



# UFAL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Difração de luz com momento angular orbital e  
suas aplicações no domínio coerente e incoerente

por

*Alcenísio José de Jesus Silva*

W} ã^! • ãã^ÁO^á^! a^Á^ÁO^æ [ æ

Campus A. C. Simões  
Tabuleiro dos Martins  
57.072-970 - Maceió - AL.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

**ALCENÍSIO JOSÉ DE JESUS SILVA**

**DIFRAÇÃO DE LUZ COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL E SUAS  
APLICAÇÕES NO DOMÍNIO COERENTE E INCOERENTE**

Maceió

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

ALCENÍSIO JOSÉ DE JESUS SILVA

**DIFRAÇÃO DE LUZ COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL E SUAS  
APLICAÇÕES NO DOMÍNIO COERENTE E INCOERENTE**

*Dissertação apresentada ao Departamento de  
Física da Universidade Federal de Alagoas,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Doutor em Ciências.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca*

Maceió

2012

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

S586e Silva, Alcenísio José de Jesus.

Difração de luz com momento angular orbital e suas aplicações no domínio coerente e incoerente / Alcenísio José de Jesus Silva. – 2012.

99f. : il.

Orientador: Jandir Miguel Hickmann.

Co-orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.

Dissertação (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 93-99.

Inclui apêndices.

1. Vórtices óticos. 2. Fraunhofer - Difração. 3. Fótons - Momento angular orbital. 4. Born – Regra. 5. Carga topológica. I. Título.

CDU: 535.44

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**

***“Difração de Luz com Momento Angular Orbital e***  
***Aplicações no Domínio Coerente e Incoerente”.***

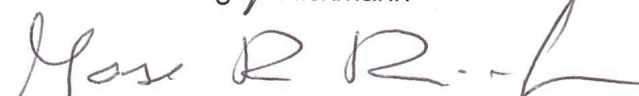
**por**

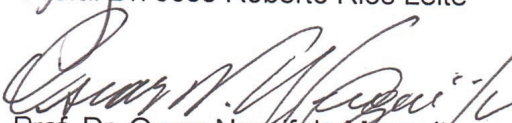
**Alcenísio José de Jesus Silva**

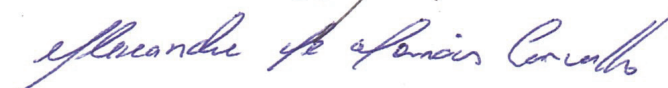
A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, José Roberto Rios Leite, do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Oscar Nassif de Mesquita, do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 20 de setembro de 2012

  
Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann

  
Prof. Dr. José Roberto Rios Leite

  
Prof. Dr. Oscar Nassif de Mesquita

  
Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho

  
Prof. Dr. Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar

*"Uma das coisas mais importantes neste jogo de "conjeturar - calcular conseqüências - comparar com experimentos" é saber quando você está errado... Sua conjetura é, na verdade, que algo é muito simples. Se você não pode ver imediatamente que está errado, e se é mais simples do que era antes, então está correto. Os sem experiência, os tolos, e pessoas semelhantes, fazem conjeturas que são simples, mas você pode ver imediatamente que eles estão errados, então não conta. Outros, os estudantes inexperientes, fazem conjeturas que são muito complicadas, e isto aparenta como se fosse tudo correto, mas eu sei que isto não é verdade porque a verdade é sempre mais simples. O que nós precisamos é imaginação, mas imaginação em uma terrível camisa de força. Precisamos encontrar uma visão do mundo que concorda com tudo que é conhecido, mas discorda em suas predições em algum ponto, senão não é interessante. E nesta discordância concorda com a natureza."*

## AGRADECIMENTOS

- A Deus, sem Ele nada seria possível;
- Aos meus pais e minha família, pelo apoio e incentivo durante toda esta jornada;
- Ao professor *Eduardo Jorge da Silva Fonseca*, meu co-orientador, por sua grande ajuda e apoio, sem o qual eu não conseguiria terminar esta tarefa;
- Ao professor *Jandir Miguel Hickmann*, pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa sob sua orientação, suas críticas e sugestões, indispensáveis à realização deste trabalho;
- Aos colegas acadêmicos, pelo companheirismo e amizades durante essa jornada;
- Ao CNPq e à Fapeal pela concessão da bolsa, que tornou possível este trabalho;
- Aos professores do Instituto de Física da UFAL;
- À todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

*Aos meus pais José Justino e Divina Antônia*



## RESUMO

Nesta tese de doutorado investigamos diversos experimentos que exploram o momento angular orbital da luz e a difração de Fraunhofer. Nossas investigações abrangeram desde propagação coerente, passando por propagação incoerente, chegando a estados semiclássicos usados para explorar uma questão fundamental da mecânica quântica, a saber, a regra de Born. Portanto, no que concerne à propagação de luz coerente com momento angular orbital, estivemos envolvidos primeiramente com estudos da difração de Fraunhofer deste tipo de luz, por uma fenda simples e por uma abertura quadrada. No primeiro trabalho estudamos a difração de Fraunhofer quando o centro da fenda está alinhado com o centro do vórtice e quando está deslocado do centro do vórtice. Quanto ao trabalho relacionado à abertura quadrada, mostramos que a difração de Fraunhofer por tal abertura não permite caracterizar a carga topológica. Prosseguindo os trabalhos, investigamos também a difração no plano de Fraunhofer de luz com momento angular de carga fracionária no plano real. Um interessante fenômeno, o nascimento de um vórtice, foi estudado no plano de Fraunhofer, mostrando novas conclusões nos estudos relacionados à carga fracionária. Nossos estudos continuaram com a propagação de Fraunhofer de vórtices em luz incoerente, revelando fortes correlações entre vórtices incoerentes. Por fim, exploramos aspectos semiclássicos da luz com momento angular orbital. Primeiramente, a determinação da carga topológica via distribuição de probabilidade espacial de detecção de fótons difratados por uma abertura triangular. Posteriormente, a validação da regra de Born utilizando difração, por três fendas simples dispostas na forma triangular, de fótons com uma fase extra, ou seja, a fase azimutal, adicionada à fase de caminho.

**Palavras-chave:** Vórtices óticos. Difração. Aberturas. Momento angular orbital. Carga topológica. Fótons. Regra de Born.

## ABSTRACT

In this doctoral thesis we investigate several experiments exploring the light orbital angular momentum and the Fraunhofer diffraction of light. Our investigations goes from coherent propagation, continue through incoherent propagation, arriving at semiclassical states used to explore one fundamental problem in quantum mechanics, i. e., the Born's rule. Therefore, concerning coherent propagation of light with orbital angular momentum, we were first involved with studies about Fraunhofer diffraction of this type of light, by a single slit and by a square aperture. In the former work we studied the Fraunhofer diffraction when the slit center is aligned with the vortex center and when it is out of the vortex center. Concerning the work related to the square aperture, we show that the diffraction by such aperture is not sufficient to characterize the topological charge. Continuing the works, we also investigate the Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum of fractional topological charge in the real space. An interesting phenomenon, the birth of a vortex, was studied at Fraunhofer plane, showing new conclusions in the study of fractional topological charges. Our studies continued with the Fraunhofer propagation of vortices in incoherent light, unveiling strong correlations between incoherent vortices. Finally, we explored semiclassical aspects of light with orbital angular momentum. Firstly, the topological charge determination via the spatial probability distribution of detection of photons diffracted by a triangular aperture. After, the validation of the Born's rule using diffraction, by three slits disposed in a triangular configuration, of photons with an extra phase, i. e., the azimuthal phase added to the path phase.

**Keywords:** Optical vortices. Diffraction. Apertures. Orbital angular momentum. Topological charge. Photons. Born's rule.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL.....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>MOMENTO ANGULAR ORBITAL ÓTICO: DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>O momento angular de spin e orbital nas equações de Maxwell .....</b>	<b>17</b>
2.2.1	As equações de Maxwell-Lorentz .....	17
2.2.2	Algumas importantes constantes do movimento .....	18
2.2.3	Potenciais e invariância de calibre .....	19
2.2.4	A notação do espaço recíproco .....	21
2.2.5	Campos vetoriais transversos e longitudinais .....	22
2.2.6	Momento angular eletromagnético orbital e intrínseco .....	23
<b>2.3</b>	<b>Feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel .....</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Criação experimental de feixes com vórtice .....</b>	<b>25</b>
<b>2.5</b>	<b>Caracterização de feixes com OAM por meio de métodos difrativos .....</b>	<b>27</b>
2.5.1	Difração de Fraunhofer de luz com MAO por uma fenda simples .....	32
2.5.2	Difração de Fraunhofer de luz com MAO por uma abertura quadrada .....	36
<b>2.6</b>	<b>Conclusão .....</b>	<b>41</b>
<b>3</b>	<b>ESTUDO DO NASCIMENTO DE UM VÓRTICE NA ZONA DE FRAUNHOFER.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Nascimento de um vórtice na zona de Fresnel .....</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Nascimento de um vórtice na zona de Fraunhofer .....</b>	<b>47</b>
3.3.1	Experimento .....	47
3.3.2	Teoria .....	48
3.3.3	Resultados e discussão.....	49
<b>3.4</b>	<b>Conclusão.....</b>	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>VÓRTICES DE COERÊNCIA EM CAMPOS PSEUDOTÉRMICOS.....</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Teoria.....</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Experimento.....</b>	<b>57</b>

4.4	Resultados e discussão .....	59
4.5	Conclusão .....	65
5	MEDIDA DE MOMENTO ANGULAR ORBITAL DE FÓTONS VIA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE ESPACIAL.....	66
5.1	Introdução .....	66
5.2	Teoria .....	68
5.3	Experimento .....	69
5.4	Resultados e discussão .....	71
5.5	Conclusão .....	73
6	REGRA DE BORN E INTERFERÊNCIA DE FÓTONS COM MOMEN- TO ANGULAR ORBITAL POR UMA FENDA TRIANGULAR.....	75
6.1	Introdução .....	75
6.2	Teoria .....	77
6.3	Experimento .....	79
6.4	Resultados e discussão .....	80
6.5	Conclusão .....	83
7	CONCLUSÃO GERAL E PERSPECTIVAS.....	84
	BIBLIOGRAFIA .....	88
	APÊNDICE .....	95

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

Campos eletromagnéticos podem transportar energia, momento linear e momento angular [1–3]. Com relação ao transporte de energia pelos campos, pela lei de Gauss da teoria eletromagnética as fontes dos campos elétricos são as cargas e a energia armazenada em campos elétricos vem do trabalho necessário para montar uma determinada distribuição de cargas que sofrem ação da força de Coulomb. Por outro lado, pela lei de Ampère, as correntes são as fontes dos campos magnéticos. Para ligar uma corrente de cargas devemos variar a corrente de zero até um valor constante final. Durante esta variação, produzida por uma força eletromotriz, sempre existe uma força contra-eletromotriz que se opõem á variação de corrente. Segundo a lei de Faraday, a força contra-eletromotriz vem do campo elétrico gerado pelo campo magnético variável durante o tempo em que a corrente é ligada. Então, é o trabalho necessário para compensar a força contra-eletromotriz que é responsável pelo armazenamento de energia no campo magnético.

Em relação ao momento linear, Kepler foi o primeiro a sugerir que as caudas de cometa vistas saindo do sol ocorreriam devido ao fato de a luz transportar momento linear. A troca de momento linear com a matéria produz forças devidas à pressão de radiação. Nos tempos recentes, o momento linear da radiação foi explorado no aprisionamento e armazenamento de átomos [4, 5].

Por fim, em relação ao momento angular da luz, é sabido que este tem duas componentes: o momento angular intrínseco ou polarização e o momento angular orbital (MAO). Em relação

---

à primeira componente, Poynting, em 1909, pioneiramente demonstrou teoricamente que luz circularmente polarizada poderia transferir um momento angular de  $\hbar$  por fóton para uma placa de quarto de onda [6]. Um elegante experimento foi feito por Beth, usando uma placa quarto de onda pendurada em uma balança de torção [7, 8]. Experimentos similares foram repetidos em telas metálicas no regime de microondas por Carrara em 1949 [9].

A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico e é principalmente com ela que estaremos lidando nesta tese. O estudo do MAO da luz começou em 1992 com Allen *et al.* [10]. Eles mostraram que feixes Laguerre-Gauss (LG) podem ter MAO. Estes feixes têm um perfil transversal de intensidade circularmente simétrico ao longo do eixo de propagação e são caracterizados por dois índices inteiros  $p$  e  $m$ . O primeiro é o índice radial, com  $p+1$  denotando o número de anéis de intensidade no perfil transversal. O segundo é o índice azimutal  $m$ , usualmente conhecido como carga topológica (CT), caracterizando a dependência de fase azimutal  $\exp(im\phi)$ . Este tipo de feixe tem um zero de intensidade no centro do padrão para  $m \neq 0$ . Neste ponto existe uma singularidade de fase, chamada vórtice óptico. A variação total de fase numa volta completa em torno do vórtice é igual a  $2m\pi$ .

O estudo e exploração de luz transportando MAO é uma linha de estudos continuamente crescente e que hoje faz parte do campo mais amplo chamado *luz complexa* que abriga várias linhas de pesquisa. Muitas aplicações para o MAO da luz têm sido delineadas no campo de aprisionamento óptico de pequenas partículas por pinças ópticas [11, 12]. Por outro lado, a expansão dos estados de momento angular orbital em um espaço de Hilbert de dimensão infinita abre novas oportunidades para a computação quântica, criptografia quântica e armazenamento de dados [13, 14]. Podemos ainda citar uma nova linha de investigação: as análises de luz com MAO vinda do cosmos [15]. Por exemplo, a luz pode ganhar MAO enquanto atravessa o meio interestelar turbulento ou passa próximo a um buraco negro girando rapidamente, ou grandes explosões de corpos no cosmos poderiam gerar luz com MAO e este conteúdo de MAO poderia ser detectado.

---

Uma primeira abordagem no estudo de luz complexa é caracterizar o MAO de um feixe de luz. Inicialmente usou-se o método interferométrico que faz uso de um feixe referência [16–19]. A interferência entre um feixe com vórtice e uma onda plana produz franjas de interferência que apresentam bifurcações no ponto onde está a singularidade de fase do feixe com vórtice. Contando-se o número de bifurcações é possível determinar a carga topológica associada ao vórtice [16]. Por outro lado o método interferométrico foi explorado para fazer a separação (“sorting”) de fótons com diferentes OAM [18]. Esta abordagem faz uso de um interferômetro de Mach–Zehnder com um prisma de Dove em cada braço. Se o estado for uma superposição de modos com CTs par e ímpar, os fótons com TC par aparecem em uma das portas de saída do interferômetro e aqueles com CT ímpar aparecem na outra porta de saída. No entanto, um esquema geral envolvendo separação entre fótons de CT arbitrária, requer um número grande de interferômetros e prismas de Dove e manter um alinhamento estável se torna difícil. Outra abordagem explorada para caracterizar o MAO consiste em utilizar técnicas difrativas, as quais não fazem uso de um feixe referência e não requerem alinhamentos cuidadosos como as que usam interferômetros [20–27]. A difração de um feixe com MAO por uma fenda simples foi proposta como uma maneira de medir a sinal e o valor da carga topológica do feixe [20]. No entanto, este método é capaz de analisar apenas carga topológica de valor  $\pm 1$ . Outro método explorou a difração por uma fenda dupla utilizando feixes LG, onde a inclinação nas franjas, devida ao MAO desses feixes, poderia ser utilizada na medida da carga topológica [21]. Porém, observamos que esta técnica é muito limitada, servindo apenas para detectar a presença do MAO, não sendo fácil inferir valor da carga topológica utilizando a inclinação das franjas.

