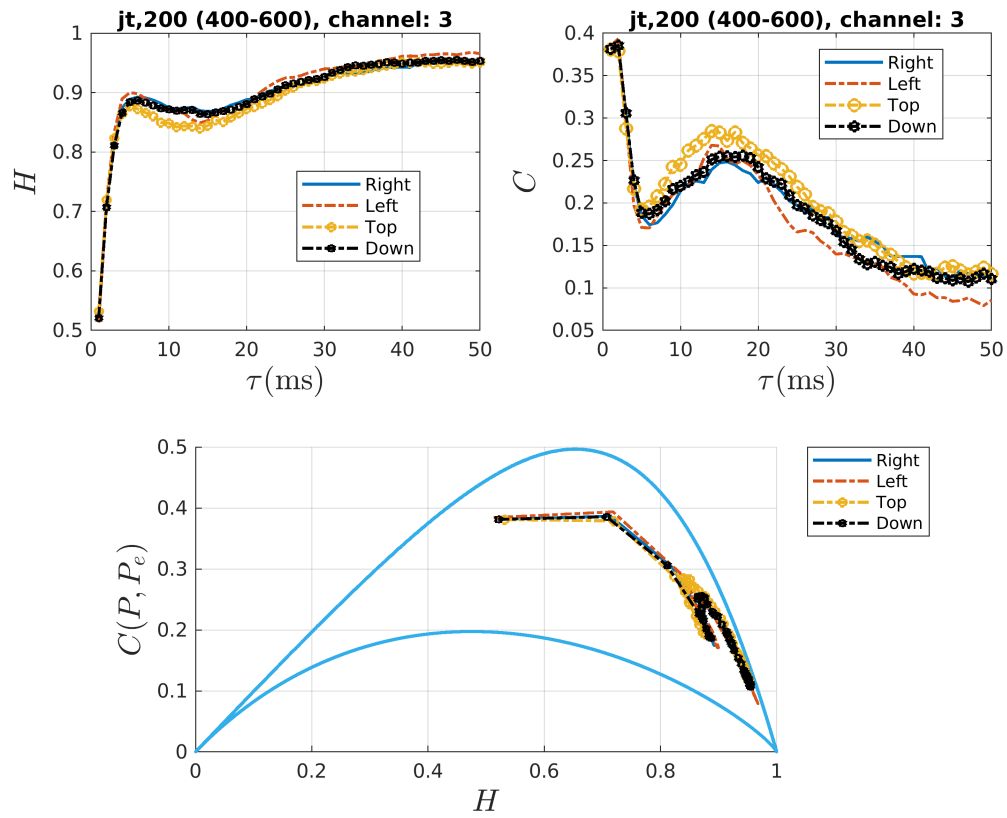
que aqueles observados no início do experimento.

Para distinguir as duas situações de grande distância, mas com posições invertidas no plano, plotamos o índice de assimetria para a complexidade $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}})$ na figura 23 (d). Observamos que o índice de assimetria para o canal JT3 começa com valores positivos e passa para valores negativos. Quanto ao sinal do índice de assimetria ao longo de todas as janelas temporais, os canais podem ser categorizados em três grupos: valores positivos, valores negativos ou valores próximos de zero na maior parte do experimento. Na figura 23 (c)-(h), mostramos todos os locais de cada paciente, destacando um eletrodo ilustrativo. Ressaltamos que apenas um paciente (RR) não apresenta nenhum eletrodo com assimetria negativa consistente. Além disso, o paciente WC é o único que possui canais que representam claramente as três condições para o índice de assimetria.

Neste cenário, hipotetizamos que cada um dos três comportamentos dos canais em relação ao índice de assimetria apresenta diferentes papéis funcionais relacionados às tarefas. Vale destacar que, por definição, locais com $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}}) \approx 0$ também apresentam valores baixos de $d_{\text{blank,search}}$. Portanto, propomos que esses canais não estejam envolvidos nas tarefas, pelo menos nesta escala temporal. Além disso, canais com $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}}) < 0$ estariam processando informações mais relacionadas à expectativa e preparação. Por outro lado, regiões com $A(C_{\text{search}}, C_{\text{blank}}) > 0$ estariam mais engajadas na tarefa de busca, por exemplo, no reconhecimento da seta, da estrela ou das cores.

Finalmente buscamos diferenças dentro das tentativas de busca ativa para diferenciar a direção da seta. Calculamos entropia e complexidade para os 30 trials de cada tipo separadamente ("para cima", "para baixo", "direita" e "esquerda") para $1 < \tau < 50$ ms. A figura 24 mostra um exemplo dessa análise para o canal JT3 em um intervalo de tempo entre 400ms e 600ms. Nesta análise preliminar não conseguimos encontrar diferenças significativas entre as quatro condições, mas acreditamos que o método é promissor para este tipo de análise.

Figura 24 – Buscando identificar diferenças entre os trials da busca ativa de acordo com a direção da seta. (a) Entropia e (b) Complexidade em função de τ para as quatro possíveis condições: seta para cima, para baixo, direita e esquerda. (c) Plano complexidade entropia.



Fonte: Autor, 2024.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Mostramos que os quantificadores da teoria da informação (como a entropia de Shannon, a complexidade estatística MPR e o plano multiescala de complexidade-entropia) são ferramentas úteis para caracterizar o processamento de informações em sinais intracranianos humanos. Estes resultados foram publicados (PAZ et al., 2024) recentemente e o artigo está em anexo a tese. Utilizando dados de ECoG de uma base de dados aberta (MILLER et al., 2010), demonstramos que é possível distinguir os períodos de espera com tela em branco e da tarefa de busca visual, além de inferir escalas de tempo relevantes para esses processos. Também identificamos regiões corticais que apresentam diferenças mais pronunciadas entre as duas tarefas cognitivas. Além disso, caracterizamos processos específicos de cada tipo de tentativa ao longo de diferentes intervalos de tempo durante as tarefas. Por fim, mostramos que, para eletrodos exemplares, isso pode ser feito em uma base tentativa a tentativa.

Nossos resultados abrem novas possibilidades para a investigação da atividade cerebral específica de respostas e estímulos. O método utilizado é potencialmente útil para quantificar outras características da tarefa visual, como identificar a direção da seta ou correlacionar os índices com aspectos comportamentais, como a taxa de respostas corretas.

Supomos que as diferenças nos índices ao longo do tempo indicam que as propriedades estatísticas dos sinais não estão relacionadas apenas ao estímulo visual externo, mas também aos processos cognitivos envolvidos nas tarefas. Em princípio, poderíamos considerar que, como os estímulos visuais externos durante as duas tarefas são diferentes, a atividade elétrica das regiões corticais visuais em cada tipo de tentativa apresentaria diferenças nas propriedades estatísticas. No entanto, se as diferenças estivessem relacionadas apenas aos estímulos externos, os índices não mudariam ao longo do tempo nas tentativas. Aqui mostramos que tanto a entropia quanto a complexidade mudam durante os 2000 ms da tentativa para eletrodos e escalas de tempo específicos. Portanto, nossos resultados indicam que as diferenças nas propriedades estatísticas dos sinais cerebrais durante as duas tarefas também estão associadas às diferenças nos processos cognitivos subjacentes ao período de espera (relacionado a níveis de atenção, expectativa e preparação) e à busca visual ativa (relacionada a reconhecer a direção da seta, buscar a estrela e, em seguida, identificar a cor da caixa correta).

Sugerimos que uma tarefa de busca visual sequencial, na qual a seta aparece primeiro e, em seguida, as caixas coloridas aparecem, seria útil para diferenciar processos cognitivos mais sutis, como reconhecer a seta, buscar a estrela e identificar a cor da caixa correta. Por exemplo, nosso método poderia ser aplicado para entender tarefas matemáticas nas quais os números aparecem sequencialmente na tela. Este método também pode ser potencialmente útil para diferenciar outras características, como a direção da seta, ou para diferentes tarefas, distinguindo números de letras ou outros símbolos.

Por fim, acreditamos que nossa análise atual também pode ser aplicada a outras tarefas cognitivas usando dados não invasivos, como EEG e MEG. Também é possível empregar o plano de complexidade-entropia para caracterizar diferenças entre grupos com transtornos neurológicos e controles, com o objetivo de ajudar no diagnóstico ou caracterizar níveis de anestesia. Esperamos que, à medida que mais dados se tornem publicamente disponíveis, seja mais fácil abordar questões neurocognitivas mais sofisticadas à luz dos métodos da teoria da informação.