Na referência [22], os autores descrevem um sistema de múltiplas aberturas circulares dispostas circularmente sobre a frente de onda do feixe em torno da singularidade de fase, que eles chamaram de interferômetro de multiponto (MPI) e mostraram que este pode ser usado para medir o estado de momento angular orbital de feixes com frente de onda helicoidal. Neste método, a carga topológica do feixe pode ser reconhecida de acordo com o fato de

---

que diferentes valores para carga topológica correspondem a diferentes padrões de difração do campo distante, após o feixe passar através do MPI. O problema é que analisando os padrões de difração do campo distante de um MPI, iluminado por um feixe Laguerre-Gauss de alta ordem, não é possível caracterizar a carga topológica do feixe difratado devido à ambigüidade dos resultados. O método da referência [23] que utiliza uma grade de difração para detectar vórtices tem baixa eficiência. Já o método que emprega a difração por uma abertura anular [24] além de não ser um método direto não permite sabermos o sinal da carga topológica. M. J. Padgett *et. al.* [26] utilizaram um método que emprega transformações conformes aplicadas sobre o feixe. Os autores realizaram o experimento em intensidade muito baixa da luz para sugerir que o método permite determinar a carga topológica de um único fóton em cada evento de detecção. No entanto, este método emprega dois moduladores espaciais de luz, não sendo, portanto, um método simples.

Finalmente, vale ressaltar a técnica difrativa demonstrada recentemente usando uma abertura triangular [25]. Este trabalho mostrou que o valor e o sinal da CT de um feixe com MAO podem ser obtidos sem nenhuma ambigüidade e de forma direta e simples. A difração de um feixe de luz com MAO produz um padrão triangular truncado na forma de uma rede de máximos de intensidade. Sendo  $N$  número de máximos de intensidade no lado do padrão, a carga topológica do feixe de luz é dada por  $m = N - 1$ . Motivados por este trabalho também estudamos a difração de Fraunhofer de um feixe com MAO por uma fenda simples [28, 29] e por uma abertura quadrada [30, 31]. A difração de Fraunhofer pela fenda simples foi utilizada para explicar o padrão de difração pela fenda triangular. Já o trabalho da difração por uma fenda quadrada, estuda a difração por outra abertura poligonal regular além da triangular equilátera. Observamos que estas duas aberturas poligonais regulares são as únicas formas geométricas regulares que podem gerar uma rede de máximos de intensidade no padrão de difração de Fraunhofer. No entanto, a fenda quadrada somente forma uma rede quadrada truncada para CT par, não sendo possível determinar CTs ímpares pela análise visual de uma



---

rede de máximos de intensidade.

Outro aspecto da difração de luz com vórtice é a difração de feixe LG com CT fracionária [32–39]. Em um artigo pioneiro [32], Berry estudou teoricamente a evolução na propagação de ondas com vórtices ópticos de CT inteiras e não inteiras. Um resultado notável foi obtido para o caso de vórtices de CT não inteira. Berry mostrou que o nascimento de um vórtice dentro do feixe ocorre quando o valor fracionário da CT atinge e passa a metade de um valor inteiro. Este resultado foi confirmado experimentalmente por [33, 34] e, recentemente, por [35] usando uma abertura triangular, depois do trabalho de Hickmann *et. al.* [25]. Interessantemente, todos os trabalhos sobre o assunto foram realizados longe da zona de Fraunhofer. Aqui, apresentamos um novo ingrediente para este problema. Nossos resultados mostram que, no plano de Fraunhofer do feixe com CT fracionária, não é possível caracterizar o nascimento de um vórtice como um evento que ocorre apenas para valores de CT maiores ou iguais a metade de um inteiro.

Em geral, a criação de vórtices ópticos está diretamente ligada a fontes de luz coerentes, onde a fase é bem definida. O estudo de vórtices ópticos em luz incoerente [40] levou a uma nova linha de estudos: os vórtices de coerência [41–48]. Este tipo de vórtice não pode ser visto na intensidade, mas a função de correlação entre um campo de luz com vórtice e outro campo referência tem um vórtice bem definido, o chamado vórtice de coerência. Este é um assunto que vem sendo muito explorado devido a sua utilização para identificar padrões vindos do espaço. Estudos mostram que existe formação de vórtices nas explosões que ocorrem no espaço. Medir esses vórtices poderá abrir novos caminhos de interesse à astrofísica. Ressaltamos o fato de que estes vórtices são gerados por luz completamente incoerente. Existem trabalhos ao longo dessa linha de pesquisa [45, 48], mas uma técnica eficiente e simples que possa medir o MAO de luz incoerente ainda não foi apresentada. Isto nos motivou a empregar a abertura triangular como uma maneira de identificar correlações em campos incoerentes com estatística pseudo-térmica.

É possível vislumbrar também algumas aplicações na mecânica quântica fundamental. O

---

experimento da dupla fenda em nível de um único fóton [49] ou elétron [50] tem sido experimentos quânticos onipresentes [51] onde a fase de caminho executa um papel fundamental. Por poutro lado o MAO [10] de elétrons [52] ou fótons [53] trás uma nova dimensão [54] para o problema da interferência quântica [55] com um novo grau de liberdade [56] associado à fase espiral.

O problema quântico de interferência da dupla fenda com um único fóton [49] ou elétron [50] é um importante experimento da mecânica quântica, segundo Feynman [57]. Durante os anos, foram propostos e demonstrados muitos experimentos quânticos extremamente surpreendentes e difíceis de entender como o experimento de escolha atrasada de Wheeler [58]; a interferência fantasma [59]; o comprimento de onda de de Broglie de um pacote de onda de dois fótons [60]; a dupla fenda distribuída [61,62]; o apagador quântico [63], entre muitos outros. A extensão para três fendas paralelas tinha atraído pouca atenção, até seu recente uso original na verificação experimental da regra de Born [64] para um ponto correspondendo ao máximo de interferência central.

A regra de Born estabelece que: a densidade de probabilidade de medida de um estado quântico é igual ao módulo ao quadrado da amplitude de probabilidade, isto é, módulo ao quadrado da função de onda. Isto é ensinado no início de qualquer curso de mecânica quântica. No entanto, a importância do trabalho de Sinha *et. al.* [64] está justamente na possibilidade da violação de tal axioma fundamental da mecânica quântica. A regra de Born, como estabelecida na mecânica quântica, prediz que a interferência quântica, como no caso do experimento de difração da dupla fenda, sempre ocorre para pares de caminhos. Uma versão generalizada da mecânica quântica poderia introduzir múltiplos caminhos e permitir interferência de alta ordem, violando então a teoria. Os autores do trabalho [64] realizaram um experimento de tripla fenda com fótons e atingiram um valor menor que  $10^{-2}$  para a contribuição de interferência de terceira ordem, ou seja, se existe ela deve ser menor que este valor. Isto nos motivou a empregar feixes com MAO na verificação dessa regra, onde obtivemos um limite para

a contribuição de interferência de terceira ordem, mas agora para uma região bidimensional, em vez de apenas um ponto como na medida anterior.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 fizemos uma breve revisão dos estudos anteriores sobre MAO nos aspectos que estamos interessados, começando com a separação do momento angular em MAO e spin em campos eletromagnéticos. Prosseguimos com o conceito de feixes de luz com MAO e como gerá-los. Por fim, brevemente repassamos os trabalhos anteriores que trataram da caracterização do MAO da luz.

No capítulo 3 mostramos nossos resultados relativos ao nascimento de vórtices no plano de Fourier. A teoria e os experimentos mostram que no plano de Fraunhofer sempre se observa que um novo vórtice nasce, independentemente do valor da parte fracionária da carga topológica.

No capítulo 4 discutimos nossos resultados relativos à luz pseudotérmica com MAO. Mostramos que existem correlações fortes de luz pseudotérmica advindas da robustez do vórtice óptico. Essas correlações revelam MAO na função de coerência transversa entre dois feixes espacialmente incoerentes com MAO. O MAO da função de coerência é delimitado pelo MAO associado a cada feixe incoerente.

No capítulo 5 estudamos a difração de luz de intensidade extremamente baixa, em nível de poucos fótons. Verificamos que a distribuição de probabilidade espacial de fótons forma uma rede triangular truncada de máximos de intensidade que nos permite obter o valor da carga topológica dos fótons. Ademais, verificamos que é possível discriminar estados de MAO em superposições de dois estados quando a diferença de CT é maior ou igual a 3.

No capítulo 6 utilizamos a técnica do capítulo 5 para fazer uma verificação da regra de Born para estados de fótons com MAO no regime semiclássico. Por fim, no capítulo 7 apresentamos nossa conclusão geral e perspectivas.

## 2 MOMENTO ANGULAR ÓTICO: DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO

### 2.1 Introdução

Existe uma analogia entre a ótica paraxial e a mecânica quântica [65]. Observa-se que a equação da onda de Schrödinger é idêntica à forma paraxial da equação de onda de Helmholtz, com  $t$  substituído por  $z$  e o operador correspondente à componente  $z$  do momento angular orbital representada na forma  $L_z = -i\hbar\partial/\partial\phi$ . Essa analogia permite que alguns fenômenos da ótica paraxial possam ser estudados usando o formalismo da mecânica quântica. Isto foi amplamente demonstrado por van Enk e Nienhuis que introduziram uma descrição dos feixes de laser por autofunções [66] e por Nienhuis e Allen que compararam modos paraxiais e suas propriedades com aquelas do oscilador harmônico quântico [65]. Por outro lado, a propagação do spin e do momento angular orbital através de elementos ópticos pode ser descrita através de Matrizes de Jones generalizadas, sem qualquer referência à forma espacial do feixe [67].

A separação do momento angular óptico nas partes spin e orbital, embora simples, não é livre de problemas fundamentais, pois tem sido sugerido que nenhuma destas quantidades tem significado físico, ou seja, que elas não são fisicamente observáveis [2]. Esta situação foi grandemente esclarecida por van Enk e Nienhuis, mas eles mostraram que um problema mais dramático surge do fato de que nenhuma destas quantidades é, de fato, um momento angular [68, 69], pois suas formas quantizadas não satisfazem as regras de comutação de momento

angular da mecânica quântica.

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos do MAO da luz que serão úteis para o entendimento dos resultados apresentados ao longo desta tese. Iniciaremos com definições de alguns conceitos básicos da teoria eletromagnética e, na sequência, veremos algumas propriedades do MAO da luz. Por fim, abordaremos a criação experimental dos feixes de luz com MAO e faremos um estudo resumido dos trabalhos anteriores devotados à caracterização de tais feixes.

## 2.2 O momento angular de spin e orbital nas equações de Maxwell

### 2.2.1 As equações de Maxwell-Lorentz

As equações básicas do eletromagnetismo são divididas em dois grupos. No primeiro, as equações de Maxwell relacionam o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e o campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  às densidades de carga  $\rho(\vec{r}, t)$  e corrente  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ :

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (2.4)$$

onde  $\varepsilon_0$  e  $c$  são a constante elétrica no vácuo e a velocidade da luz no vácuo, respectivamente.

No segundo grupo, as equações de Newton-Lorentz descrevem a dinâmica de cada partícula  $\alpha$ , tendo massa  $m_\alpha$ , carga  $q_\alpha$ , posição  $r_\alpha(t, \cdot)$ , e velocidade  $\vec{v}_\alpha(t)$ , sob a influência de forças elétricas e magnéticas exercidas pelos campos

$$m_\alpha \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_\alpha(t) = q_\alpha \left[ \vec{E}(\vec{r}_\alpha(t), t) + \vec{v}_\alpha(t) \times \vec{B}(\vec{r}_\alpha(t), t) \right]. \quad (2.5)$$

Das equações (2.1) e (2.4) podemos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.6)$$

Esta é a equação da continuidade e expressa a conservação local da carga elétrica global,

$$Q = \int d^3r \rho(\vec{r}, t). \quad (2.7)$$

As expressões de  $\rho$  e  $\vec{j}$  como função das variáveis das partículas são

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)) \quad (2.8)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)) \quad (2.9)$$

Podemos mostrar que as equações (2.8) e (2.9) satisfazem a equação da continuidade (2.6).

As equações (2.1)-(2.5) formam dois conjuntos de equações acopladas. A evolução do campo depende das partículas através de  $\rho$  e  $\vec{j}$ . O movimento das partículas depende dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . As equações (2.1)-(2.4) são equações diferenciais parciais de primeira ordem, enquanto as equações (2.5) são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Segue que o estado global do sistema, campo + partículas, é determinado em um dado instante de tempo  $t_0$  pelos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em todos os pontos  $\vec{r}$  do espaço e pela posição e velocidade  $\vec{r}_{\alpha}$  e  $\vec{v}_{\alpha}$  de cada partícula  $\alpha$ :

$$\left\{ \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t), \vec{r}_{\alpha}(t_0), \vec{v}_{\alpha}(t_0) \right\}. \quad (2.10)$$

É importante notar que, nas equações de Maxwell (2.1)-(2.4),  $\vec{r}$  não é uma variável dinâmica (como  $\vec{r}_{\alpha}$ ), mas um parâmetro contínuo denotando o campo em qualquer ponto do espaço.

### 2.2.2 Algumas importantes constantes do movimento

Começando com as equações (2.1)-(2.5) e as expressões (2.8) e (2.9) para  $\rho$  e  $\vec{j}$ , podemos mostrar que as seguintes funções de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{r}_{\alpha}$  e  $\vec{v}_{\alpha}$ :

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2(t) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left[ \vec{E}^2(\vec{r}, t) + c^2 \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right], \quad (2.11)$$

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(t) + \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.12)$$

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}(t) \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(t) + \epsilon_0 \int d^3r r \vec{r} \times \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right], \quad (2.13)$$

são constantes de movimento, isto é, não dependem de  $t$ .

$H$  é a *energia total* do sistema global campo + partículas,  $\vec{P}$  é o *momentum linear total*, e  $\vec{J}$  é o *momentum angular total*. O fato destas quantidades serem constantes do movimento resulta da invariância das equações do movimento com respeito às mudanças da origem do tempo, da origem das coordenadas, e da orientação dos eixos coordenados.

### 2.2.3 Potenciais e invariância de calibre

As equações (2.2) e (2.3) sugerem que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem sempre ser escritos na forma

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.14)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla U(\vec{r}, t), \quad (2.15)$$

onde  $\vec{A}$  é um campo vetorial, chamado *potencial vetor*, e  $U$  é um campo escalar chamado *potencial escalar*. Uma das vantagens de introduzir  $\vec{A}$  e  $U$  é que as equações (2.2) e (2.3) são automaticamente satisfeitas. Outras vantagens aparecem na formulação lagrangeana e hamiltoniana da eletrodinâmica.

Substituindo as equações (2.14) e (2.15) nas equações (2.1) e (2.4), obtemos as equações do movimento para  $\vec{A}$  e  $U$ :

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}(\vec{r}, t) - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r}, t)\right], \quad (2.17)$$

as quais são equações diferenciais parciais de segunda ordem e não de primeira ordem como as equações (2.1)-(2.4). Desde que  $\partial^2 U/\partial t^2$  não aparece na equação (2.16), esta equação não é uma equação do movimento para  $U$ , mas apenas relaciona  $U$  a  $\partial\vec{A}/\partial t$  em cada instante de tempo. O estado do sistema é agora especificado apenas pelas quantidades  $\vec{A}(\vec{r}, t_0)$  e  $\partial\vec{A}(\vec{r}, t_0)/\partial t$  para todo  $\vec{r}$ .

Segue que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são invariantes sob a *transformação de calibre* abaixo, desde que as equações do movimento para  $\vec{A}$  e  $U$  (equações (2.16) e (2.17)) são invariantes e pelas equações

(2.14) e (2.15) os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são dados em termos de  $\vec{A}$  e  $U$ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \nabla F(\vec{r}, t) \quad (2.18)$$

$$U(\vec{r}, t) \rightarrow U'(\vec{r}, t) = U(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\vec{r}, t) \quad (2.19)$$

onde  $F(\vec{r}, t)$  é uma função arbitrária de  $\vec{r}$  e  $t$ . Há então certa redundância nestes potenciais, desde que os mesmos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser escritos utilizando muitos potenciais diferentes  $\vec{A}$  e  $U$ . Esta redundância pode ser reduzida pela escolha de uma condição de calibre a qual fixa  $\nabla \cdot \vec{A}$  (o valor de  $\nabla \times \vec{A}$  já é determinado pela equação (2.14)).