REFERÊNCIAS

- AZIZ, W.; ARIF, M. Complexity analysis of stride interval time series by threshold dependent symbolic entropy. *European journal of applied physiology*, Springer, v. 98, p. 30–40, 2006. Citado na página 18.
- BANDT, C.; POMPE, B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical review letters*, APS, v. 88, n. 17, p. 174102, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 26.
- BINNEY, J. J. et al. *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. Citado na página 22.
- BREAKSPEAR, M.; STAM, C. J. Dynamics of a neural system with a multiscale architecture. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, The Royal Society London, v. 360, n. 1457, p. 1051–1074, 2005. Citado na página 11.
- CHEN, S. X. Probability density function estimation using gamma kernels. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 52, p. 471–480, 2000. Citado na página 23.
- CORDEIRO, V. L. et al. Aplicações da teoria da informação à neurociência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, 2018. Citado na página 18.
- CRONE, N. E. et al. Functional mapping of human sensorimotor cortex with electrocorticographic spectral analysis. ii. event-related synchronization in the gamma band. *Brain: a journal of neurology*, v. 121, n. 12, p. 2301–2315, 1998. Citado na página 42.
- ELETROCORTICOGRAFIA. <<https://images.app.goo.gl/4fVuCzQ8R74xpbLp7>>. Acessado em 11 de dezembro de 2024. Citado na página 42.
- ERMENTROUT, B.; Terman, D. H. *Mathematical foundations of neuroscience*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 35. Citado na página 16.
- FRIEDEN, B. R.; SOFFER, B. H. Lagrangians of physics and the game of fisher-information transfer. *Physical Review E*, APS, v. 52, n. 3, p. 2274, 1995. Citado na página 22.
- GROSSE, I. et al. Analysis of symbolic sequences using the jensen-shannon divergence. *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 4, p. 041905, 2002. Citado na página 21.
- HAYKIN, S. *Redes neurais: princípios e prática*. [S.l.]: Bookman Editora, 2001. Citado na página 19.
- IZHIKEVICH, E. M. Simple model of spiking neurons. *IEEE Transactions on neural networks*, IEEE, v. 14, n. 6, p. 1569–1572, 2003. Citado na página 17.
- KANDEL, E. et al. *Princípios de Neurociências - 5.ed.* AMGH Editora, 2014. ISBN 9788580554069. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cq1l_BAAQBAJ>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 14 e 15.
- KOCH, C. *Biophysics of computation: information processing in single neurons*. [S.l.]: Oxford university press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.

- KOWALSKI, A. et al. Bandt–pompe approach to the classical-quantum transition. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 233, n. 1, p. 21–31, 2007. Citado na página 26.
- KRIPPENDORFF, K. Mathematical theory of communication. *Departmental Papers (ASC)*, p. 169, 2009. Citado na página 20.
- KUCEWICZ, M. T. et al. Evidence for verbal memory enhancement with electrical brain stimulation in the lateral temporal cortex. *Brain*, Oxford University Press, v. 141, n. 4, p. 971–978, 2018. Citado na página 43.
- KURUVILLA, A.; FLINK, R. Intraoperative electrocorticography in epilepsy surgery: useful or not? *Seizure*, Elsevier, v. 12, n. 8, p. 577–584, 2003. Citado na página 43.
- LUCAS, H. B. d. et al. Uma abordagem de informação simbólica para caracterizar diferenças relacionadas à resposta na atividade cortical durante uma tarefa go/no-go. Universidade Federal de Alagoas, 2021. Citado na página 11.
- LUCAS, H. B. de et al. A symbolic information approach to characterize response-related differences in cortical activity during a go/no-go task. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 104, n. 4, p. 4401–4411, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 38, 39, 40, 41 e 47.
- MARTIN, M.; PLASTINO, A.; ROSSO, O. Statistical complexity and disequilibrium. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 311, n. 2-3, p. 126–132, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- MARTIN, M.; PLASTINO, A.; ROSSO, O. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 369, n. 2, p. 439–462, 2006. Citado na página 21.
- MATIAS, F. S. et al. Anticipated synchronization in a biologically plausible model of neuronal motifs. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, APS, v. 84, n. 2, p. 021922, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- MCKENNA, T.; MCMULLEN, T.; SHLESINGER, M. The brain as a dynamic physical system. *Neuroscience*, Elsevier, v. 60, n. 3, p. 587–605, 1994. Citado na página 18.
- MILLER, K. J. et al. Dynamic modulation of local population activity by rhythm phase in human occipital cortex during a visual search task. *Frontiers in human neuroscience*, Frontiers Research Foundation, v. 4, p. 197, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 8, 43, 44 e 58.
- MILLER, K. J. et al. Spontaneous decoding of the timing and content of human object perception from cortical surface recordings reveals complementary information in the event-related potential and broadband spectral change. *PLoS computational biology*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 12, n. 1, p. e1004660, 2016. Citado na página 42.
- MISCHAIKOW, K. et al. Construction of symbolic dynamics from experimental time series. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 6, p. 1144, 1999. Citado na página 23.
- MONTANI, F. et al. A symbolic information approach to determine anticipated and delayed synchronization in neuronal circuit models. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 373, n. 2056, p. 20150110, 2015. Citado na página 18.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 18.

PAZ, Í. R. S. C. D. et al. Symbolic information approach applied to human intracranial data to characterize and distinguish different cognitive processes. *Physical Review E*, American Physical Society (APS), v. 110, n. 2, p. 024403, ago. 2024. ISSN 2470-0053. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 58.

PHILBECK, T.; DAVIS, N. The fourth industrial revolution. *Journal of International Affairs*, JSTOR, v. 72, n. 1, p. 17–22, 2018. Citado na página 18.

PLASTINO, A.; PLASTINO, A. Symmetries of the fokker-planck equation and the fisher-frieden arrow of time. *Physical Review E*, APS, v. 54, n. 4, p. 4423, 1996. Citado na página 22.

RAMÍREZ, J. F. N. Factorización de permutaciones. *Universitas Scientiarum*, v. 8, n. 1, p. 25–29, 2003. Citado na página 31.

ROSSO, O. A. et al. Wavelet entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals. *Journal of neuroscience methods*, Elsevier, v. 105, n. 1, p. 65–75, 2001. Citado na página 18.

ROSSO, O. A. et al. Causality and the entropy–complexity plane: Robustness and missing ordinal patterns. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 391, n. 1-2, p. 42–55, 2012. Citado na página 23.

ROSSO, O. A.; CRAIG, H.; MOSCATO, P. Shakespeare and other english renaissance authors as characterized by information theory complexity quantifiers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 6, p. 916–926, 2009. Citado na página 23.

RUFFINO, P. R. C. Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos. 2012. Citado na página 11.

SACO, P. M. et al. Entropy analysis of the dynamics of el niño/southern oscillation during the holocene. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 21, p. 5022–5027, 2010. Citado na página 24.

SCHWARZ, K. *Factoradic Permutation*. Disponível em: <<https://www.keithschwarz.com/interesting/code/?dir=factoradic-permutation>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 34 e 35.

SETHNA, J. P. *Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2021. v. 14. Citado na página 22.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

STONE, J. V. *Information theory: a tutorial introduction*. Sebtel Press, 2015. Citado na página 18.

TRAVERSARO, F. et al. Bandt-pompe symbolization dynamics for time series with tied values: A data-driven approach. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 7, p. 075502, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 30.

VILLATE, J. *Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima*. 2005. Citado na página 11.

WANG, Y. et al. The dynamics of language network interactions in lexical selection: an intracranial eeg study. *Cerebral Cortex*, Oxford University Press, v. 31, n. 4, p. 2058–2070, 2021. Citado na página 43.

WILLEMS, F. Elements of information theory [book review]. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE Press Piscataway, NJ, USA, v. 39, n. 1, p. 313–315, 2006. Citado na página 20.

ZUNINO, L.; SORIANO, M. C.; ROSSO, O. A. Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach. *Physical Review E*, APS, v. 86, n. 4, p. 046210, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 26.

6 APÊNDICES

6.1 Apêndice A - Artigo publicado

Este apêndice apresenta o artigo intitulado "A symbolic information approach applied to human intracranial data to characterize and distinguish different cognitive processes", que foi publicado como parte desta dissertação.

A symbolic information approach applied to human intracranial data to characterize and distinguish different cognitive processes

Ícaro Rodolfo Soares Coelho Da Paz,¹ Pedro F. A. Silva,¹ Helena Bordini de Lucas,¹ Sérgio H. A. Lira,¹ Osvaldo A. Rosso,¹ and Fernanda Selingardi Matias^{1,*}

¹*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas 57072-970 Brazil.*

How the human brain processes information during different cognitive tasks is one of the greatest questions in contemporary neuroscience. Understanding the statistical properties of brain signals during specific activities is one promising way to address this question. Here we analyze freely available data from implanted electrocorticography (ECoG) in five human subjects during two different cognitive tasks in the light of information theory quantifiers ideas. We employ a symbolic information approach to determine the probability distribution function associated with the time series from different cortical areas. Then we utilize these probabilities to calculate the associated Shannon entropy and a statistical complexity measure based on the disequilibrium between the actual time series and one with a uniform probability distribution function. We show that an Euclidian distance in the complexity-entropy plane and an asymmetry index for complexity are useful for comparing the two conditions. We show that our method can distinguish visual search epochs from blank screen intervals in different electrodes and patients. By using a multi-scale approach and embedding time delays to downsample the data, we find important time scales in which the relevant information is being processed. We also determine cortical regions and time intervals along the 2-second-long trials that present more pronounced differences between the two cognitive tasks. Finally, we show that the method is useful to distinguish cognitive processes using brain activity on a trial-by-trial basis.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

Understanding the statistical properties of the human brain activity during different cognitive processes is a great step toward comprehending how the brain processes information. Characterizing these properties in different cortical regions, and time scales can contribute to this issue. Electrophysiological data from intracranial electrodes in the human brain are promising to address these questions since it provides millisecond temporal resolution, clear signals from specific brain areas, and a good signal-to-noise rate [1]. However, the overall access to intracranial data is still rare and remains somewhat exclusive to the experimentalists who have produced it.

Here, we analyze freely available data from implanted electrocorticographic (ECoG) measurements of brain surface potentials in five human subjects during visual cognitive tasks [2]. It has been previously reported for this data that a comparison of visual search trials with interspersed blank screen intervals presents changes in the raw potential, in the amplitude of rhythmic activity, and in the decoupled broadband spectral amplitude [2]. In the present work, we extend this comparison between active visual search tasks and waiting windows by using statistical tools that can discriminate which brain areas are more engaged in one of the trial types during specific time intervals.