Os calibres mais usados são o calibre de Lorentz e o calibre de Coulomb. O calibre de Lorentz é definido por

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.20)$$

Podemos provar que é sempre possível escolher uma função  $F$  nas equações (2.18) e (2.19), tal que a equação (2.20) seja satisfeita para  $\vec{A}'$  e  $U'$ . No calibre de Lorentz, as equações (2.16) e (2.17) assumem uma forma mais simples:

$$\square U(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (2.21)$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}(\vec{r}, t). \quad (2.22)$$

onde  $\square = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \nabla^2$  é o operador d'Alembertiano. As equações de Maxwell por um lado e a condição de Lorentz por outro são relativisticamente invariantes, isto é, elas mantêm a mesma forma após uma transformação de Lorentz. Por outro lado, o calibre de Coulomb (ou radiação) é definido por

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.23)$$

Neste calibre as equações (2.16) e (2.17) se tornam

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (2.24)$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}, t) \quad (2.25)$$



A equação (2.24) é a equação de Poisson para  $U$ . A covariância é perdida, mas existem outras vantagens do calibre de Coulomb, como por exemplo, o fato de que este calibre é útil na eletrodinâmica quântica.

#### 2.2.4 A notação do espaço recíproco

Definimos a transformada de Fourier espacial como

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.26)$$

e sua inversa,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.27)$$

As equações dos campos no espaço recíproco podem ser obtidas notando-se que o operador  $\nabla$  no espaço real se transforma em uma multiplicação por  $i\vec{k}$  no espaço recíproco. Logo, as equações de Maxwell (equações (2.1)-(2.4)), no espaço recíproco, são escritas como:

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad (2.28)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0, \quad (2.29)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{\mathcal{B}}}, \quad (2.30)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{\mathcal{E}}} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} \quad (2.31)$$

É aparente nas equações (2.28)-(2.31) que  $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$  e  $\dot{\vec{\mathcal{B}}}$  dependem apenas dos valores de  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ ,  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{k})$ ,  $\rho(\vec{k})$ , e  $\vec{j}(\vec{k})$  em um *mesmo* ponto  $\vec{k}$ . O ponto sobre o símbolo que representa o campo significa derivada temporal. As equações de Maxwell, as quais são equações diferenciais parciais no espaço real, tornam-se *estritamente locais* no espaço recíproco, o que introduz uma grande simplificação.

A equação da continuidade (2.6) agora é escrita como

$$i\vec{k} \cdot \vec{j} + \dot{\vec{\rho}} = 0. \quad (2.32)$$

As relações entre os campos e os potenciais se tornam

$$\vec{\mathcal{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}, \quad (2.33)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{\mathcal{A}}} - i\vec{k}\mathcal{U}, \quad (2.34)$$

e as transformações de calibre (2.18) e (2.19)

$$\vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + i\vec{k}\mathcal{F} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}' = \mathcal{U} - \dot{\mathcal{F}} \quad (2.36)$$

e as equações (2.16) e (2.17) para os potenciais

$$k^2\mathcal{U} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho + i\vec{k} \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}} \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{\mathcal{A}}} + k^2\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} - i\vec{k} \left( i\vec{k} \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathcal{U}} \right) \quad (2.38)$$

## 2.2.5 Campos vetoriais transversos e longitudinais

Por definição, um campo vetorial longitudinal  $\vec{V}_{\parallel}(\vec{r})$  é um campo vetorial tal que

$$\nabla \times \vec{V}_{\parallel}(\vec{r}) = 0, \quad (2.39)$$

o qual, no espaço recíproco, se torna

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{V}}_{\parallel}(\vec{k}) = 0. \quad (2.40)$$

Por outro lado, um campo vetorial transverso  $\vec{V}_{\perp}(\vec{r})$  é caracterizado por

$$\nabla \cdot \vec{V}_{\perp}(\vec{r}) = 0, \quad (2.41)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{V}}_{\perp}(\vec{k}) = 0. \quad (2.42)$$

Comparando as expressões (2.39) e (2.40) ou (2.41) e (2.42) notamos que o nome longitudinal ou transverso tem um significado geométrico claro no espaço recíproco: para um campo vetorial longitudinal,  $\vec{\mathcal{V}}_{\parallel}(\vec{k})$  é paralelo a  $\vec{k}$  para todo  $\vec{k}$ ; para um campo vetorial transverso,  $\vec{\mathcal{V}}_{\perp}(\vec{k})$  é perpendicular a  $\vec{k}$  para todo  $\vec{k}$ .

Da equação (2.15) ou (2.34) conectando o campo elétrico aos potenciais, segue que

$$\vec{E}_\perp = -\dot{\vec{A}}_\perp, \quad (2.43)$$

$$\vec{E}_\parallel = -\dot{\vec{A}}_\parallel - \nabla U. \quad (2.44)$$

No calibre de Coulomb, temos  $\vec{A}_\parallel = 0$ , com o resultado de que

$$\vec{A}_\parallel = 0 \rightarrow \vec{E}_\parallel = -\nabla U. \quad (2.45)$$

Segue que as partes transversa e longitudinal de  $\vec{E}$  são associadas, no calibre de Coulomb, com  $\vec{U}$  e  $\vec{A}$  respectivamente, e  $\vec{U}$  é o potencial de Coulomb de uma distribuição de carga, o qual é solução da equação de Poisson:

$$\nabla \cdot \vec{E}_\parallel = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla^2 U \Leftrightarrow U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.46)$$

Notamos também que as transformações de calibre (2.35) e (2.36), não afetam  $\vec{A}_\perp$ , ou seja, tanto para  $\vec{A}_\perp$  quanto para  $\vec{A}'_\perp$  as equações (2.37) e (2.38) têm a mesma forma. Segue que o *potencial vetor transverso  $\vec{A}_\perp$  é invariante por calibre*

$$\vec{A}'_\perp = \vec{A}_\perp. \quad (2.47)$$

## 2.2.6 Momento angular eletromagnético orbital e intrínseco

A parte do momento angular associada puramente aos campos eletromagnéticos é dada por [3]

$$\vec{J} = \epsilon_0 \int d^3r \vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{B}]. \quad (2.48)$$

Duas contribuições para (2.48) podem ser encontradas, as quais são originadas das partes longitudinais e transversas de  $\vec{E}$ . A primeira é o momento angular do campo de Coulomb instantâneo das cargas, e a segunda é a contribuição do campo de radiação, e é denotada por  $\vec{J}_{rad}$ . É bem conhecido que este  $\vec{J}_{rad}$  pode ser separado em duas partes, chamadas de partes spin e orbital [2]

$$\vec{J}_{rad} = \vec{L}_{rad} + \vec{S}_{rad}, \quad (2.49)$$

com

$$\vec{S}_{rad} = \varepsilon_0 \int d^3r \vec{E}_\perp \times \vec{A}_\perp, \quad (2.50)$$

$$\vec{L}_{rad} = \varepsilon_0 \sum_l \int d^3r E_l^\perp (\vec{r} \times \nabla) A_l^\perp. \quad (2.51)$$

Desde que estas quantidades são definidas em termos da parte transversa do potencial vetor  $\vec{A}$ , elas são invariantes por calibre. O spin  $\vec{S}_{rad}$  é também chamado de parte intrínseca, desde que é independente da origem do sistema de coordenadas.

### 2.3 Feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel

Pode se dizer que o moderno estudo do MAO da luz começou em 1992 com o artigo de Allen *et. al.* [10]. Este trabalho mostrou que qualquer feixe com uma amplitude complexa da forma  $E(r, \phi, z) = E_0(r, z) \exp(im\phi)$  transporta momento angular em torno do eixo de propagação.

Os campos elétricos e magnéticos obedecem as equações de Maxwell, e, conseqüentemente, suas componentes obedecem a equação de Helmholtz [70], que no espaço livre pode ser escrita como:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.52)$$

onde  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  e  $c$  é a velocidade da luz. A aproximação paraxial [70] da equação de Helmholtz, conhecida como equação paraxial, é dada por

$$\nabla_t^2 E + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad (2.53)$$

onde  $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  é o laplaciano transversal. Um conjunto completo de soluções da equação paraxial é formado pelos feixes conhecidos como feixes Laguerre-Gauss, os quais são um exemplo de feixe com MAO. Eles podem ser obtidos da resolução da equação (2.53) em coordenadas cilíndricas usando a técnica de separação de variáveis [70]. Estes feixes são escritos como

$$E_{mp}(r, \phi, z) \propto (-1)^p \left( \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \exp(im\phi) \\ \times L_p^m\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[-i(2p+l+1)\arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)\right], \quad (2.54)$$

onde

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2} \quad (2.55)$$

e

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_r}{z}\right)^2\right) \quad (2.56)$$

são respectivamente, o raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda no plano  $z$ .  $w_0$  é a cintura mínima do feixe e  $z_r = kw_0^2/2$  é comprimento de Rayleigh,  $L_p^m$  é o polinômio generalizado de Laguerre e  $(2p + m + 1) \arctan(z/z_r)$  é a fase de Gouy. Em cada volta na direção azimutal a fase varia de  $2m\pi$ , onde  $m$  é conhecido como carga topológica, e o número de anéis na distribuição radial do campo é igual a  $p + 1$ . Para um dado valor de  $p$  o raio do feixe aumenta quando aumentamos o valor de  $m$ .

Outro exemplo de feixe com MAO são os feixes Bessel, que são soluções da equação de Helmholtz. Esta solução da equação de Helmholtz foi publicada pela primeira vez por J. Durnin, em 1987, também utilizando coordenadas cilíndricas [71]. A expressão geral para um feixe Bessel é

$$E(\rho, \phi, z) = E_0 J_m(k_t \rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.57)$$

onde  $E_0$  é uma constante,  $J_m$  é a função de Bessel de ordem  $m$ , e  $k_t$  e  $\beta$  são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda  $k^2 = k_t^2 + \beta^2$  e  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  são as coordenadas cilíndricas.

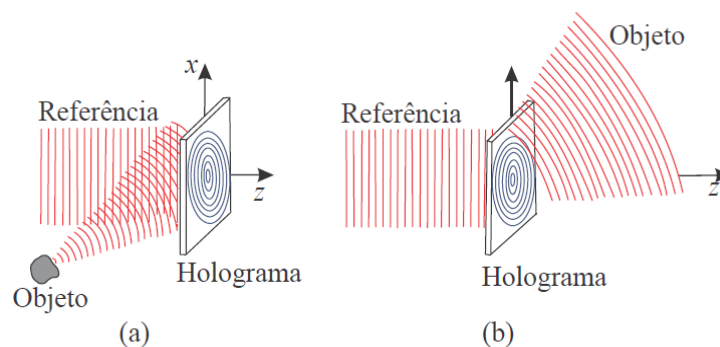
Uma característica interessante desta solução para a equação de Helmholtz é que o feixe obtido tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação e são conhecidos como não difratantes.

## 2.4 Criação experimental de feixes com vórtice

A produção de feixes de luz possuindo momento angular orbital não é uma das tarefas mais fáceis. A maioria dos lasers comerciais produz feixes com frentes de ondas aproximadamente planas e perfil de intensidade gaussiano, pois esse é o modo de excitação de menor energia

da cavidade. Entretanto, existem vários métodos para gerar feixes com momento angular orbital de maneira estável. Um método simples para a obtenção dos modos LG é usando um holograma gerado por computador. Essencialmente um holograma é a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, em geral uma onda plana [72]. Ao iluminarmos o holograma com o feixe de referência, reconstruímos o feixe de interesse pela difração da luz. A figura 2.1 ilustra este processo.

Figura 2.1: (a) Gravação de um holograma e (b) processo de reconstrução do feixe desejado.



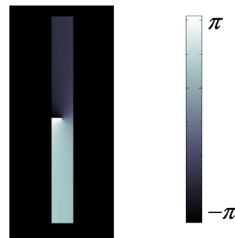
Fonte: (Saleh [70], 2007)

Os primeiros hologramas foram feitos gravando-se o padrão de interferência em uma transparência. Mas verifica-se que esse procedimento é complexo e demorado. Um método muito mais simples e dinâmico é utilizar o modulador espacial de luz (MEL). Com um MEL de fase, podemos projetar hologramas de fase, utilizando técnicas holográficas diversas [73, 74]. Estes hologramas são imagens digitais, normalmente em preto e branco, com tons de cinza, onde cada tom corresponde a uma fase diferente quando esculpido no MEL, variando de 0 a  $2\pi$ . A superfície refletora de um MEL de fase é constituída de pixels de cristal líquido cuja fase pode ser controlada eletronicamente. Com este aparato é possível desenhar hologramas que podem codificar a amplitude e a fase de campos complexos variados.

## 2.5 Caracterização de feixes com OAM por meio de métodos difrativos

Os efeitos em feixes de luz com MAO propagando-se através de aberturas têm sido retratados em alguns trabalhos recentes. Em 2009, Ghai *et. al.* [20] estudaram o padrão de difração de um feixe LG por uma fenda simples. Eles observaram que o padrão de difração para  $m = 1$  mostra uma “quebra”, ou uma franja escura disposta transversalmente no centro do padrão. Para  $m = 2$  o padrão se modifica, mas ainda é muito similar ao anterior. Na figura 2.2 mostramos a distribuição de fase para o feixe dentro da fenda simples para  $m = 1$ . Observe que no centro está a singularidade de fase do feixe LG e quando você cruza o centro da fenda, passando de uma extremidade a outra, existe um pulo de aproximadamente  $\pi$  na fase. Isto justifica a “quebra” observada no centro padrão na terceira coluna da figura 2.3. Este efeito, no entanto, não pode ser usado para efetivamente medir valores inteiros grandes de carga topológica.

Figura 2.2: Distribuição de fase de dentro de uma fenda simples cujo centro coincide com o centro de um feixe LG de TC  $m = 1$ .

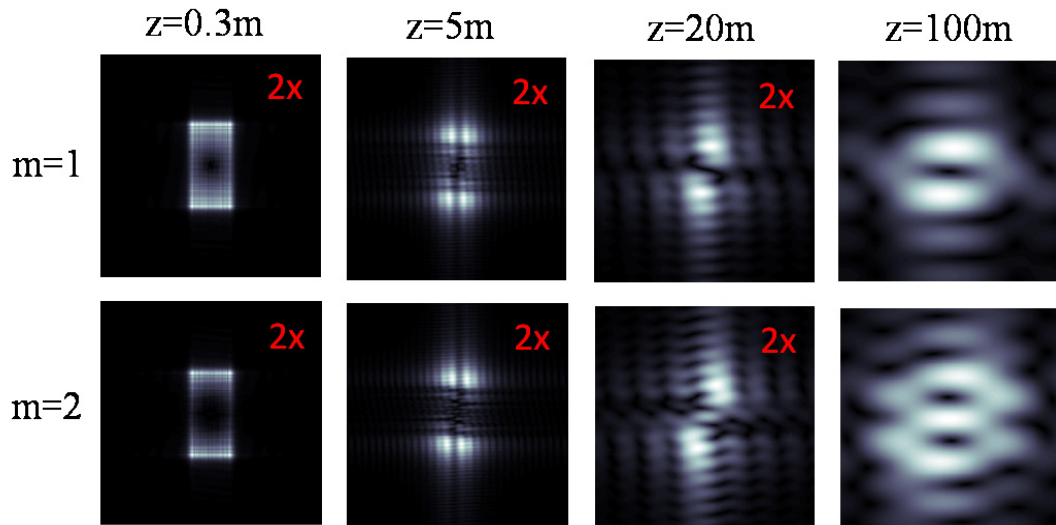


Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

É importante ressaltar que no trabalho citado anteriormente, as medidas não são realizadas na zona de Fraunhofer. Na figura 2.3 mostramos o cálculo da propagação para diferentes distâncias de propagação. Observamos que a distância de propagação é importante na obtenção do resultado da referência [20]. Nesta referência os autores têm que escolher uma distância de propagação difícil de ser especificada, fazendo com que o experimento necessite uma calibração sofisticada. Para  $a^2/\lambda d \ll 1$ , onde  $a$  é o raio transversal dentro do qual o feixe está confinado

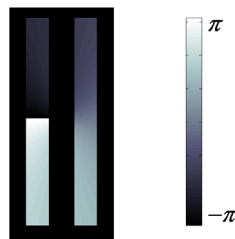
no plano de observação,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $d$  é a distância de propagação, o padrão de difração é chamado de padrão de Fraunhofer. Para maiores detalhes sobre as difrações de Fresnel e Fraunhofer veja a referência [70]. Neste caso, o padrão é muito diferente daquele descrito na referência [20], como pode ser visto na quarta coluna da figura 2.3.