To characterize different features of time series we em-

ploy two time causal quantifiers based on Information Theory: Shannon entropy (see Eq. 1)[3], and the corresponding Martín-Platino-Rosso (MPR) statistical complexity (see Eq. 3), based on the disequilibrium between the actual time series and one with a uniform probability distribution function [4–8]. Using the MPR definition of complexity, both extremes of order and disorder present low complexity. For example, a constant time series or a very noisy time series would present low complexity. In the same fashion, a perfect crystal or a random distribution of atoms are not complex systems. We assign each time series under study a position in a two-dimensional space spanned by the entropy and the statistical complexity measure: the complexity-entropy plane $C \times H$. These quantifiers are evaluated using the Bandt-Pompe symbolization methodology [9], which includes naturally the time causal ordering provided by the time-series data in the corresponding associate probability distribution function (PDF).

This approach was originally introduced to distinguish chaotic from stochastic systems in time series analysis [6, 7]. Recently, it has been successfully applied to study brain signals: to estimate time differences during phase synchronization [10], to show that complexity is maximized close to criticality in cortical states [11, 12], to distinguish cortical states using EEG data [13, 14], to characterize neurological diseases using MEG [15], as well as to study neuronal activity [10, 16, 17]. Furthermore, it has been applied to monkey LFP to estimate response-related differences between Go and No-Go trials [18]. As far as we know it has not been applied to intracranial human data before.

*fernanda@fis.ufal.br

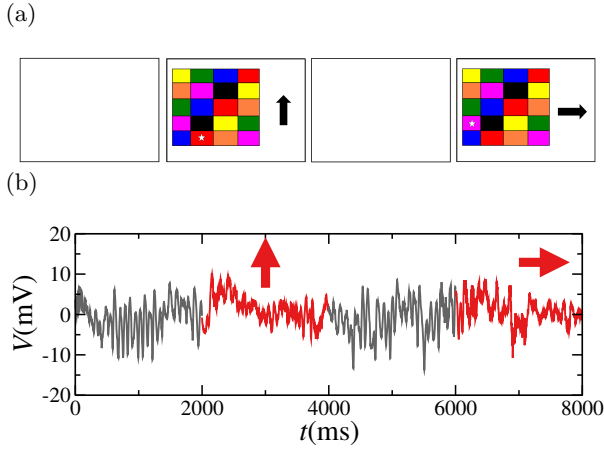


FIG. 1: Experimental paradigm. (a) Illustration of the screen during the time course of the experiment: 2000 ms of waiting periods observing a white screen (called *blank*) alternated with 2000 ms of an active visual search task (called *search*). (b) Time series of the recorded activity of an exemplar electrode (JT3) at an occipital area during the two *blank* screens and the two *search* periods shown in (a).

Here we show that our method can distinguish visual search epochs from blank screen intervals in specific brain regions, for different time intervals, and at relevant time scales. The experimental data corresponding to ECoG, are presented in Sec. II. The Bandt-Pompe symbolization method is explained in Sec. III. In Sec. IV we introduce the Information Theory quantifiers employed in our analysis. In Sec. V, we report our results for all 67 electrodes, focusing on the ones with pronounced differences between trial types from different patients. At the end of this section, we also show that the method can distinguish two cognitive tasks on a trial-by-trial basis. Finally, concluding remarks, perspectives, and a brief discussion of the significance of our findings for neuroscience are presented in Sec. VI.

II. EXPERIMENTAL DATA

We have analyzed freely available data from 67 implanted electrocorticographic electrodes in five human subjects during a visual cognitive paradigm [2]. Ethics statement: All patients participated in a purely voluntary manner, after providing informed written consent, under experimental protocols approved by the Institutional Review Board of the University of Washington (#12193). All patient data was anonymized according to IRB protocol, in accordance with HIPAA mandate. These data originally appeared in the manuscript “Dynamic modulation of local population activity by rhythm phase in human occipital cortex during a visual search task” published in *Frontiers in Human Neuroscience* in 2010 [2].

Sub-dural grids and strips composed of platinum elec-

trodes were strategically positioned over the frontal, parietal, temporal, and occipital cortex regions to facilitate prolonged clinical observation and accurate localization of seizure foci. The electrodes, featuring a 4 mm diameter and + 1 cm inter-electrode distance, were utilized for data collection. The potentials were sampled at a rate of 1000 Hz (one point every 1 ms) in relation to a scalp reference and ground. These signals underwent an instrument-imposed band-pass filter, ranging from 0.15 to 200 Hz.

The experimental procedure involved two different visual cognitive tasks in which subjects engaged with stimuli displayed on an LCD monitor positioned 1 meter away. The active *search* task comprised 120 trials, each consisting of 2000 ms visual search stimuli (referred to hereafter as *search* trials) interleaved with 2000 ms inter-stimulus intervals (ISIs), during which the screen remained blank (a simple waiting task referred to hereafter as *blank* trials). See Fig. 1(a) for an example of the observed sequence of intercalated trial types in the screen. Each visual search stimulus comprised three elements: (1) a 5-row by 4-column array of colored boxes, each measuring 1 cm by 1 cm, (2) a white star positioned at the center of one of these boxes, and (3) a black arrow (measuring 2 cm by 1 cm) situated 1.5 cm to the right of the right-most box in the middle row. The placement of the star and arrow within the colored boxes was randomized, with the arrow pointing in one of four cardinal directions: “right”, “left”, “up”, or “down”. Participants were tasked with identifying the color of the box adjacent to the star in the direction indicated by the arrow. For instance, in Fig. 1(a), the two examples of visual tasks should have been correctly answered as “black” and “black”. They repeat the task for 120 trials (30 trials for each direction) [2].

As a first step to our data analysis, for each electrode, we have separately concatenated the time series of the 120 ISIs (*blank* trials) and the 120 stimuli (*search* trials). In Fig. 1(b) we show the electric activity of an exemplar electrode at the occipital cortex for two trials of the blank screen (before concatenation) alternated by two trials of visual search task (one for an “up” arrow and other for a “right” arrow). Therefore, for each channel and each trial type, we determine the information theory indexes associated with its time series as described below.

III. THE BANDT-POMPE SYMBOLIZATION METHOD

In order to calculate any information theory quantifier, one should obtain a probability distribution function (PDF) from a time series $X(t) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ representing the evolution dynamics of the system under study, where x_j is the studied variable evaluated at time t_j , and the collection of t_j are usually equally spaced. There is no unique answer for the best procedure to associate a time series with a PDF, and in fact, different

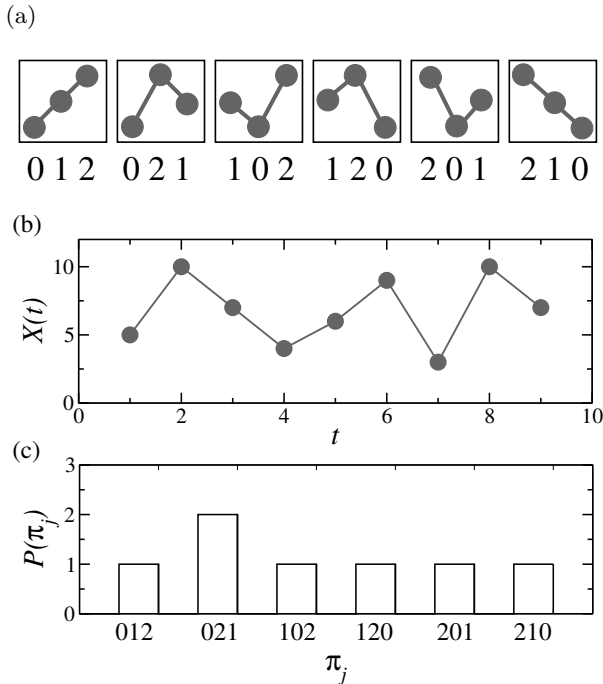


FIG. 2: Characterizing the symbolic representation of time series. (a) The six possible symbols associated with permutations π_j for ordinal patterns of length $D = 3$. (b) Example of a very simple time series $X(t) = \{5, 10, 7, 4, 6, 9, 3, 10, 7\}$ and (c) its own non-normalized probability density function (PDF).

proposals can be found. Here, we use a symbolic representation of a time series introduced by Bandt & Pompe (BP) [9] for evaluating the PDF. This symbolization technique consists of extracting the ordinal patterns of length D , associated to each time t of our time series, generated by $\mathbf{s}(t) = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+D-1}, x_{t+D})$. This corresponds to indexing each t to the D -dimensional vector $\mathbf{s}(t)$. The greater the value of D , the more information is incorporated into the vectors.

We should identify and count the number of occurrences of all $D!$ symbols π_j of length D (with $j = 1, 2, \dots, D!$, see the six π_j for $D = 3$ in Fig. 2(a)). The specific j -th ordinal pattern associated to $\mathbf{s}(t)$ is the permutation $\pi_j = (r_0, r_1, \dots, r_{D-1})_j$ of $(0, 1, \dots, D-1)$ which guarantees that $x_{t+r_0} \leq x_{t+r_1} \leq \dots \leq x_{t+r_{(D-2)}} \leq x_{t+r_{(D-1)}}$. In order to get a unique result, we set $r_i < r_{i+1}$ if $x_{t+r_i} = x_{t+r_{i+1}}$. We follow the chronological index permutation mapping for π_j [19]. In other words, each permutation π_j is one of our possible symbols and we have $D!$ different symbols. Therefore, the pertinent symbolic data is created by the following rules: (i) grouping the D consecutive values of the time series points in the vector $\mathbf{s}(t)$, (ii) indexing a symbol π_j to the vector $\mathbf{s}(t)$ by reordering the embedded data in ascending order using the permutation π_j . Therefore, for each x_t (with $t = 1, 2, \dots, M - (D - 1)$), we can associate a symbol π_j .

Afterward, it is possible to quantify the diversity of the ordering symbols (patterns) derived from a scalar time

series by counting how many times each one of the $D!$ different permutations π_j have been found in the dataset. Then, to calculate the PDF (for a specific D), we find $P \equiv \{p_j; j = 1, 2, \dots, D!\}$, where p_j is the probability to find the j -th symbol π_j in our time series. This procedure is essential to a phase-space reconstruction with embedding dimension (pattern length) D . For practical purposes, BP suggested to use $3 \leq D \leq 7$.

To have an example, choosing $D = 3$, all the 6 possible symbols associated with the permutations π_j are presented in Fig. 2(a). Considering the time series $X(t) = \{5, 10, 7, 4, 6, 9, 3, 10, 7\}$ as an example (see Fig. 2(b)), the first vector is $\mathbf{s}(t = 1) = (5, 10, 7)$, corresponding to the permutation $\pi_2 = (0, 2, 1)$; the second vector is $\mathbf{s}(t = 2) = (10, 7, 4)$, corresponding to the permutation $\pi_6 = (2, 1, 0)$. Similarly, one can find the other five vectors $\mathbf{s}(t)$ and its respective π_j . The correspondent non-normalized PDF is shown in Fig. 2(c).

We can also repeat the analysis including a time embedding (also called a time delay) τ to evaluate the PDF in different time scales. In order to do that, we skip every $\tau - 1$ points of our time series $X(t)$ in order to find and count the symbols. In the previous example we use $\tau = 1$ and consider every point in $X(t)$. For $\tau = 2$ we would skip every other point in such a way that the first vector is $\mathbf{s}(t = 1) = (5, 7, 6)$, corresponding to the permutation $\pi_2 = (0, 2, 1)$; the second vector is $\mathbf{s}(t = 2) = (10, 4, 9)$, corresponding to the permutation $\pi_5 = (2, 0, 1)$; the third vector is $\mathbf{s}(t = 3) = (7, 6, 3)$, corresponding to the permutation $\pi_6 = (2, 1, 0)$. Therefore, to each time series $X(t)$ we can associate many PDFs, each one for a different value of the time delay τ . Unless otherwise stated here we evaluate the PDF for $1 \leq \tau \leq 50$. Since the sampling rate of our data is 1000 Hz, τ can be represented in milliseconds.

It is noteworthy that the symbol sequences emerge from the time series without the need for model-based assumptions. Although this approach may result in some loss of fine-grained details pertaining to the original series' amplitude, it effectively captures the temporal structure of the time series, providing insights into the system's temporal correlation [31,32]. It is important to emphasize that the BP methodology only requires a weak stationarity assumption: for $k \leq D$, the probability for $x_t \leq x_{t+k}$ should not depend on t .

IV. INFORMATION THEORY QUANTIFIERS: PERMUTATION ENTROPY AND STATISTICAL COMPLEXITY

After associate a probability distribution function (PDF) to the time series, we can evaluate the corresponding Information Theory quantifiers. The first Information Theory index that we introduce is the Shannon's

logarithmic information measure [20], defined by:

$$S[P] = - \sum_{j=1}^N p_j \ln(p_j) . \quad (1)$$

This functional is equal to zero when we are able to correctly predict the outcome every time. For example, for linearly increasing time series all probabilities are zero but one which is equal to 1. The corresponding PDF will be $P_0 = \{p_k = 1 \text{ and } p_j = 0, \forall j \neq k, j = 1, \dots, N-1\}$, then $S[P_0] = 0$. By contrast, the entropy is maximized for the uniform distribution $P_e = \{p_j = 1/N, \forall j = 1, 2, \dots, N\}$, being $S_{max} = S[P_e] = \ln(N)$. We define the normalized Shannon entropy by

$$H[P] = \frac{S[P]}{S_{max}} = \frac{S[P]}{\ln(N)} , \quad (2)$$

and $0 \leq H[P] \leq 1$, which give a measure of the information content of the corresponding PDF (P).

The second Information Theory based quantifier that we introduced is the Statistical Complexity, defined by functional product form [4, 6]

$$C[P, P_e] = H[P] \cdot Q_J[P, P_e] . \quad (3)$$

Where, $H[P]$ is the normalized Shannon entropy (see Eq. (2)) and $Q_J[P, P_e]$ represent the disequilibrium, which is defined in terms of the Jensen–Shannon divergence [21] as:

$$Q_J[P, P_e] = Q_0 J[P, P_e] , \quad (4)$$

where

$$J[P, P_e] = S \left[\frac{(P + P_e)}{2} \right] - \frac{S[P]}{2} - \frac{S[P_e]}{2} , \quad (5)$$

and Q_0 is a normalization constant ($0 \leq Q_J \leq 1$), equal to the inverse of the maximum possible value of $J[P, P_e]$, that is $Q_0 = 1/J[P_0, P_e]$. In this way, also the statistical complexity is a normalized quantity, $0 \leq C[P, P_e] \leq 1$. It is interesting to note, that the statistical complexity give additional information in relation to the entropy, due to its dependence on two PDFs. Moreover, it can be shown that for a given value of the normalized entropy H , the corresponding complexity varies in a range of values given by C_{min} and C_{max} , and these values depend only on the dimension of the PDF considered and the functional form chosen for the entropy [22].

Therefore, we can define a distance between entropy and complexity for two conditions i and j as the simple Euclidean distance:

$$d_{i,j} = \sqrt{(H_i - H_j)^2 + (C_i - C_j)^2} . \quad (6)$$

We can also calculate a normalized asymmetry index for complexity as [18]:

$$A(C_{search}, C_{blank}) = \frac{C_{search} - C_{blank}}{C_{search} + C_{blank}} . \quad (7)$$

Both $d_{blank,search}$ and $A(C_{search}, C_{blank})$ are independently calculated for each τ .

Applying this methodology to the electrical activity from each channel, we calculate entropy H_i , and complexity C_i for each trial type ($i = blank, task$) as a function of the time embedding τ using time series with 240000 time points (120 trials x 2000 milliseconds). Then we apply a sliding window in each 2000 ms trial, dividing it into smaller windows of 100 ms and 200 ms (starting every 10 ms) and concatenating the correspondent i -th window of each trial of the same type. For this analysis, our smallest time series has 3000 time points (30 trials x 100 milliseconds). Results are consistent and qualitatively similar when comparing 100 ms and 200 ms windows. Therefore, we show the results for 200 ms windows. In figures related to the sliding window, we associate each window with the time of the beginning of the window. This means, for example, that the entropy at $t = 500$ ms is in fact the entropy calculated during the interval from 500 to 700 ms.

Finally, we analyze the data on a trial-by-trial basis. Using the 2000 points to obtain 120 values of H_{blank} , C_{blank} , H_{search} , and C_{search} (one for each trial of the specific type). We have also applied the sliding window to each trial and calculated H and C using only 200 points for each 200 ms long window. Results are qualitative similar among different values of the length of the ordinal pattern D which determines the number of possible symbols $D!$. Unless otherwise stated, we show the results for $D = 6$.

V. RESULTS

A. Applying information theory quantifiers to characterize and distinguish trial types

We employ information theory quantifiers H and C to study brain signals and characterize cortical information processes during an experimental paradigm related to two visual cognitive tasks. We show that our method is able to distinguish the two conditions: visual *search* epochs related to an active task, from *blank* screen intervals related to waiting periods. We show that some cortical regions and specific time scales exhibit more pronounced differences between the two trial types: *blank* and *search*. We have separately analyzed the time series of all *blank* trials, as well as of all *search* trials for the 67 electrodes of five patients.

An illustrative example of the time series with the electrical activity of a few trials for an exemplar electrode (called JT3) is shown in Fig. 1(b). First, we calculate entropy H_{blank} and complexity C_{blank} as a function of the embedding time τ for all the 120 *blank* trials concatenated along the total 2 s duration of each trial (see black curves in Fig. 3(a) and (b) and Sec. II for more details). Then we calculate entropy H_{search} and complexity C_{search} in a similar way for all the 120 *search*

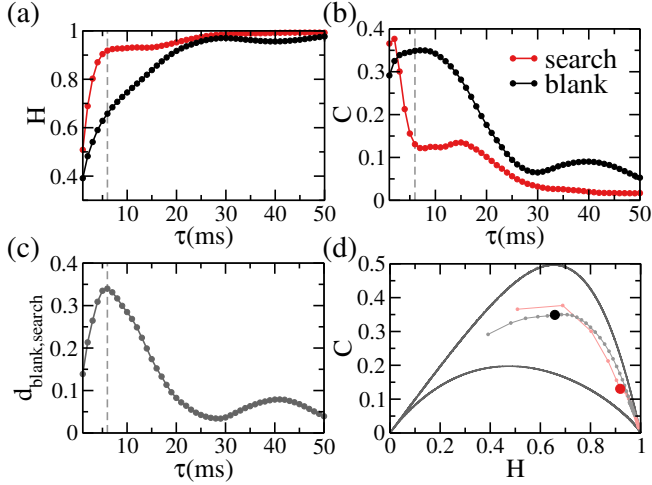


FIG. 3: Information theory quantifiers to characterize different cognitive tasks: waiting window during a *blank* screen trial (black) and visual *search* task (red). (a) Entropy H and (b) Statistical complexity C as a function of the embedding time delay τ . (c) Euclidean distance $d_{blank,search}$ in the $C \times H$ plane between the two tasks (see Eq.6) (d) Complexity-entropy plane highlighting $\tau = 6$ ms which maximizes the distance for this exemplar electrode. The indexes were calculated using the time series which is partially shown in Fig. 1(b).

trials concatenated (see red curves in Fig. 3(a) and (b)).