Figura 2.3: Difração por uma fenda simples. As três primeiras colunas foram ampliadas de forma a dobrar de tamanho.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Figura 2.4: Distribuição de fase dentro de uma dupla fenda para  $m = 1$ . A singularidade de fase está entre as duas fendas, no centro.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Sztul e Alfano [21] estudaram a interferência em uma dupla fenda de Young usando um feixe LG. O padrão de interferência das ondas provenientes das duas fendas exibe uma inclinação



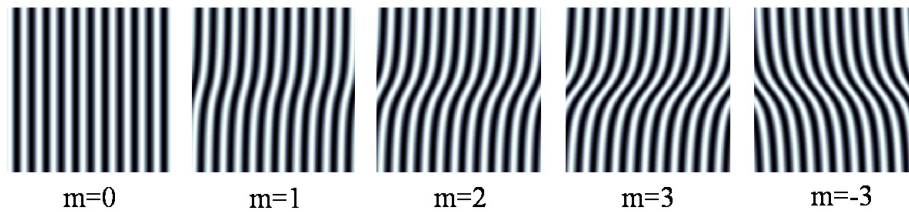
não usual no padrão da fenda dupla. Isto ocorre em razão da contribuição de fase devida à estrutura da frente de onda ser uma fase a mais em adição à diferença de caminho. A variação de fase da frente de onda produz uma mudança na fase longo das duas fendas (figura 2.4).

A intensidade do padrão de difração do campo distante de um feixe Laguerre-Gauss incidente em uma fenda dupla, é dado por

$$I(x, y) = \cos^2 \left( \frac{\pi ax}{\lambda d} + \frac{\Delta\phi(y)}{2} \right), \quad (2.58)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe incidente,  $a$  é a largura das fendas,  $d$  é a distância das fendas ao plano de observação e  $\Delta\phi(y)$  é a variação de fase adicional entre as duas fendas. O padrão de difração será inclinado devido ao fato de que a variação de fase  $\Delta\phi(y)$  produz um deslocamento da variável  $x$ , deslocamento este dependente de  $y$ . Quanto maior a carga topológica maior será o deslocamento, figura 2.5. No entanto, é difícil identificar o valor da carga topológica observando apenas a inclinação da imagem de interferência, esta configuração parece mais adequada para determinar o sinal da carga topológica, pois a direção da inclinação depende do sinal da carga [75].

Figura 2.5: Intensidade no plano de Fraunhofer para a difração de um feixe LG por uma dupla fenda.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Em outro trabalho recente, Berkhout e Beijersbergen [22] descreveram um sistema de dois ou mais pontos, dispostos circularmente e igualmente espaçados em torno da singularidade de um feixe óptico, a que eles chamaram de interferômetro de multipontos (MPI), e mostraram que pode ser usado para medir o estado de MAO de feixes com frente de onda helicoidal.

Neste método, a carga topológica do feixe pode ser reconhecida de acordo com o fato de que diferentes valores para carga topológica correspondem a diferentes padrões de difração do campo distante, após o feixe passar através do MPI. Os autores mostram que a intensidade do padrão de difração de um feixe Laguerre-Gauss ao passar por um MPI no limite de Fraunhofer é dada por

$$I_l^m \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-im\alpha_n) \exp\left[i\frac{ka}{z}(x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n)\right] \right|^2, \quad (2.59)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o vetor de onda,  $\alpha_n = 2\pi n/N$  é a coordenada azimutal do  $n$ -ésimo ponto,  $a$  é coordenada radial do ponto e  $N$  é o número de pontos. Agora, se calcularmos o padrão de intensidade do campo distante de um MPI, deslocando o valor de  $m$  na forma  $m + pN$ , onde  $p$  é um número inteiro e  $N$  é o número de pontos do MPI, implica que  $I_m^N = I_{m+pN}^N$ . Desta forma, observarmos que aqui também não é possível caracterizar a carga topológica do feixe difratado devido à ambigüidade dos resultados [75].

Mais recentemente, Hickmann *et. al.* [25] estudaram teoreticamente e experimentalmente o padrão de difração na aproximação de Fraunhofer de um feixe com frente de onda helicoidal por uma abertura triangular. Consideremos uma abertura cuja função de transmissão é descrita no plano  $z = 0$  por  $T(x, y)$ . Um feixe LG com  $p = 0$  no plano  $z = 0$ , tem amplitude dada por

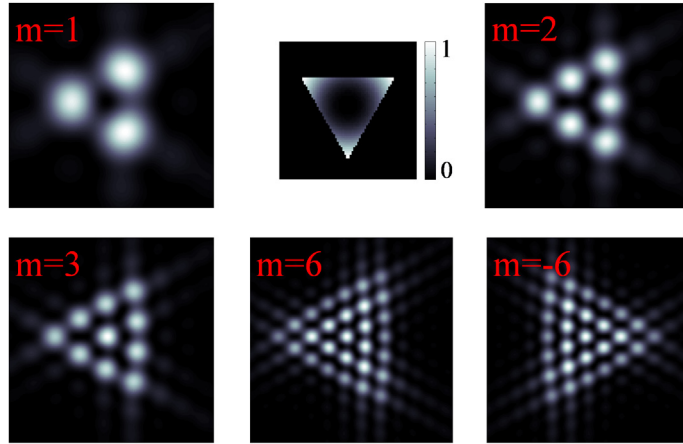
$$E(r, \phi, z) \propto r^m \exp(im\phi) \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right), \quad (2.60)$$

onde  $w_0$  é cintura mínima do feixe,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a coordenada radial,  $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  é a coordenada azimutal e  $m$  é a CT do feixe. Assim, a difração de Fraunhofer do campo LG após cruzar perpendicularmente essa abertura é dada por uma integral de Fraunhofer

$$E(k_x, k_y, z = 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \quad (2.61)$$

onde  $k_x$  e  $k_y$  são as componentes transversais do vetor de onda no plano de observação, plano de Fraunhofer.

Figura 2.6: No centro temos uma representação da distribuição de intensidade dentro da abertura triangular. No entorno, temos padrões de Fraunhofer triangulares para diversas cargas topológicas.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

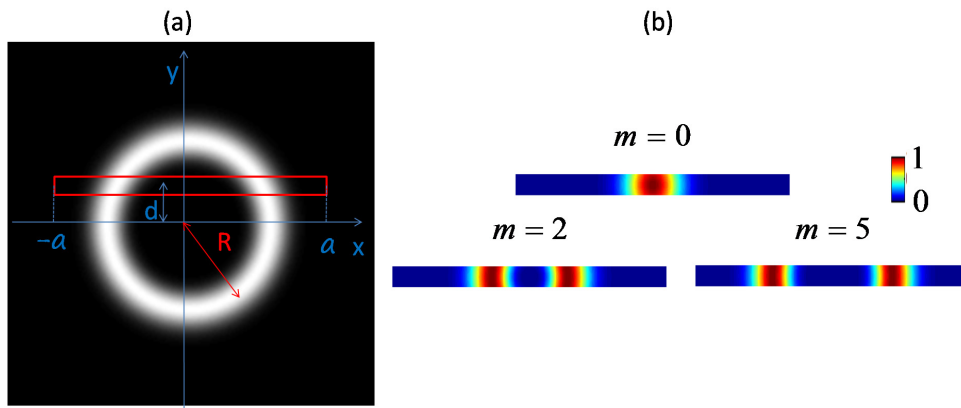
Os resultados obtidos da simulação numérica da integral da equação (2.61) são mostrados na figura 2.6. Observamos claramente que é possível determinar o valor e o sinal da carga topológica. Forma-se uma rede de máximos de intensidade, e os valores da CT são dados por  $m = N - 1$ , onde  $N$  é o número de pontos no lado da rede triangular formada. O sinal da carga topológica também pode ser determinado, uma vez que o padrão aparece girado de  $\pi$  quando invertemos a carga topológica.

Neste ponto, gostaria de ressaltar duas contribuições nesta linha de pesquisa nas quais participei: os trabalhos sobre a difração de Fraunhofer pela fenda simples [28, 29] e pela abertura quadrada [30, 31]. O primeiro está relacionado com a explicação da difração por uma abertura triangular e o segundo mostra que para uma abertura quadrada não é possível determinar a carga topológica de um feixe com MAO.

## 2.5.1 Difração de Fraunhofer de luz com MAO por uma fenda simples

Nos parágrafos seguintes passamos a discutir os resultados publicados na referência [28]. A figura 2.7(a) mostra a disposição da fenda em relação ao feixe LG, onde  $R$  é medido como a distância do centro ao ponto de maior intensidade do feixe e  $d$  é o deslocamento da fenda em relação ao centro do feixe.

Figura 2.7: Arranjo mostrando uma fenda e feixes LG de alta-ordem; onde  $2a$  é o comprimento da fenda e  $d$  é a distância do centro do feixe ao centro da fenda. (b) Simulação numérica da distribuição de intensidade dentro da fenda para  $m = 0$ ,  $m = 2$ , e  $m = 5$  para  $d = 0$ .

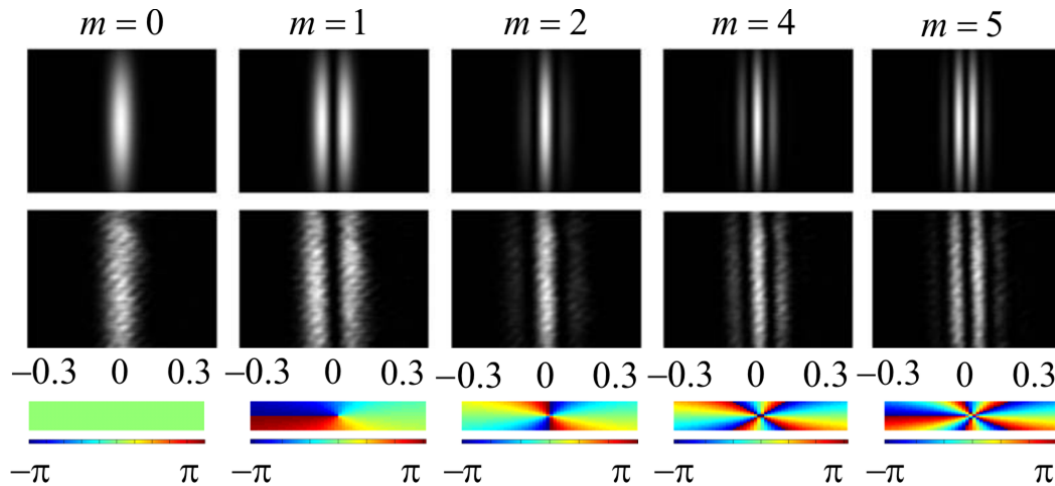


Fonte: (Jesus-Silva, 2011)

O objetivo da investigação numérica que fizemos é obter padrões de difração causados por feixes de luz espalhados no campo distante. Para isto, utilizamos a integral de Fraunhofer, Eq. (3), onde a abertura  $T(x, y)$  é uma fenda simples. Os painéis da figura 2.8 mostram simulações numéricas (primeira linha) e resultados experimentais (segunda linha) do padrão de difração de feixes com MAO pela fenda simples com  $d = 0$  e  $m = 0, 1, 2, 4$ , e  $5$ . Também mostramos diagramas de fase no plano da fenda (terceira linha). Para  $m = 0$  temos um padrão de difração de fenda simples usual. No entanto, para altas ordens de MAO, os padrões são similares a padrões de difração de fendas duplas de Young. Note que, para  $d = 0$  e  $m \neq 0$ , há um máximo central para ordens pares do MAO e um mínimo central para ordens ímpares do

MAO. Estes efeitos podem ser entendidos olhando os perfis dos feixes com MAO no plano da fenda (veja figura 2.7(b)). Quando  $m = 0$ , apenas um máximo de intensidade está presente. Para este caso, temos um padrão de difração usual para um feixe gaussiano típico difratado por uma fenda simples. Isto pode ser visto nos painéis para  $m = 0$ . Contudo, para feixes LG de alta ordem temos dois máximos de intensidade e a separação entre eles depende do MAO. Isto pode ser visto na figura 2.7(b), para  $m = 2$  e  $m = 5$ . Devemos considerar também a fase ao longo da fenda. Para ordens pares do MAO, a diferença de fase entre quaisquer dois máximos de intensidade ao longo de uma linha na direção da fenda é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Esta diferença de fase é  $\pi$  para ordens ímpares. Também, o número de franjas aumenta com a quantidade de MAO porque a distância entre os máximos aumenta com  $m$ .

Figura 2.8: **Padrões de difração e diagramas de fase para  $m = 0, 1, 2, 4$ , e  $5$  e (da esquerda para a direita) para  $d = 0$ . Primeira linha: simulações numéricas. Segunda linha: resultados experimentais correspondendo á primeira linha. Terceira linha: diagramas de fase ao longo da fenda.**

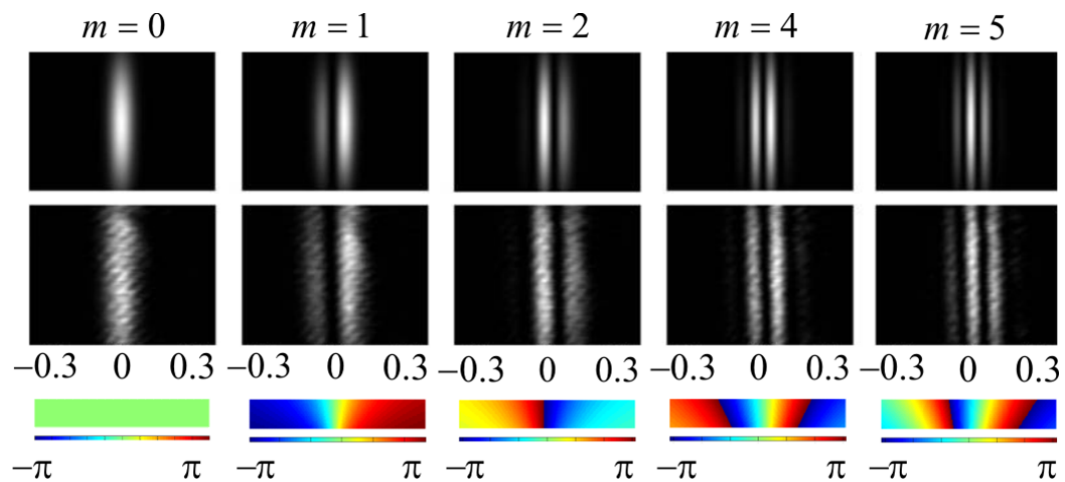


Fonte: (Ferreira [28], 2011)

Também investigamos situações com  $d \neq 0$ , isto é, quando a singularidade de fase não está centrada na fenda. A figura 2.9 mostra as simulações numéricas, os resultados experimentais e os diagramas de fase para  $d = 0.2R$ . Neste caso,  $R$  é o raio do feixe. Em contraste aos

padrões mostrados na figura 2.8, os padrões são assimétricos e deslocados da posição central definida pelo máximo central do padrão do feixe com  $m = 0$ .

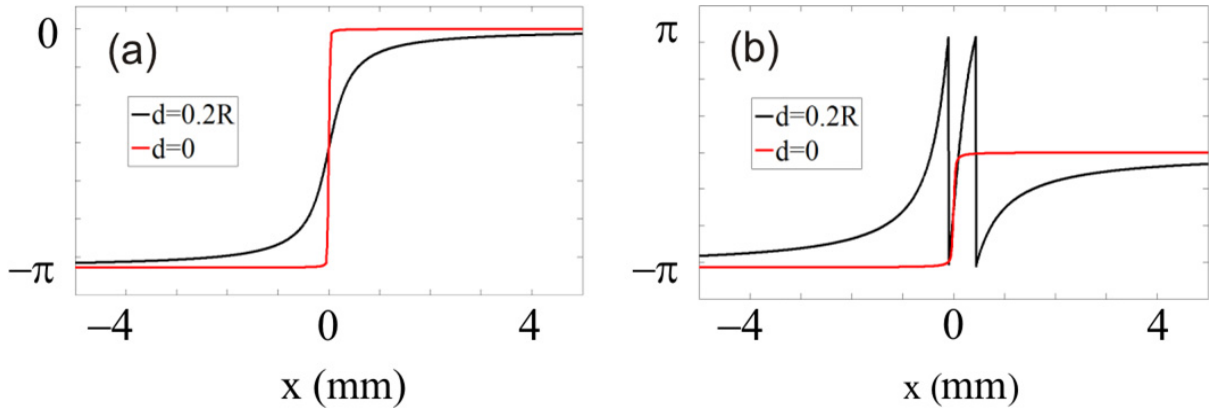
Figura 2.9: **Padrões de difração e diagramas de fase para  $m = 0, 1, 2, 4$ , e  $5$  (da esquerda para a direita) e  $d = 0.2R$ . Primeira linha: padrões de difração simulados. Segunda linha: resultados experimentais correspondentes à primeira linha. Terceira linha: diagramas de fase dentro da fenda.**



Fonte: (Ferreira [28], 2011)

A figura 2.10 compara a fase do feixe ao longo da fenda para  $m = 1$  e  $m = 5$  para  $d = 0$  e  $d = 0.2R$ . Podemos ver na figura 2.10 que, para  $d = 0$ , a fase ao longo da fenda para as regiões próximas dos máximos de intensidade (regiões não próximas a  $x = 0$ ), é constante, e tem um comportamento não constante para  $d \neq 0$ . O último comportamento evolui de aproximadamente linear com inclinação crescente, para não linear quando  $m$  aumenta.

Figura 2.10: **Perfis de fase ao longo do centro da fenda. A carga topológica é  $m = 1$  (a) e  $m = 5$  (b) para  $d = 0$  e  $d = 0.2R$ .**



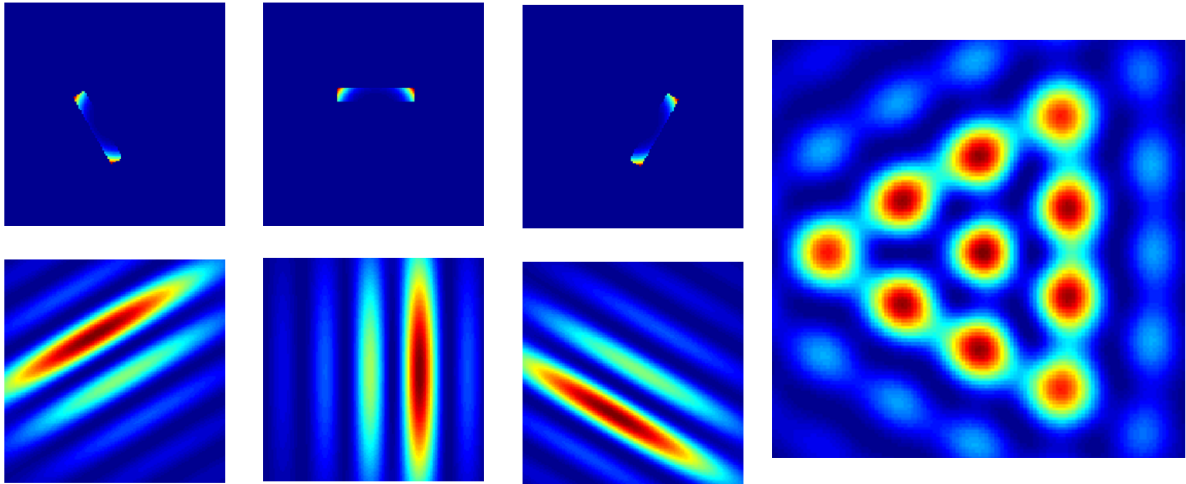
Fonte: (Ferreira [28], 2011)

Não há diferença significativa se substituirmos a abertura triangular por uma fenda triangular, ou seja, se cada borda da abertura for substituída por uma fenda simples. Neste sentido, podemos empregar o conceito de difração por uma fenda simples para explicar a formação dos padrões da figura 2.6. Efetivamente devemos considerar três fendas simples deslocadas do centro do feixe, onde o deslocamento deve ser aproximadamente  $d = 0.2R$ , onde  $R$  é o raio do feixe. Esse deslocamento é a apótema do triângulo, pois as três fendas devem ser dispostas ao longo das bordas da abertura triangular e devem ter comprimento igual ao lado do triângulo. A figura 2.11 mostra os padrões de difração das três fendas dispostos abaixo da figura da respectiva fenda. É a interferência destes três padrões que forma o padrão triangular truncado mostrado à direita da figura 2.11. Temos observado que para MAO com  $m > 10$  não há uma boa formação de uma rede truncada dificultando a determinação CT. A razão para isto é o fato de que a fase deixa de ser linear ao longo da fenda.

Em conclusão, estudamos a difração de Fraunhofer de feixes LG por uma fenda simples. Devido à forma anular do perfil dos feixes LG, o problema da difração por uma fenda simples usando feixes com MAO pode ser interpretado como um experimento da dupla fenda de Young usando feixes sem MAO. Contudo, para entender a formação de franjas de interferência, um

novo elemento deve ser levado em consideração: a fase azimutal. A posição dos máximos e mínimos do padrão de interferência pode ser controlado alterando o MAO do feixe.

Figura 2.11: **Padrões de difração de um feixe LG por três fendas simples dispostas numa configuração triangular eqüilátera. A interferência das três fendas revela a CT do feixe LG, neste caso  $m = 3$ .**



Fonte: (Jesus-Silva, 2011)

## 2.5.2 Difração de Fraunhofer de luz com MAO por uma abertura quadrada

Em um outro trabalho investigamos também a difração por uma abertura quadrada, cujos resultados foram publicados na referência [30]. Para calcular esse padrão devemos substituir a função de transmissão  $T(x, y)$  na equação (2.61) pela função de transmissão da abertura quadrada. Podemos fazer um cálculo analítico, neste caso. Para isso devemos notar que podemos aproximar o campo dentro da fenda por  $E = r^m \exp(im\phi) = (x \pm iy)^{|m|}$ , onde para CT negativa tomamos o sinal negativo e para CT positiva o sinal positivo. Desta forma, a difração de Fraunhofer para uma abertura quadrada será

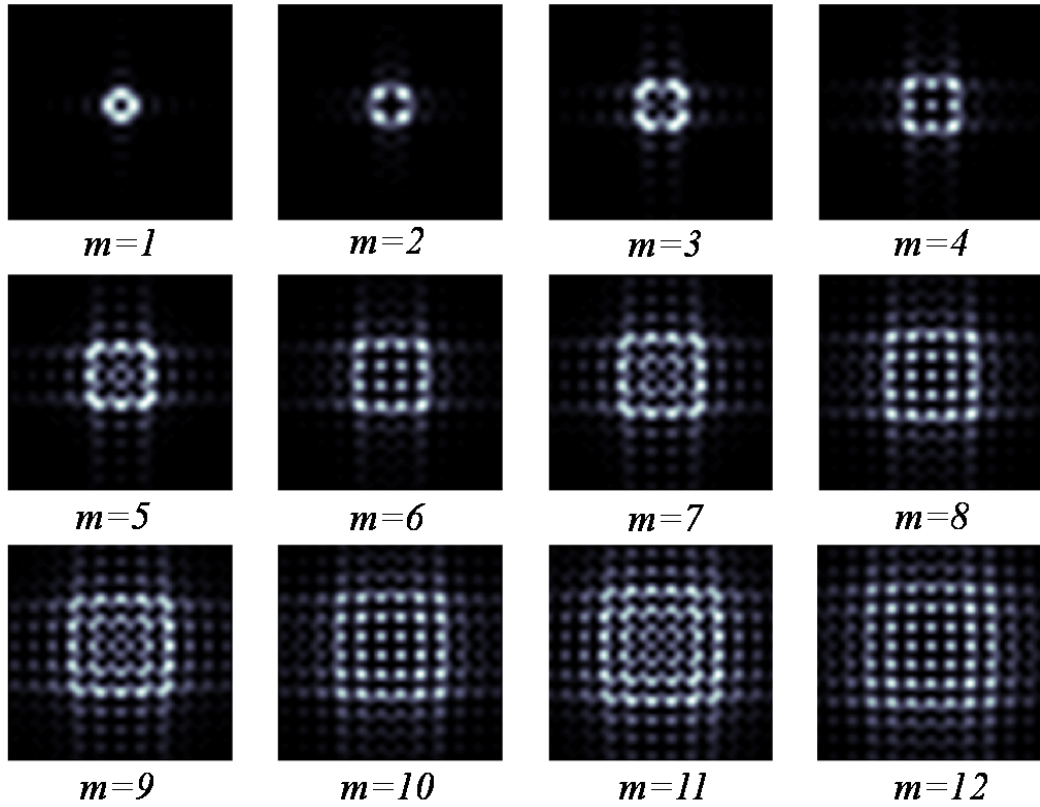
$$E_{\pm|m|}(k_x, k_y) = \int_{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}} (x \pm iy)^{|m|} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (2.62)$$



onde  $a$  é o lado do quadrado. Considerando carga topológica positiva, temos

$$E_m(k_x, k_y) = \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (2.63)$$

Figura 2.12: Padrões de difração da abertura quadrada utilizando-se feixes LG.



Fonte: (Mesquita [30], 2012)

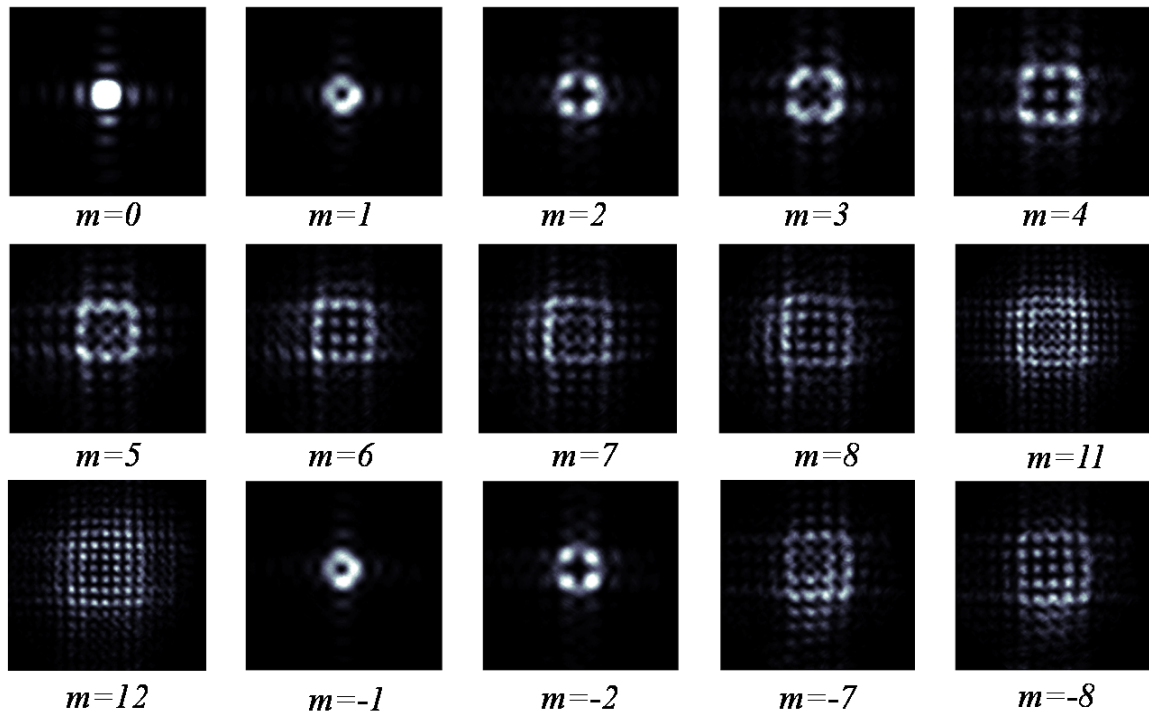
Obviamente podemos primeiramente resolver a integral e depois calcular as derivadas, para qualquer valor de  $m$ . As integrais são triviais, resultando

$$E_m(k_x, k_y) = \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \frac{2 \sin(ak_x/2)}{k_x} \frac{2 \sin(ak_y/2)}{k_y}, \quad (2.64)$$

que é o campo do quadrado analítico para qualquer valor de CT. Embora esta seja uma expressão analítica, não é uma expressão simples.

Na figura 2.12 mostramos os padrões de difração para uma abertura quadrada calculados numericamente. Observamos que, apenas para CT pares existe uma boa formação da de uma rede quadrada de máximos de intensidade.

Figura 2.13: Padrões de difração experimentais de feixes LG por uma abertura quadrada.



Fonte: (Mesquita [30], 2012)

Os painéis na figura 2.13 mostram resultados experimentais para os padrões de difração de feixes LG por uma abertura quadrada para  $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, -1, -2, -7, e -8$ . Observamos uma rede óptica quadrada apenas para valores pares de  $m$ , confirmando os resultados da simulação. O sinal de  $m$  não muda globalmente a forma do padrão porque este é invariante por uma rotação de  $\pi$ . Naturalmente, para  $m = 0$  temos o padrão de difração de uma abertura quadrada usual.

Podemos substituir cada borda da abertura por uma fenda simples. Assim é possível explicar a formação de uma rede para CT par. Para isso escrevemos o padrão de difração em

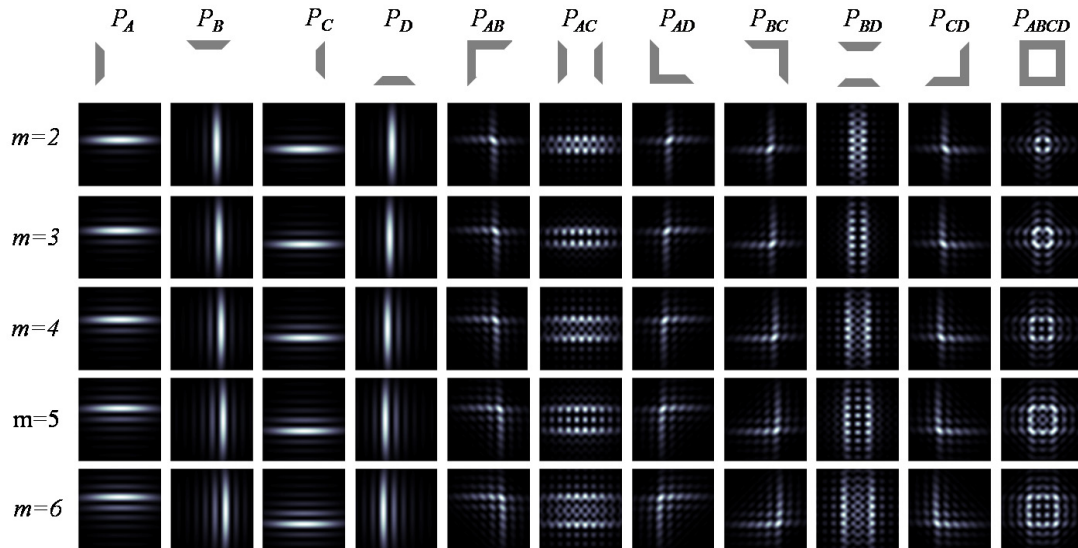
termos de uma combinação de padrões de fendas simples e mostramos que a boa formação ou má formação do padrão vem da interferência de bordas paralelas [30]. Os resultados experimentais mostrados na figura 2.13 podem ser obtidos somando as contribuições de fendas simples e fendas duplas, segundo um resultado da óptica quântica conhecido como regra de Born [64]. Aqui também associamos uma fenda a cada borda da abertura quadrada, formando uma fenda quadrada. Salientamos que a abertura quadrada e a fenda quadrada têm padrões de difração similares.