Regarding the effect of using the embedding time τ to explore multiple time scales from 1 ms up to 50 ms, three following results should be emphasized. i) The indexes H and C present nontrivial dependence with the embedding time τ which indicates that the information process occurring in this cortical region is different for different time scales. ii) Some time scales seem to work better for distinguishing *search* trials from *blank* trials. Especially for $3 \text{ ms} < \tau < 12 \text{ ms}$ there is a clear separation of the indexes regarding the trial type. iii) Larger values of τ ($\tau > 30 \text{ ms}$) present larger H and smaller C , for both *blank* and *search* trial types, which characterizes noisier time series.

Furthermore, for each τ we calculate the Euclidean distance $d_{blank,search}$ in the complexity-entropy plane between the two trial types (see Fig. 3(c) and Eq. 6). For the exemplar electrode JT3, the distance is maximized around $\tau = 6 \text{ ms}$. We can use the 2D multi-scale complexity-entropy plane ($C \times H$) as an extra way to visualize our results (see Fig. 3(d)). In this plane, we can better characterize each cognitive task as well as visualize how the separation between different time series changes as τ is varied. For instance, in Fig. 3(d), the highlighted dots depict the positions in the $C \times H$ plane for *blank* and *search* for a fixed $\tau = 6 \text{ ms}$, and the distance between them can be readily visualized. As we increase τ , the points in the $C \times H$ plane move along the grey and red lines, where both move in the direction of the lower

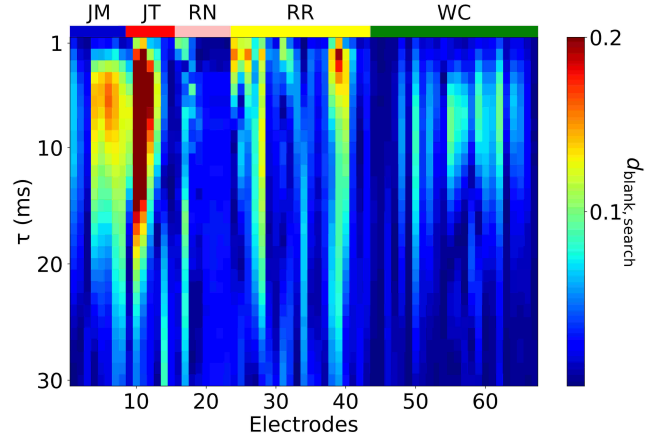


FIG. 4: Identifying which channels and time scales can better distinguish the two cognitive tasks: *blank* screen and visual *search* task. Heatmap representing the distance $d_{blank,search}$ in the complexity-entropy plane between two trial types, for all 67 electrodes on the y-axis and time delays τ up to 30 ms in the x-axis.

right corner related to noisier series.

In order to identify at a glance both the electrode channels and time scales where we can better distinguish the different trial types, in Fig. 4 we plot the heatmap of the distance $d_{blank,search}$ for all analyzed electrodes and values of τ . The vertical axis indicates the embedding time τ and the horizontal axis shows the 67 channels from five patients in the following order: 8 electrodes from subject JM, 7 from JT, 8 from RN, 20 from RR, and 24 from WC. The electrode 11 is the exemplar JT3 electrode shown in Figures 1 and 3. The color code displayed in the figure shows the magnitude of the distance $d_{blank,search}$ between trials.

As a matter of fact, in Fig. 4 we notice that red spots on the map indicate where $d_{blank,search}$ is larger. This means that, considering the entire 2 s time series of activity at once in our analysis, only some good channels can clearly separate the two trial types. Moreover, the time scale around $\tau = 6 \text{ ms}$ is a useful one to distinguish the activity type in several of these good electrodes, not only in the exemplar one. These pronounced differences between the two conditions for many electrodes from different patients at $\tau = 6 \text{ ms}$ suggests that relevant information processes are happening at this time scale.

In addition, some channels from the same subject that are spatially located close to each other present considerable smoothness in the heatmap patterns, which reveals robustness in our results. For example, many occipital channels from JM and JT present large values of $d_{blank,search}$. All patients present some channels that are better in distinguishing between the two conditions than others, which indicates that not all sites are engaged in the tasks.

Therefore, our results suggest that regions presenting

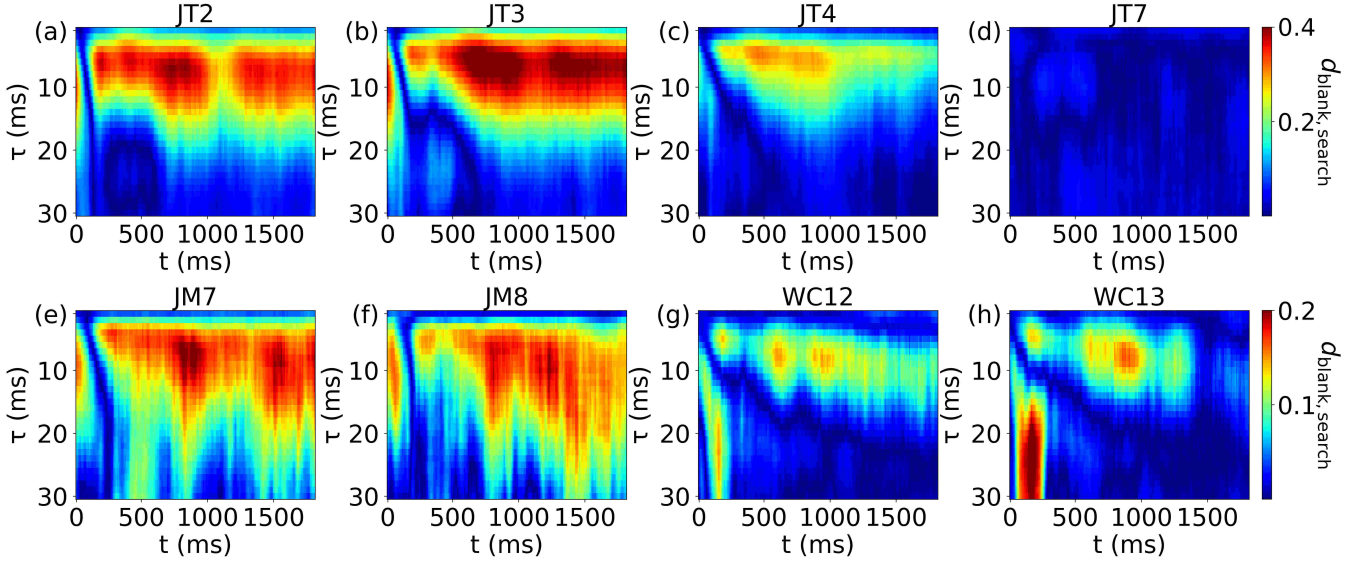


FIG. 5: Differences between the two cognitive tasks along different time windows of the 2-second-long trial and multiple time-scales. Heatmap representing the distance $d_{blank,search}$ in the $C \times H$ plane between *blank* and *search* trials for 8 illustrative channels from different patients. On the vertical axis, we show the time embedding τ and on the horizontal axis, we show the time course of the 2-second-long trials.

larger distances between trial types are more involved in one of the two conditions. On one hand, sites related to the visual search task, for example, could be involved in the recognition of the arrows, the star, or the colors. On the other hand, regions related to expectation, and preparation would be more engaged in the waiting periods. Moreover, the time scales that maximize the distance would be related to specific information processes occurring in these regions.

B. Analyzing different time intervals along the 2-second-long trial duration

One could argue that even though the external visual stimuli remain fixed throughout the entire trial, using the 2-second window is too long considering cognitive processes. If this is the case, we are probably mixing different processes in figures 3 and 4. In particular, along the *search* trials, many different internal processes happen in sequence: recognize the arrow direction, search for the star, and then identify the color of the correct box. Therefore, in the following steps, we separate the 2 s time interval of each trial in intervals of 200 ms using a sliding window of 10 ms. Then for each interval, we repeat the analysis by calculating entropy and complexity for both conditions (*blank* and *search*) as a function of time. Afterward, we calculate the distance $d_{blank,search}$ and asymmetry index of the complexity $A(C_{search}, C_{blank})$ between the two trial types (see equations 6 and 7).

In fact, we verify for many electrodes that there are specific time intervals in which the distance between the

two conditions increases. In Fig. 5 we show the heatmap of the distance $d_{blank,search}$ for τ in the y-axis and the time course along the 2 s duration of the trial in the x-axis for 8 illustrative channels. We show the exemplar electrode JT3 and its two closest neighbors (JT2 and JT4), as well as the worst electrode of this patient for distinguishing the two conditions (JT7). We also show two illustrative electrodes from patients JM and WC with similar behavior of JT3: JM7, JM8, WC12, and WC13. We can see that the distance between the two conditions along the time also depends on the embedding time τ . For example, many channels present a peak in the distance between 500 ms and 1000 ms after the beginning of the trial and for $3 < \tau < 12$. The important time scales to differentiate the two conditions remain the same when we compare the results for the entire trial (Fig. 4) and when we divide it into smaller windows (Fig. 5). Moreover, sites that exhibit large distances only in one part of the trial have shown small values of distance in the first analysis considering the whole 2 s. This could be related to sites that are more engaged only in a very specific moment of one of the tasks, for example, the recognition of the arrow.