A figura 2.14 mostra padrões de difração para todas as combinações de fendas com  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . O padrão completo  $P_{ABCD}$  é obtido através da seguinte soma de padrões [64]:

$$P_{ABCD} = P_{AB} + P_{AC} + P_{AD} + P_{BC} + P_{BD} + P_{CD} - 2P_A - 2P_B - 2P_C - 2P_D, \quad (2.65)$$

onde  $A, B, C$ , e  $D$  representam cada fenda simples da fenda quadrada e  $P_j$  e  $P_{ij}$ , para  $i, j = A, B, C, D$ , representam os padrões devidos a cada fenda e cada par de fendas, respectivamente. Os padrões  $P_j$ , associados com as fendas simples, mostram que quando  $m$  aumenta o número de franjas de interferência aumenta e todos os padrões são deslocados [28]. Por outro lado, os padrões  $P_{ij}$ , para os pares de fendas, exibem comportamentos diferentes. Para a configuração de fendas ortogonais, podemos ver que o padrão é composto de picos de intensidade e o número destes picos aumenta com o valor de  $m$ . No entanto, para a configuração de fendas paralelas, podemos ver que há dois tipos de padrões, um para valores ímpares de  $m$  e outro para valores pares de  $m$ . Esta observação indica que os padrões,  $P_{AC}$  e  $P_{BD}$ , têm um importante papel no processo de formação da rede óptica de intensidade que é dependente da paridade de  $m$ .

Figura 2.14: Padrões de difração produzidos por combinações de fendas. Cada fenda é mostrada no topo.

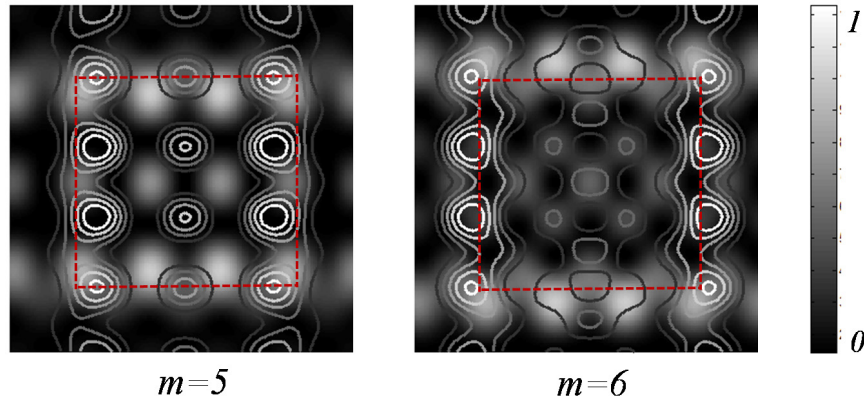


Fonte: (Mesquita [30], 2012)

Na figura 2.15, sobrepormos os padrões de intensidade,  $P_{AC}$  e  $P_{BD}$ , para  $m = 5$  e  $m = 6$ . No primeiro caso, observamos que os picos de intensidade em  $P_{AC}$  e  $P_{BD}$  não coincidem. No entanto, para  $m = 6$  os picos no centro de cada padrão coincidem. Isto define uma rede óptica de intensidade bem formada para valores de pares de  $m$  quando todas as contribuições são consideradas na soma (2.65).

Geometricamente também vemos que não existe uma rede de máximos de intensidade entre dois valores de CT pares, pois geometricamente o número de pontos em cada lado é  $N = 2, 3, 4, 5, \dots$  para  $m = 2, 4, 6, 8, \dots$ , ou seja,  $m = 2N - 2$ .

Figura 2.15: Superposição dos padrões,  $PAC$  (intensidade) e  $PBD$  (contornos de intensidade).



Fonte: (Mesquita [30], 2012)

Em conclusão, estudamos a difração de Fraunhofer de feixes LG por uma abertura quadrada. Observamos que para CT par, aparece uma rede quadrada composta de picos de intensidade. Por outro lado, a rede de máximos de intensidade não existe para CT ímpar. Para entender a formação destes padrões de difração substituímos a abertura quadrada por uma fenda quadrada. Considerando que a interferência ocorre aos pares, decompomos o padrão de difração da fenda quadrada em padrões originados de cada fenda e de pares de fendas. Mostramos que padrões originados de configurações de pares de fendas paralelas são responsáveis pelos dois tipos de padrões: um para CT par e outro para CT ímpar. Diferentemente do caso dos valores de CT ímpar, para CT par, há uma boa combinação dos máximos de intensidade no centro do padrão. Isto se reflete na formação de uma rede de intensidade truncada quadrada.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo começamos revendo algumas propriedades básicas das equações de Maxwell que permitem a separação do momento angular eletromagnético nas componentes de spin e orbital. Continuamos revendo algumas propriedades de feixes com MAO. A principal propriedade destes feixes é terem uma distribuição de fase azimutal. Introduzimos os feixes LG e Bessel,

que são exemplos de feixes com MAO. Também vimos que esses feixes não são facilmente produzidos, sendo necessária a utilização de hologramas para gerá-los.

Revisamos a difração de luz com MAO através de aberturas no espaço livre. Estudamos as fendas simples e duplas, e mostramos que os seus padrões de difração não são suficientes para determinar a carga CT de um feixe com MAO, mas a combinação de fendas simples numa disposição triangular é suficiente para determinar o módulo e o sinal da CT. Vimos também que o método do MPI não consegue discernir diferentes CTs. Além disso, mostramos porque, para uma abertura quadrada, ocorre a formação de uma rede de máximos de intensidade bem definida apenas para CT par.

### 3 ESTUDO DO NASCIMENTO DE UM VÓRTICE NA ZONA DE FRAUNHOFER

#### 3.1 Introdução

No capítulo anterior vimos a definição de MAO, exemplos de feixes com MAO e propriedades de sua difração por aberturas. Neste capítulo apresentamos um estudo analítico e experimental sobre a difração de Fraunhofer de um feixe de luz com vórtice que possui índice azimutal  $m$  fracionário. Mostraremos que a difração de Fraunhofer deste tipo de feixe produz o nascimento de um vórtice extra, mesmo para  $m = n + \varepsilon$ , onde  $n$  é um número inteiro e  $\varepsilon$  é uma pequena fração. Mostraremos que este vórtice extra se move de uma posição de intensidade mais baixa para uma posição de intensidade mais alta (de fora para dentro do feixe) a medida que  $m$  aumenta em passos fracionários de  $\varepsilon$ .

Recentemente tem havido um grande interesse em vórtices ópticos com cargas fracionárias [32–39]. Em um artigo pioneiro, Berry estudou teoricamente a evolução na propagação de ondas com vórtices ópticos de  $2\pi m$ , com  $m$  podendo assumir valores inteiros e não inteiros [32]. Um resultado notável foi obtido para o caso de vórtices com  $m$  não inteiro. Berry mostrou que o nascimento de um vórtice dentro do feixe ocorre quando o valor fracionário de  $m$  é igual ou maior que a metade de um valor inteiro. Este resultado foi confirmado experimentalmente por [33, 34] e, recentemente, por [35] usando uma abertura triangular, depois do trabalho de Hickmann *et al.* [25].

Inferir o nascimento de um vórtice não é uma tarefa experimentalmente trivial. Existem vários aspectos que devemos levar em consideração. Interessantemente, até hoje, todos os trabalhos sobre o assunto tinham sido realizados fora da zona de Fraunhofer, provavelmente devido ao trabalho original de Berry. No entanto, na referência [35], os autores se propõem a investigar o nascimento de um vórtice usando o método desenvolvido na referência [25], que essencialmente usa o plano de Fraunhofer nas medidas de MAO. Como veremos, este trabalho não consegue provar aquilo a que se propõe, ou seja, demonstrar que apenas para valores fracionários de  $m$  maiores ou iguais à metade de um valor inteiro, uma nova fileira de lóbulos se desenvolve na rede de máximos de intensidade.

Aqui apresentamos um novo ingrediente para este problema. Nossos resultados mostram que, no plano de Fraunhofer do feixe com CT fracionária, não é possível garantir o nascimento de um vórtice como um evento que ocorre apenas para valores de  $m$  maiores ou iguais a metade de um inteiro. Na verdade, o vórtice nasce em  $m = n + \varepsilon$ , com  $n$  um número inteiro e  $\varepsilon$  uma pequena fração que define o nascimento de um vórtice.

### 3.2 Nascimento de um vórtice na zona de Fresnel

Estamos interessados no estudo da evolução de singularidades de fase com CT fracionária na propagação. A fim de fazermos um tratamento analítico para o cálculo da difração de Fresnel devemos considerar uma onda plana incidente em uma superfície refletora com fase azimutal. Segundo Berry [32], na aproximação paraxial, o campo após a placa azimutal para uma CT fracionária  $m$  é dado por

$$\psi_m(\rho, \phi, z) = \frac{\exp[i(z + \pi m)] \sin(\pi m)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(in\phi) P_n(\rho)}{m - n}, \quad (3.1)$$

onde

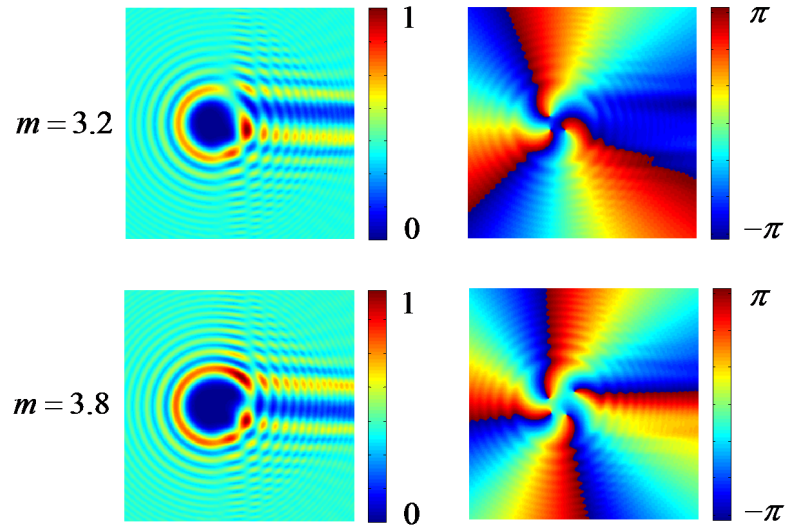
$$P_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (-i)^{|n|/2} \rho \exp\left(\frac{1}{4}i\rho^2\right) \left[ J_{\frac{1}{2}(|n|-1)}\left(\frac{1}{4}\rho^2\right) - iJ_{\frac{1}{2}(|n|+1)}\left(\frac{1}{4}\rho^2\right) \right]. \quad (3.2)$$

Na figura 3.1 mostramos os gráficos da amplitude e da fase para a equação (3.1) com  $m = 3.2$  e  $m = 3.8$ . Observamos que não há singularidade no centro do padrão e os vórtices



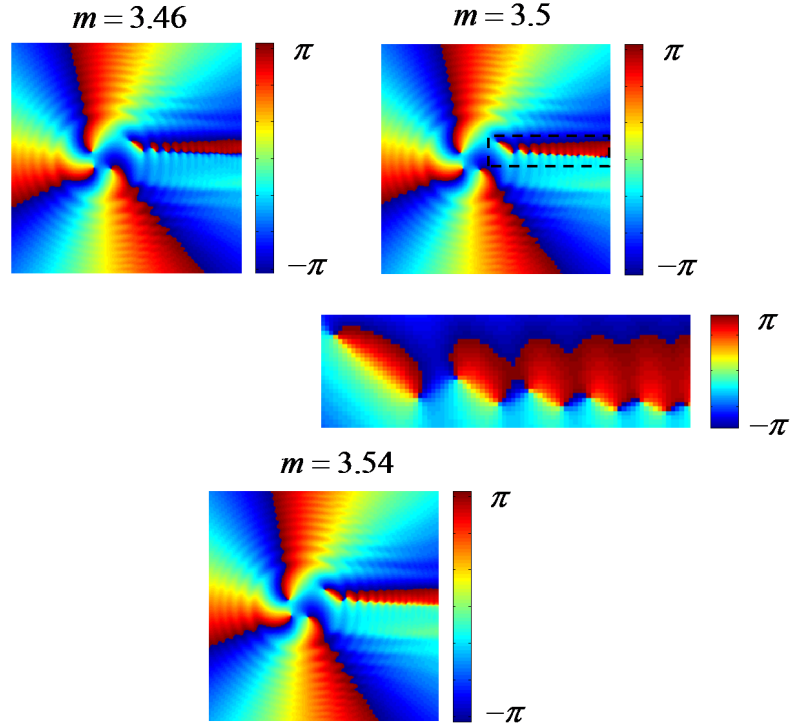
se separam espacialmente em vórtices inteiros, caracterizando a instabilidade do vórtice de CT fracionária na propagação. No entanto, observamos 3 vórtices inteiros para  $m = 3.2$  e 4 vórtices inteiros para  $m = 3.8$ .

Figura 3.1: Amplitude e fase do campo calculado através da equação (3.1).



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Há também a formação, à direita do padrão, de uma calda onde para  $m$  próximo da metade de um inteiro surgem pares de vórtices, compostos de um vórtice positivo e um vórtice negativo (veja figura 3.2). Esta calda corresponde à difração pela singularidade de fase existente ao longo do eixo  $x$  resultante da CT fracionária. É nesta região, segundo Berry [32], que se originará um novo vórtice, o qual não será cancelado por um vórtice de carga oposta, quando  $m$  for maior que a metade de um inteiro.

Figura 3.2: Nascimento de um novo vórtice em torno de  $m = 7/2$ .

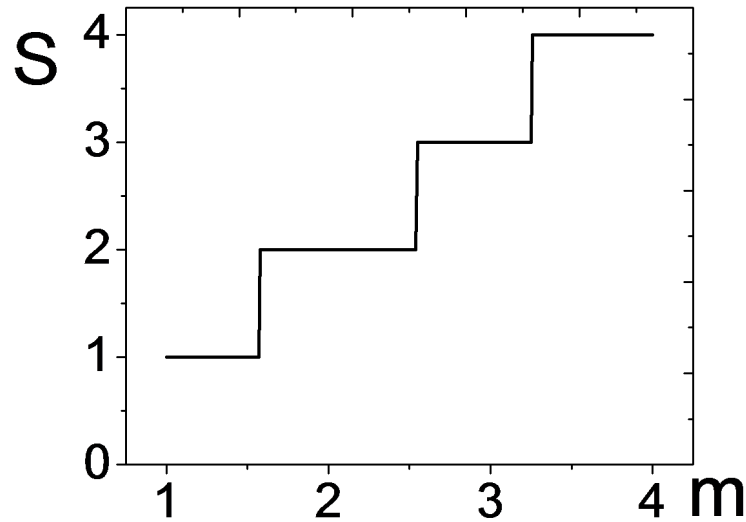
Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Na figura 3.2 mostramos o mecanismo responsável pelo nascimento de um vórtice em torno de  $m = 7/2$ . Podemos observar que ocorre a formação dos pares de vórtices na região da calda do padrão, os quais aparecem destacados e ampliados para  $m = 7/2$ .

Berry também define a CT total ou o “strength” do campo [32],

$$\begin{aligned}
 S_m &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \arg \psi_m(\rho, \phi, z) \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n-m} P_n(\rho) \exp(in\phi)}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n-m} P_n(\rho) \exp(in\phi)}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Calculamos a integral (3.3) numericamente usando  $k = 4$  e  $w_0 = 0.7$  e mostramos os resultados na figura 3.3. Esta figura mostra que o nascimento de um vórtice ocorre sempre que  $m$  é maior ou igual à metade de um inteiro. Além disso, podemos concluir que a CT total  $S$  do campo é sempre igual ao inteiro mais próximo de  $m$ .

Figura 3.3: CT total  $S$  como função de  $m$  calculada da equação (3.3).

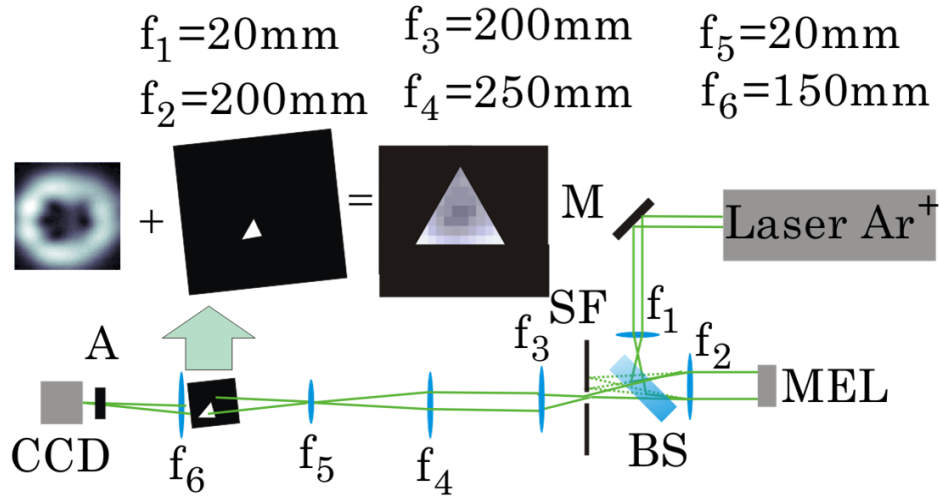
Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

### 3.3 Nascimento de um vórtice na zona de Fraunhofer

#### 3.3.1 Experimento

Para realizar o experimento utilizamos o arranjo experimental mostrado na figura 3.4. Um laser de íons de Argônio, operando em 514nm, ilumina um holograma gerado por computador escrito em um modulador espacial de luz (MEL) modelo Hamamatsu X10468-01. Usamos um holograma de fase para codificar fase e amplitude [73]. Um par de lentes  $f_1$  e  $f_2$  foi usado para fazer uma imagem do MEL na lente  $f_4$ . O efeito da estrutura discreta de pixels do MEL foi eliminado por filtragem espacial SF. Uma lente de foco pequeno  $f_5$  foi usada para fazer uma imagem ampliada do campo de Fraunhofer em uma pequena abertura triangular. A abertura foi posicionada sobre cada vórtice. Fizemos a transformada de Fourier do campo da abertura usando uma lente  $f_6$  a fim de obter a CT de cada vórtice separado no espaço transversal. A intensidade da luz difratada coletada é medida por uma câmara CCD (charge coupled device).

Figura 3.4: Arranjo experimental. Uma abertura triangular foi colocada sobre cada vórtice e a intensidade e da luz difratada foi medida em uma câmera CCD. Também medimos a intensidade na posição da abertura.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

### 3.3.2 Teoria

Para elucidar melhor o que queremos mostrar, vamos considerar o campo  $E_i$  na posição da lente  $f_4$ . Este campo tem intensidade na forma de um anel e fase azimuthal podendo ser escrito como

$$E_i(\rho, \phi) = A\rho^m \exp\left(\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \exp(im\phi), \quad (3.4)$$

onde  $m$  é a CT a qual pode assumir valores fracionários,  $w_0$  é a cintura do feixe no plano inicial (na lente  $f_4$ ),  $A$  é constante de normalização, e  $(\rho, \phi)$  são as coordenadas polares. O índice radial será sempre zero e não será mencionado novamente. Neste ponto o vórtice é degenerado, isto é, há um único vórtice de CT fracionária.

Estamos interessados na propagação de Fraunhofer do campo da equação (3.4). A fim de calcular este resultado analiticamente, desprezamos o termo  $\rho^m$  na equação (3.4), o qual é

desprezível para nossos propósitos, e calculamos a integral de Fraunhofer [76]:

$$E(k, \theta_k) \propto \int_0^{2\pi+\infty} \int_0 E_i(\rho, \phi) e^{-ik\rho \cos(\theta_k - \phi)} \rho d\rho d\phi \quad (3.5)$$

Esta expressão corresponde à transformada de Fourier do campo  $E_i$ . Experimentalmente isto é realizado pela lente  $f_4$ .

Para  $\alpha$  fracionário, podemos expandir a fase fracionária em série de Fourier [32]

$$\exp(im\phi) = \frac{\exp(i\pi\phi) \sin(\pi m)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(in\phi)}{m-n}. \quad (3.6)$$

Usando a expressão (3.6) na equação (3.4) e inserindo o resultado na equação (3.5), obtemos o spectrum da equação (3.4), dado por

$$E(k, \theta_k) \propto k \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^{|n|} \exp(in\theta_k) BI_n(k)}{m-n}, \quad (3.7)$$

onde

$$BI_n(k) = I_{(|n|-1)/2}\left(\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right) - I_{(|n|+1)/2}\left(\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right), \quad (3.8)$$

onde  $I_\nu(\gamma)$  é a função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem  $\nu$  e argumento  $\gamma$ .

### 3.3.3 Resultados e discussão

A figura 3.5 mostra a amplitude, primeira coluna, e a fase, segunda coluna dos resultados calculados. Isto é um gráfico da equação (3.7) com  $m = 3.3$ . É interessante notar uma clara assinatura de quatro vórtices inteiros no padrão de fase.

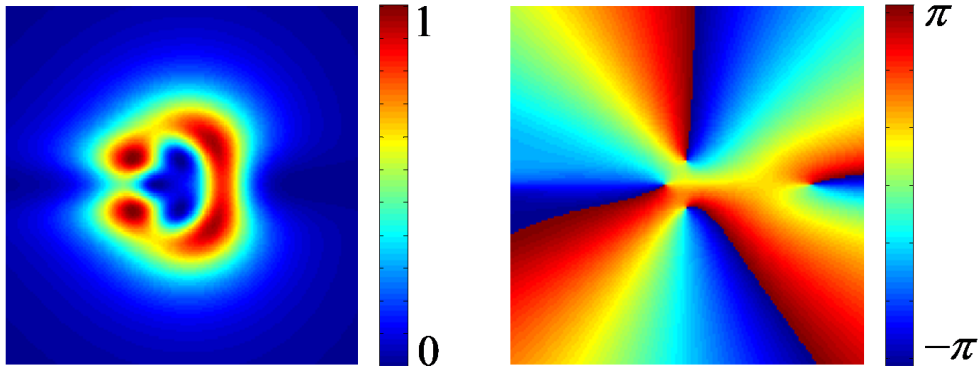
A CT total ou o “strength” do campo no plano de Fraunhofer pode ser calculado [32],

$$\begin{aligned} S_m &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \arg E(k, \theta_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_k \operatorname{Re} \left[ (-i) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_k} E(k, \theta_k)}{E(k, \theta_k)} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Calculando esta expressão numericamente com  $k = 4$  e  $w_0 = 0.7$ , observamos pulos na CT total em  $m = 2.1, 3.1, 4.2$  e  $5.2$ . Estes resultados são mostrados na figura 3.6. Observamos

o nascimento de um vórtice em  $m = n + \varepsilon$ , onde  $n$  é um número inteiro e  $\varepsilon$  é uma pequena fração.

Figura 3.5: **Resultado teórico no plano de Fraunhofer para amplitude (esquerda) e fase (direita) usando  $m = 3.3$ .**

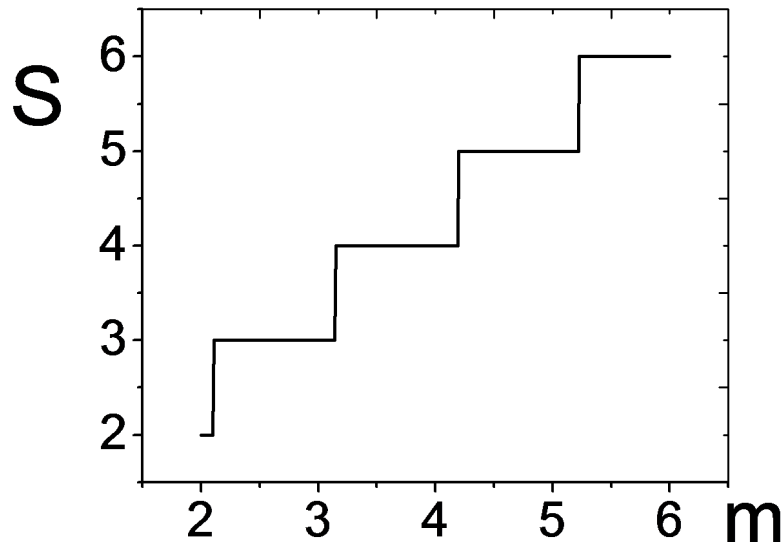


Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

A CT total definida na equação (3.9) depende das distribuições de amplitude e fase. A intensidade do feixe define uma região finita e o vórtice se move em direção ao centro desta região quando o valor fracionário da CT  $m$  é aumentado. Para um valor de  $\varepsilon$  muito pequeno, o vórtice não está sobre a região de intensidade significativa do feixe, então sua contribuição para a integral é quase insignificante. Vale a pena mencionar que a cintura do feixe aumenta quando  $m$  aumenta, e conseqüentemente, o valor de  $\varepsilon$  para o qual um vórtice nasce também muda. Este movimento do vórtice ficará mais claro na explicação dos resultados experimentais.

No plano de Fraunhofer a CT fracionária é espacialmente separada e há o nascimento de um vórtice independentemente se o valor da CT fracionária é menor que a metade de um valor inteiro. Desta forma, vemos que na região de Fraunhofer é possível o nascimento de um vórtice mesmo para cargas fracionárias levemente maiores que um valor inteiro, diferindo do trabalho seminal de Berry [32].

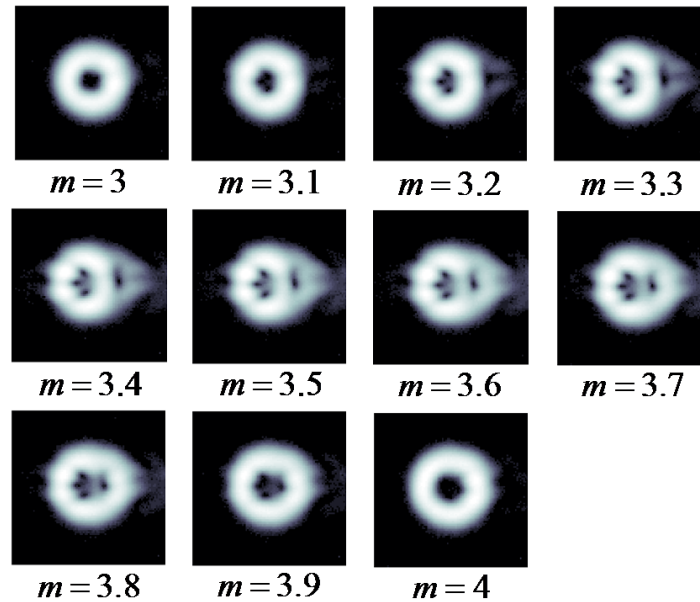
Figura 3.6: CT total  $S$  do campo no plano de Fraunhofer como função de  $m$  calculada da equação 3.9.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

Para o prosseguimento das investigações realizamos alguns experimentos. A figura 3.7 mostra algumas imagens do perfil de intensidade de feixes LG correspondentes ao spectrum da equação (3.9), para valores de  $m$  variando de 3 a 4 em passos de 0.1. Fizemos o gráfico da quantidade  $\log(1 + |E|^2)$ , onde  $|E|^2$  é a intensidade do feixe LG medida. A quebra do vórtice de alta CT em CTs unitárias é claramente observada para uma pequena fração  $\varepsilon = 0.2$  adicionada à CT inteira  $n = 3$ . Observe que para  $m = 3.1$ , a contribuição do vórtice emergente é muito pequena.

Figura 3.7: Medidas experimentais do perfil de intensidade de um feixe LG com CT fracionária variando de 3 à 4 em passos de 0.1 no plano de Fraunhofer.



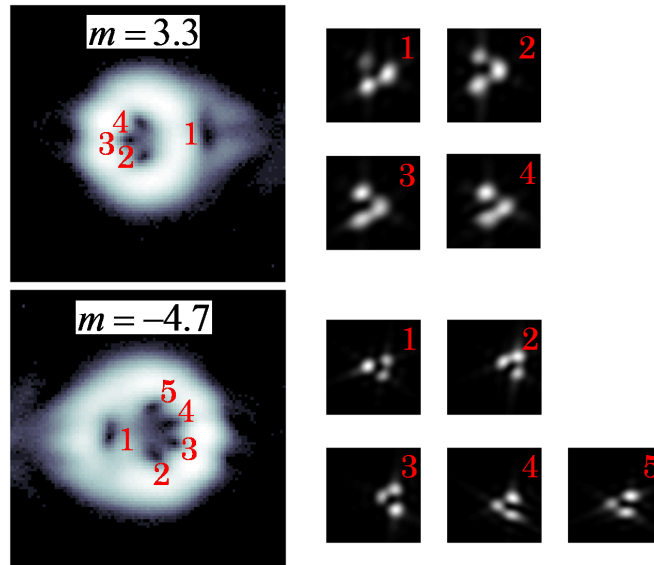
Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

De fato, tal quebra dos vórtices ópticos tem sido observada em outros sistemas ópticos [77,78]. Basicamente, em todos estes estudos experimentais e teóricos, algum tipo de assimetria tem sido aplicada ao vórtice. Em nosso caso, temos uma quebra de simetria na distribuição de fase ao longo de feixe.

Como podemos ver na figura 3.7, um vórtice simples, o qual nasceu isolado à direita do padrão, se move para a esquerda em direção ao centro do padrão quando a CT aumenta em passos fracionários. Quando o valor da CT se aproxima do próximo valor inteiro os vórtices coalescem em um único vórtice de valor inteiro.



Figura 3.8: Medidas experimentais do perfil de intensidade de um feixe LG para valores de  $m = 3.3, -4.7$  no plano de Fraunhofer e padrões de difração por uma abertura triangular mostrando valores de CT  $m = 1$  e  $m = -1$  para as CT fracionárias  $m = 3.3$  e  $m = -4.7$ , respectivamente.



Fonte: (Jesus-Silva, 2012)

A figura 3.8 apresenta o quebra de um vórtice óptico em 4 para  $m = 3.3$  e em  $-5$  para  $m = -4.7$ . Observe que mesmo para valores menores que a metade de um inteiro já temos o nascimento de um vórtice. Para confirmar esta afirmação, a figura 3.8 também mostra mediadas de difração de cada vórtice óptico por uma pequena abertura triangular, como sugerido na figura 3.4. A pequena abertura triangular foi posicionada no centro de cada vórtice óptico, como mostrado à direita da figura 3.8. Como podemos ver, o padrão de interferência medido é tipicamente de luz com MAO de CT  $n = 1$  [25] em todas as medidas para  $m = 3.3$ , tendo o mesmo sinal.

Um comportamento similar foi observado para CT fracionária negativa, onde todo o padrão é girado de  $\pi$  e cada vórtice óptico tem sinal negativo, como exemplificado para  $m = -4.7$  na figura 3.8.

Os resultados apresentados nesta secção foram aceitos para publicação na revista *Optics Letters*.

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo estudamos o nascimento de um vórtice na zona de Fraunhofer. Utilizando teoria e experimento, mostramos uma quebra de degenerescência e a formação de CTs inteiras para CTs fracionárias menores que a metade de um inteiro. Verificamos que a regra para a metade de um inteiro apresentada em [32] não é válida na zona de Fraunhofer.