However, due to the design of the experiment, it is not possible to ensure that the same cognitive process happens at the same time window in every trial. Therefore, we suggest that a sequential visual search task in which the arrow appears first on the screen and then the colored boxes appear would be useful to differentiate more subtle cognitive processes such as recognizing the arrow direction, or the color of the correct box.

It is worth mentioning that the WC patient also

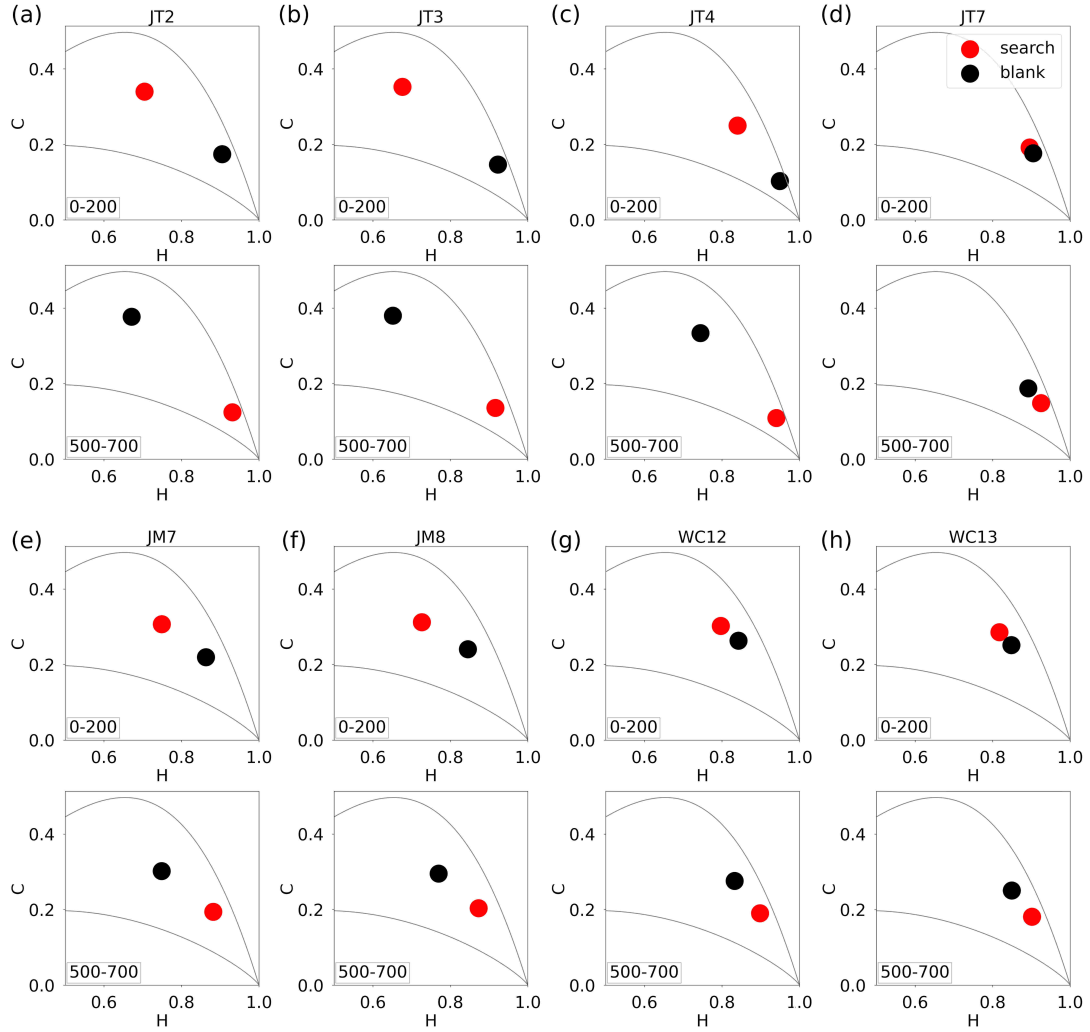


FIG. 6: Characterizing complexity and entropy for both conditions at the $C \times H$ plane in two different moments of the trials: 0 to 200ms and 500ms to 700ms. (a)-(h) The complexity-entropy plane for the 8 illustrative channels shown in Fig. 5.

presents another time scale for $15 < \tau < 30$ which exhibits pronounced differences between the two conditions at the beginning of the trial (see Fig. 5(h)). This also happens for other electrodes and it is worth more investigation since it suggests that different cognitive processes are happening in different time scales. However, hereafter we focus our analysis on $\tau = 6$ ms, since the results are more pronounced and robust at this time scale for the available electrodes.

After identifying τ and time windows that are better to distinguish the two conditions, we show in Fig. 6 the complexity-entropy plane for the same 8 illustrative channels of Fig. 5. We can visualize H and C for both conditions, $\tau = 6$, and two different time intervals: 0 to 200 ms and 500 ms to 700 ms.

We verify that the analysis in small time intervals is useful not only to distinguish the two tasks but also to reveal specific characteristics of cortical activity in

each condition separately. Naively one could initially expect that the channel activity and its indexes should not change over time for the *blank* trials. First, because the external visual stimuli remain the same, and second because the patient is just waiting. However, the levels of attention, expectation, and preparation could consistently change from the beginning to the end of the trial, which could influence the value of entropy and complexity.

In fact, many channels present differences in the indexes along the time intervals of the blank screen presentation around a specific time scale $\tau = 6$ ms. As an example, one can compare the vertical position of the black dots for the interval 0 to 200ms and 500 to 700ms in Fig.6(b) for the exemplar site JT3. The figure shows that C_{blank} is close to 0.2 in the first analyzed interval from 0 to 200ms and close to 0.4 in the second interval from 500 to 700ms. This means that the complexity not

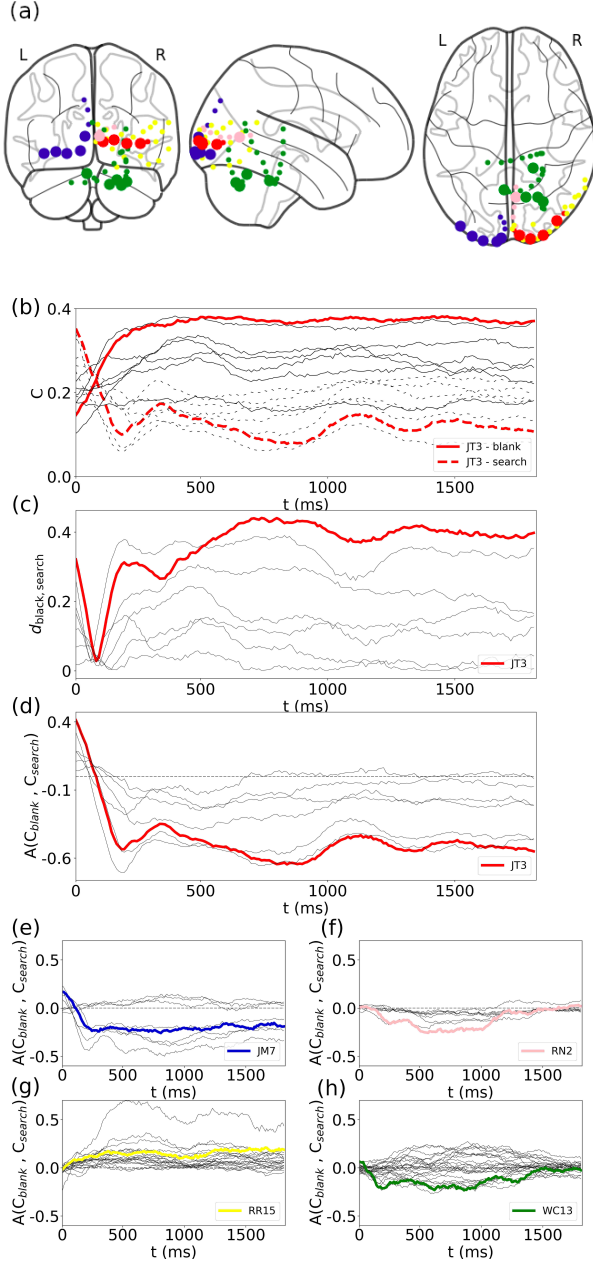


FIG. 7: Characterizing different types of channel activity for $\tau = 6$ ms. (a) Localization of all 67 channels from five subjects (separated by the colors) in a standard brain map. Larger dots indicate similar behavior as channel JT3. (b) Complexity C_{search} and C_{blank} and (c) distance $d_{blank,search}$ for all channels from patient JT. (d)-(h) Asymmetry of complexity $A(C_{search}, C_{blank})$ for all sites of each patient. The channels can be separated into three groups: positive values of asymmetry, negative values, or close to zero values during the most part of the trial. One illustrative electrode for each patient is highlighted.

only changes but increases during the waiting window.

We also show that at some sites, there is an inversion of the position of the *blank* and *search* dots in the $C \times H$

plane when comparing the two time intervals (see Fig. 6). At the beginning of the trial, the position of the *blank* trials in the $C \times H$ plane is closer to noisy time series. In contrast, in the second interval, the *search* condition is closer to the lower right corner indicating more similarity with random data. To illustrate this inversion, compare the position of black and red dots in the interval 0 to 200ms and 500 to 700ms in Fig.6(b).

The inversion of the position of both conditions in the $C \times H$ plane, as well as the increase of C_{blank} along the trial are not trivial results at all, especially because they do not happen for every value of τ and neither for every channel. In order to better identify these changes along the trial, besides complexity and distance, we also calculate the asymmetry index for the complexity $A(C_{search}, C_{blank})$ for all sites. A positive value of this index indicates $C_{search} > C_{blank}$, whereas a negative value occurs for $C_{blank} > C_{search}$. Therefore, the inversion of the position in the $C \times H$ plane is characterized by a change in the sign of the asymmetry index.

In Fig. 7(a) we illustrate the position of all 67 channels in a standard brain map. The colors represent electrodes from different patients. Larger circles indicate sites that present the inversion in the $C \times H$ plane along the trial for $\tau = 6$ ms. It is worth mentioning that many sites at occipital regions, which are related to visual processes, present similar characteristics. For example, the electrode positions of JM and JT are in equivalent occipital regions but in different hemispheres.

Therefore, in Fig. 7(b) we show the complexity as a function of the time course of the 2-second trial duration for both conditions, $\tau = 6$ ms, and all electrodes from patient JT. For the exemplar site JT3 (highlighted with thicker lines), C_{blank} is smaller at the beginning of the trial and increases during the first hundreds of milliseconds of the trial. Then it remains reasonably stable in high values close to 0.4. The complexity C_{search} presents an opposite behavior. It exhibits large values at the beginning of the trial and decreases along the first hundred milliseconds. The inversion occurs when $C_{search} = C_{blank}$ which happens between the 200 ms time window starting at 80 ms and the next one starting at 90 ms.

In Fig. 7(c) we show the distance $d_{blank,search}$ along the 2-second trial duration. We can observe that for JT3 and other electrodes, the distance decreases, and goes to zero when the indexes from both conditions change position in the $C \times H$ plane. Then, the distance increases again and eventually reaches larger values than the ones at the beginning of the trial.

To distinguish the two situations of large distance but inverted position at the plane, we plot the asymmetry index for the complexity $A(C_{search}, C_{blank})$ in Fig. 7(d). We show that the asymmetry index for JT3 starts positive and goes to negative values. Regarding the sign of the asymmetry index along all the time windows, the channels can be categorized into three groups: positive values, negative values, or close to zero values in the ma-

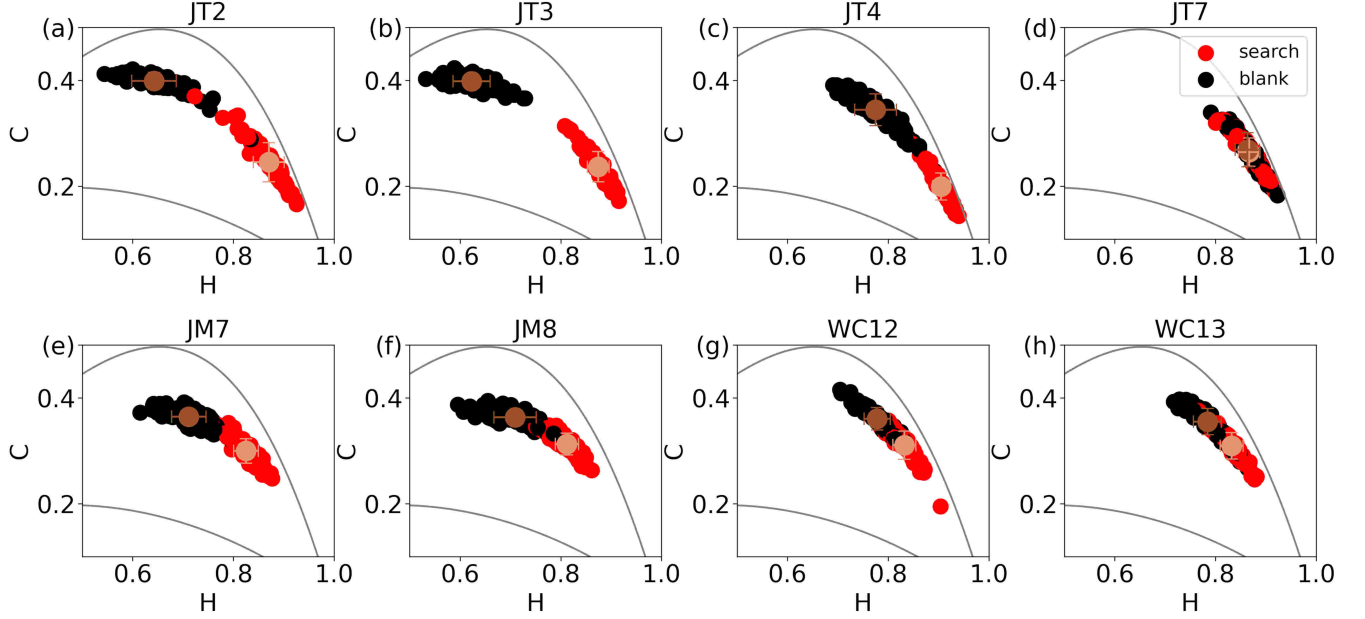


FIG. 8: Distinguishing two cognitive tasks on a trial-by-trial basis (for the same 8 illustrative channels as in Fig. 5). Each black (red) dot represents entropy H_{blank} (H_{search}) and complexity C_{blank} (C_{search}) calculated using the 2000 points of only one trial, and $\tau = 6$ ms. The brown (orange) circles and error bars are respectively the average and standard deviation in all 120 *blank* (*search*) trials. The exemplar electrode JT3 at the occipital area can remarkably distinguish the two conditions for all trials.

jority part of the trial. In Fig. 7(d)-(h) we show all sites of each patient highlighting an illustrative one. We point out that only one patient (RR) does not present any electrode with consistent negative asymmetry. Moreover, patient WC is the only one with channels clearly representing the three conditions for the asymmetry index.

In this scenario, we hypothesize that each one of the three behaviors of channels regarding the asymmetry index present different functional roles related to the tasks. It is worth noting that, by definition, sites with $A(C_{search}, C_{blank}) \approx 0$ also present small values of $d_{blank, search}$. Therefore, we propose that these channels are not involved in the tasks, at least at this time scale. Moreover, channels with $A(C_{search}, C_{blank}) < 0$ would be processing information more related to expectation and preparation. On the other hand, regions with $A(C_{search}, C_{blank}) > 0$ would be more engaged in the *search* task, for example, in recognizing the arrow, the star, or the colors.

C. Distinguishing cortical states on a trial-by-trial basis

In this section, we show that our method can also be applied to shorter time series, for example, on a trial-

by-trial basis. For such a task, we calculate entropy and complexity for each trial independently. First, we use the whole trial, analyzing the 2000 points of each 2-second long trial. In Fig. 8 we show the complexity-entropy plane for $\tau = 6$ ms and the 8 illustrative electrodes shown in figures 5 and 6. Each black dot represents one single *blank* trial, whereas each red dot represents one *search* trial. Therefore, we show 120 black dots and 120 red dots in each plot. The larger circles and error bars indicate the average values of H and C of the 120 dots and their standard deviations for each condition: *blank* or *search* trial.

In particular, for the exemplar electrode JT3, the two conditions (*blank* or *search* trials) are remarkably well separated in the complexity-entropy plane for all trials (see Fig. 8(b)). This means that, for this site, we would correctly guess the trial type in every attempt, by evaluating H and C . Other electrodes also present good separation among trial types on average (see some examples in Fig. 8 for JT2, JT4, JM7, and JM8). This means that we could guess the trial type with a high success rate.

As expected, the separation between the two conditions (*blank* or *search* tasks) does not happen for all electrodes. For example, for the JT7 channel (which has the smallest distances in Fig. 5), the two conditions are totally mixed on a trial-by-trial basis. The black and red

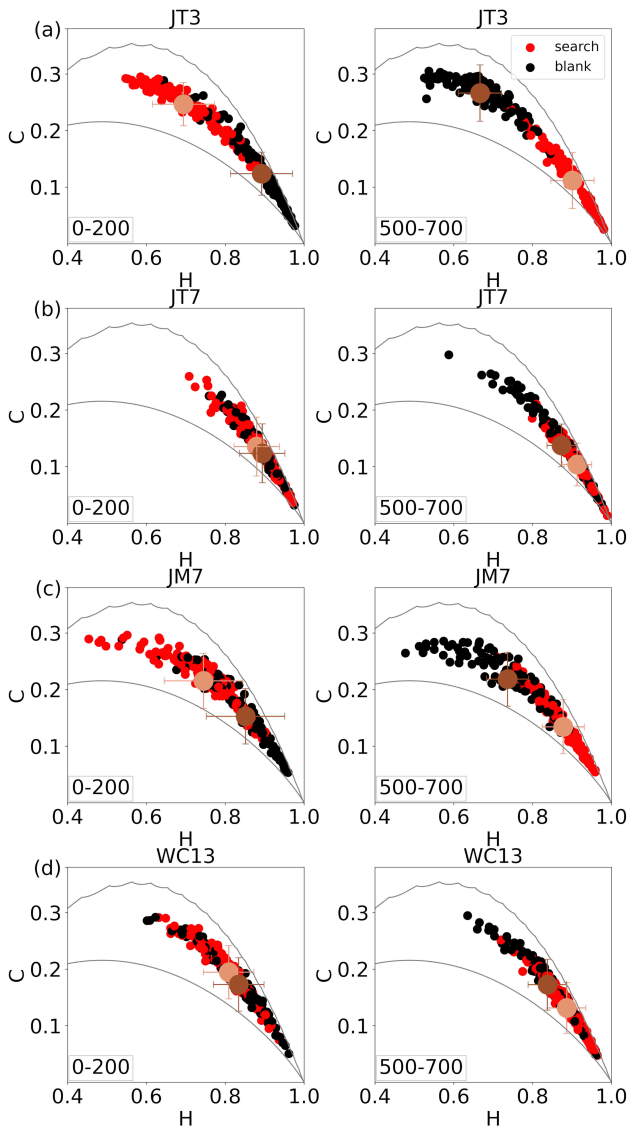


FIG. 9: Distinguishing two cognitive tasks on a trial-by-trial basis in small time windows of only 200 ms, $\tau = 6$ ms, and 4 illustrative electrodes. Each black (red) dot represents entropy H_{blank} (H_{search}) and complexity C_{blank} (C_{search}) calculated using the time interval from 0 to 200 ms in the first column and time interval from 500 to 700 ms in the second column. The brown (orange) circles and error bars are respectively the average and standard deviation in all 120 *blank* (*search*) trials.

dots representing each trial from each type, as well as the averages and standard deviations for each condition, are clearly overlapping at the $C \times H$ plane. (see Fig. 8(d)).

We point out that we have checked the robustness of the results for different lengths of the ordinal patterns ($D = 6, 5, 4, 3$) to make sure that fluctuations in the probability distribution function for different numbers of possible symbols are not compromising the results. Since it is still possible to verify a clear separation between

trial types for smaller values of D , we can also apply the method for smaller time intervals.

Considering small time windows of 200 ms of each trial independently, we can see the evolution of the separation between the two conditions along the 2-s long interval on a trial-by-trial basis. In Fig. 9 we show the $C \times H$ plane for 4 electrodes: : JT3, JT7, JM7, and WC13 (that are also shown in figures 5, 6 and 8) for $\tau = 6$ ms and $D = 4$. We show all 120 *blank* (*search*) trials in black (red) for two different time windows: the beginning of the trial from 0 to 200 ms in the first column; as well as for an advanced time window along the trial from 500 ms to 700 ms in the second column.

In Fig. 9(a) we show that for the exemplar channel JT3, it is still possible to distinguish the trial type on average using intervals smaller than a second-to-second basis. Interestingly, we can show the inversion of the position of the indexes for *blank* and *search* in the $C \times H$ plane comparing the two time windows (0 to 200 ms and 500 ms to 700 ms). However, even for the best performance electrode and the best performance interval, we could not find a complete separation for all trials of each type.

VI. CONCLUSION

To summarize, we have shown that information theory quantifiers (such as Shannon entropy, MPR-statistical complexity, and multi-scale complexity-entropy plane [6, 22]) are a useful tool to characterize the information process in human intracranial signals [1]. Using ECoG data from an open database [2], we show that we are able to distinguish waiting periods of the blank screen from the visual search task and infer relevant time scales for these processes. We also determine cortical regions that present more pronounced differences between the two cognitive tasks. Furthermore, we characterize trial-type-specific processes along different time intervals during the tasks. Finally, we show that for exemplar electrodes this can be done on a trial-by-trial basis.

Our results open new venues in the investigation of response-specific and stimulus-specific brain activity. The utilized method is potentially useful to quantify other features of the visual task such as identifying the direction of the arrow or correlating the indexes with behavioral aspects such as correct response rate. Differently from other classifiers, for example those which employ machine learning techniques, our method can also give us intuition about the physical significance of the signals since we can compare them to ordered and disordered states. Moreover, we show that differences in the indexes along the time course indicate that the statistical properties of the signals are not only related to the external visual stimulus but also to the cognitive process involved in the tasks.

We suggest that a sequential visual search task in which the arrow appears first and then the colored boxes

appear would be useful to differentiate more subtle cognitive processes such as recognizing the arrow, searching for the star, and then identifying the color of the correct box. For instance, our method could be applied to understand math tasks in which the numbers appear sequentially on the screen as reported in Ref. [23, 24]. This method can be also potentially useful to differentiate other features such as the direction of the arrow or for different tasks to distinguish numbers from letters or other symbols.

Finally, we believe that our current analysis may also be applied to other cognitive tasks using noninvasive data such as EEG [25] and MEG [26, 27]. It is also possible to employ the complexity-entropy plane to characterize differences among groups with neurodisorders [15] and control in order to use it for helping in diagnostic or to

characterize levels of anesthesia. We expect that, since even more data is becoming publicly available, it will be easier to address more sophisticated neurocognitive questions in the light of information theory methods.

Acknowledgments

The authors thank CNPq (grants 402359/2022-4, 314092/2021-8), FAPEAL (grant APQ2022021000015), UFAL, CAPES and L'ORÉAL-UNESCO-ABC For Women In Science (Para Mulheres na Ciência) for financial support.

-
- [1] J. Parvizi and S. Kastner, *Nature neuroscience* **21**, 474 (2018).
 - [2] K. J. Miller, D. Hermes, C. J. Honey, M. Sharma, R. P. Rao, M. d. Nijs, E. E. Fetz, T. J. Sejnowski, A. O. Hebb, J. G. Ojemann, et al., *Frontiers in human neuroscience* **4**, 197 (2010).
 - [3] C. E. Shannon, *Bell Sys. Tech. J.* **27**, 379 (1948), reprinted in C. E. Shannon and W. Weaver, "The Mathematical Theory of Communication," Univ. Ill. Press, Urbana, Illinois, 1949.
 - [4] R. Lopez-Ruiz, H. L. Mancini, and X. Calbet, *Physics letters A* **209**, 321 (1995).
 - [5] P. W. Lamberti, M. T. Martín, A. Plastino, and O. A. Rosso, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **334**, 119 (2004).
 - [6] O. A. Rosso, H. A. Larrondo, M. T. Martín, A. Plastino, and M. Fuentes, *Physical Review Letters* **99**, 154102 (2007).
 - [7] L. Zunino, M. C. Soriano, and O. A. Rosso, *Physical Review E* **86**, 046210 (2012).
 - [8] H. Xiong, P. Shang, J. He, and Y. Zhang, *Nonlinear Dynamics* **100**, 1673–1687 (2020).
 - [9] C. Bandt and B. Pompe, *Physical review letters* **88**, 174102 (2002).
 - [10] F. Montani, O. A. Rosso, F. S. Matias, S. L. Bressler, and C. R. Mirasso, *Phil. Trans. R. Soc. A* **373**, 20150110 (2015).
 - [11] N. Lotfi, T. Feliciano, L. A. Aguiar, T. P. L. Silva, T. T. Carvalho, O. A. Rosso, M. Copelli, F. S. Matias, and P. V. Carelli, *Physical Review E* **103**, 012415 (2021).
 - [12] E. Capek, T. L. Ribeiro, P. Kells, K. Srinivasan, S. R. Miller, E. Geist, M. Victor, A. Vakili, S. Pajevic, D. R. Chialvo, et al., *Nature communications* **14**, 2555 (2023).
 - [13] R. Baravalle, O. A. Rosso, and F. Montani, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** (2018).
 - [14] D. M. Mateos, J. Gómez-Ramírez, and O. A. Rosso, *Chaos, Solitons & Fractals* **146**, 110798 (2021).
 - [15] I. Echegoyen, D. López-Sanz, J. H. Martínez, F. Maestú, and J. M. Buldú, *Entropy* **22**, 116 (2020).
 - [16] F. Montani, R. Baravalle, L. Montangie, and O. A. Rosso, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **373**, 20150109 (2015).
 - [17] R. De Luise, R. Baravalle, O. A. Rosso, and F. Montani, *The European Physical Journal B* **94**, 1 (2021).
 - [18] H. B. de Lucas, S. L. Bressler, F. S. Matias, and O. A. Rosso, *Nonlinear Dynamics* **104**, 4401 (2021).
 - [19] F. Trevesaro, F. O. Redelico, M. R. Risk, A. C. Frery, and O. A. Rosso, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28**, 075502 (2018).
 - [20] C. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication* (Champaign, IL: University of Illinois Press, 1949).
 - [21] I. Grosse, P. Bernaola-Galván, P. Carpena, R. Román-Roldán, J. Oliver, and H. E. Stanley, *Physical Review E* **65**, 041905 (2002).
 - [22] M. Martin, A. Plastino, and O. Rosso, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **369**, 439 (2006).
 - [23] P. Pinheiro-Chagas, F. Chen, N. Sabetfakhri, C. Perry, and J. Parvizi, *Brain Structure and Function* **228**, 305 (2023).
 - [24] P. Pinheiro-Chagas, C. Sava-Segal, S. Akkol, A. Daitch, and J. Parvizi, *Journal of Neuroscience* (2024).
 - [25] F.-L. P. Carlos, M.-M. Ubrakitan, M. C. A. Rodrigues, M. Aguilar-Domingo, E. Herrera-Gutiérrez, J. Gómez-Amor, M. Copelli, P. V. Carelli, and F. S. Matias, *Physical Review E* **102**, 032216 (2020).
 - [26] A. Kösem, A. Basirat, L. Azizi, and V. Van Wassenhove, *Journal of neurophysiology* **116**, 2497 (2016).
 - [27] G. Michalareas, J. Vezoli, S. Van Pelt, J.-M. Schoffelen, H. Kennedy, and P. Fries, *Neuron* **89**, 384 (2016).