## 4 VÓRTICES DE COERÊNCIA EM CAMPOS PSEUDOTÉRMICOS

### 4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos luz com MAO de CT inteira e fracionária em sistemas coerentes, onde a fase é bem definida. No entanto, sistemas parcialmente coerentes [40], onde o uso de estatística é necessário para descrever o campo eletromagnético, também podem apresentar vórtices na correlação, os chamados *vórtices de coerência*. Este tipo de vórtice corresponde a pares de pontos onde o grau espectral de coerência, uma função de correlação entre dois campos, é zero. De fato, como já dissemos anteriormente, vórtices de coerência envolvendo correlações de campos com CT têm-se revelado uma interessante nova área de pesquisa [41–48].

Neste capítulo, exploramos vários aspectos fundamentais dos vórtices de coerência usando correlação de intensidade, também conhecida como correlação de campo de quarta ordem: i) *correlações de vórtices* – o valor da CT equivalente obtido na correlação de intensidade segue uma regra de correlação tal que seu valor é definido pela CT associada à cada feixe incoerente; ii) *estabilidade de um vórtice de coerência* – uma assinatura precisa de um vórtice de CT inteira foi observada na correlação de dois feixes incoerentes com cada feixe possuindo carga fracionária; iii) *fase azimutal não localizada* – uma quantidade bem definida de MAO foi observada na correlação de intensidade quando dois feixes incoerentes com MAO foram

difratados por objetos diferentes, a informação de fase azimutal foi recuperada usando-se um objeto distribuído.

## 4.2 Teoria

Por simplicidade, consideramos um vórtice coma uma distribuição de campo inicial de um feixe LG

$$E_m(r, \phi) = E_0 \left| \frac{r}{w_0} \right|^{|m|} \exp(-r^2/w_0^2) \exp(im\phi), \quad (4.1)$$

onde  $E_0$  e  $w_0$  são a amplitude e a cintura do feixe no plano  $z = 0$ , respectivamente,  $m$  é a CT, e  $\phi$  é a fase azimutal.

A função correlação de intensidade é dada por uma média no ensemble e supomos que a seguinte propriedade é válida [40]

$$\begin{aligned} \langle I_1(\vec{r}_1) I_2(\vec{r}_2) \rangle &= \langle E_1^*(\vec{r}_1) E_2^*(\vec{r}_2) E_1(\vec{r}_1) E_2(\vec{r}_2) \rangle \\ &= \langle I_1(\vec{r}_1) \rangle \langle I_2(\vec{r}_2) \rangle + \left| \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $E_1(\vec{r}_1)$  e  $E_2(\vec{r}_2)$  são campos no plano de detecção, e  $\langle \rangle$  denota uma média no ensemble.  $\langle I_1(\vec{r}_1) \rangle \langle I_2(\vec{r}_2) \rangle$  corresponde a um termo de “background”, e  $\left| \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right|^2$  é o módulo quadrado da correlação de campo de segunda ordem [40],

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle E_1(\vec{r}_1) E_2^*(\vec{r}_2) \rangle \quad (4.3)$$

Consideramos uma fase aleatória no plano  $z = 0$  cuja distribuição estatística produz um campo de luz estacionário, que vamos assumir que possa ser descrito por um modelo Schell-Gaussian cuja parte que descreve a correlação é dada em função de uma diferença de coordenadas  $C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \exp\left(-\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}{l_c}\right)$  [40], onde  $l_c$  é o comprimento de coerência. Inserindo a equação (4.1) na equação (4.3) e usando o modelo Schell-Gaussian, a correlação de campo de segunda ordem de dois feixes com MAO de CTs  $m_1$  e  $m_2$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{m_1, m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{E_0^2}{w_0^{(|m_1|+|m_2|)}} r_1^{|m_1|} r_2^{|m_2|} \exp(im_\Gamma \phi_\Gamma) \\ &\quad \times \exp\left[-(r_1^2 + r_2^2)/w_0^2\right] C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \end{aligned} \quad (4.4)$$

com  $m_\Gamma \phi_\Gamma = m_1 \phi_1 - m_2 \phi_2$ , onde  $m_\Gamma$  é o que definimos como uma carga topológica efetiva (CTE) da função de correlação com fase azimutal efetiva  $\phi_\Gamma$ .

O spectrum angular desta função de correlação é dado por [40]:

$$\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int \int A_1(\vec{r}_1) A_2(\vec{r}_2) A_1(\vec{r}_1) \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (4.5)$$

onde  $A_i(\vec{r}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) é uma função que descreve uma abertura.

A quantidade física  $\Gamma_{m_1, m_2}(\vec{k}, -\vec{k})$  é particularmente interessante para o estudo da robustez de um vórtice óptico [43, 45]. Quando o comprimento de coerência  $l_c$  é muito pequeno podemos supor que a parte correlacionada da função de coerência se reduz a  $C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = I_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , onde  $I_0$  e  $\delta$  denotam uma constante positiva e a função delta de Dirac, respectivamente. Neste caso, a equação (4.5) se torna

$$\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2} = \frac{E_0^2}{w_0^{(|m_1|+|m_2|)}} \int A_1(\vec{r}_1) A_2(\vec{r}_1) r_1^{|m_1|+|m_2|} e^{i(m_1-m_2)\phi_1} e^{-2i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} d\vec{r}_1, \quad (4.6)$$

onde usamos  $\vec{k}_2 = \vec{k}_1 = -\vec{k}$ . E agora a CTE é dada por  $m_\Gamma \phi_\Gamma = (m_1 - m_2) \phi_1$ .

### 4.3 Experimento

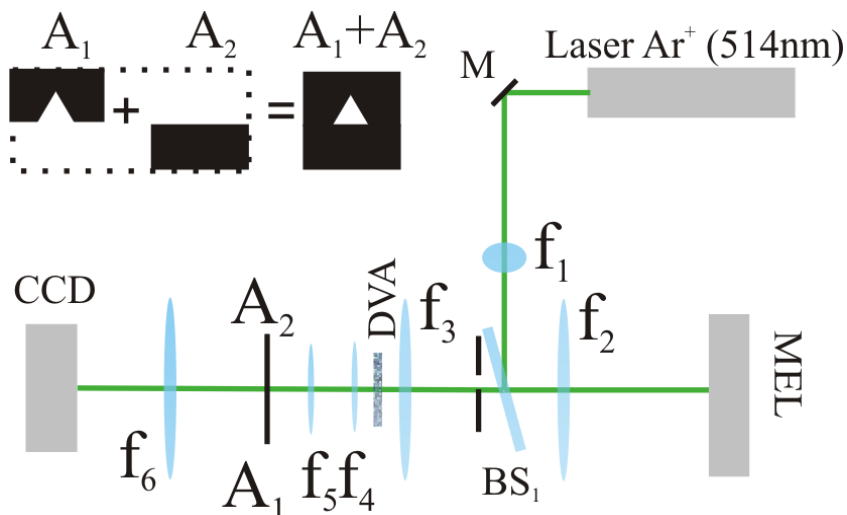
Para experimentalmente verificar a análise teórica, usamos a correlação de intensidade [62, 79] ao invés de uma correção de dois campos [45, 48, 80]. É importante salientar que as duas abordagens estão conectadas pela equação (4.2). O aparato experimental é ilustrado na figura 4.1. Novamente um laser de  $Ar^+$  operando a 514nm é expandindo 10X e usado para iluminar um holograma de fase gerado por computador impresso em um MEL [73] a fim de gerar feixes LG de altas ordens. Novamente usamos filtragem espacial para eliminar ordens indesejadas vindas de altas ordens de difração do MEL. O feixe LG gerado é incidido em um disco de vidro aleatoriamente arranhado (DVA). Um par de lentes  $f_4$  e  $f_5$ , foi usado para fazer uma imagem do DVA em uma abertura a qual pode ter qualquer forma, aqui representada por  $A_1$  e  $A_2$ . Campos gerados desta forma são conhecidos como campos pseudotérmicos [62, 79] e podem ser descritos dentro de uma boa aproximação pelo modelo Schell-Gaussian. Em nosso

caso, usamos uma abertura triangular distribuída (veja  $A_1$  e  $A_2$  na figura 4.1). Fazemos a transformada de Fourier do feixe transmitido pela abertura usando uma lente  $f_6$  e medimos a intensidade do campo resultante usando uma câmera CCD.

É importante notar que um feixe coerente com uma CT bem definida ilumina o DVA. No entanto, o feixe se torna espacialmente incoerente depois de ser transmitido pelo DVA, tendo uma frente de onda caótica, mas ainda com uma fase azimutal  $e^{im\phi}$  característica associada a ele [45]. O DVA produz um tipo de luz que é chamada luz *pseudotérmica* [62, 79], a qual é transversalmente incoerente mas ainda preserva a coerência temporal.

O DVA girante e a câmera CCD foram sincronizados para garantir que duas imagens possam ser adquiridas do mesmo ponto do DVA, isto é, o DVA para no momento de realização de um par de medidas referentes às cargas topológicas  $m_1$  e  $m_2$  dos feixes LG. Fazemos a correlação numérica destes dois feixes medidos para cada posição do DVA e no final fazemos a média de todas as 100 correlações medidas. Este procedimento é similar ao procedimento usado para gerar as imagens fantasmas nas referências [81, 82].

Figura 4.1: **Aparato experimental.**

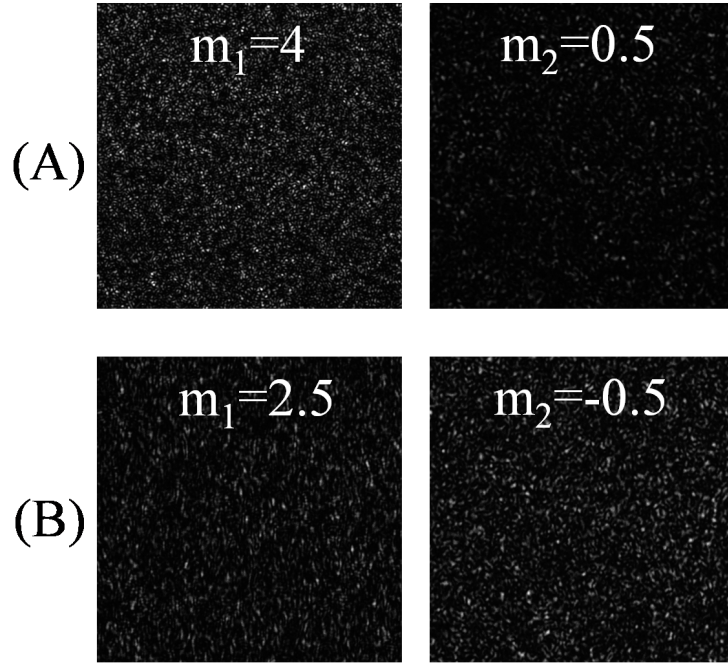


Fonte: (Jesus-Silva [83], 2012)

#### 4.4 Resultados e discussão

A figura 4.2 mostra padrões de “speckles” produzidos iluminando-se o DVA com feixes LG de diferentes ordens  $m$ . A linha (A) da figura 4.2 mostra imagens obtidas na câmera CCD com  $m_1 = 4$  e  $m_2 = 0.5$ , quando  $A_i$ , é igual a um, ( $i = 1, 2$ ). Este caso nos permitiu medir o comprimento de coerência resultando em um valor de  $21.4\mu m$ . O mesmo procedimento foi usado para obter os resultados mostrados na linha (B) para  $m_1 = 2.5$  e  $m_2 = -0.5$ . No entanto essas duas imagens foram gravadas com as aberturas  $A_1$  e  $A_2$  nos caminhos dos feixes (veja figura 4.1), respectivamente. É claro da figura 4.2 que nenhum padrão regular pode ser observado. Contudo, se calcularmos a correlação numérica das imagens correspondentes e fizermos uma média sobre 100 realizações, um padrão bem definido emerge, como mostrado nas figuras 4.3 e 4.4. A média é necessária porque a correlação média é mais uniforme e bem definida do que uma única medida da mesma. No entanto, observamos que para uma quantidade relativamente pequena de medidas já obtemos um bom resultado.

Figura 4.2: Padrões de “speckles” gravados em uma medida simples usando uma câmera CCD. A linha (A) mostra imagens de feixes LG para  $m_1 = 4$  e  $m_2 = 0.5$  após serem difratados por um DVA sem abertura em seu caminho. A linha (B) mostra imagens de feixes LG de  $m_1 = 2.5$  e  $m_2 = -0.5$  após serem difratados pelo DVA com  $A_1$  e  $A_2$  nos caminhos dos feixes, respectivamente.



Fonte: (Jesus-Silva [83], 2012)

A figura 4.3 ilustra os resultados experimentais (primeira coluna) e teóricos para a amplitude (segunda coluna) e fase (terceira coluna) da função de correlação  $\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2}$  para  $A_i = 1$ , com  $i = 1, 2$ . Na primeira coluna calculamos correlações numéricas de intensidades medidas para diferentes feixes com MAO,  $\langle I_{m_1} I_{m_2} \rangle$ . É intrigante notar que, de um feixe espacialmente incoerente, similar às imagens apresentadas na figura 4.2, um padrão bem formado aparece na correlação de intensidade mesmo para valores de  $m_1$  e  $m_2$  fracionários. Para o caso  $\langle I_{m_1=4} I_{m_2=0} \rangle$ , temos um vórtice estável com uma CTE igual a 4, em total acordo com o painel para  $|\tilde{\Gamma}_{m_1=4, m_2=0}|$ . Este resultado é confirmado checando-se o diagrama de fase na linha (A) onde uma variação de  $8\pi$  é observada ao longo de uma volta completa em torno da singularidade de fase. Por outro lado, vórtices instáveis são observados nas primeiras colunas

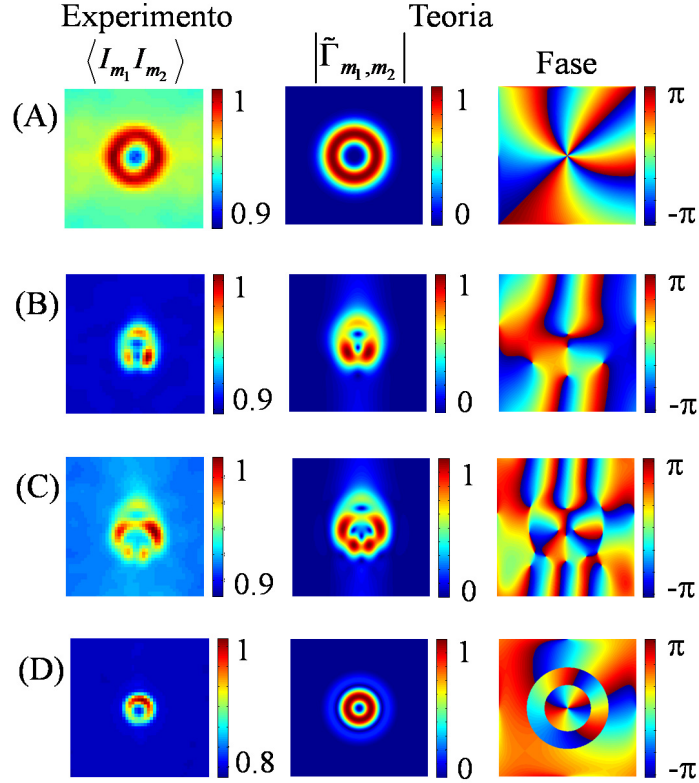


das linhas (B) e (C) para valores fracionários da CTE,  $\langle I_{m_1=1.7} I_{m_2=0} \rangle$ , e  $\langle I_{m_1=4} I_{m_2=0.5} \rangle$ , respectivamente. No entanto, o resultado mostrado para  $\langle I_{m_1=3.7} I_{m_2=1.7} \rangle$  é muito surpreendente. Mesmo que cada feixe tenha valores não inteiros para a CT, o vórtice efetivo na correlação é estável (não quebra) e mantém sua CT efetiva, neste caso, igual a dois. Este resultado é confirmado observando-se o centro do diagrama de fase na linha (D).

No entanto, um novo ingrediente aparece neste painel. O diagrama de fase mostra uma deslocação de fase na forma de anel. Isto emerge, inspecionando a equação (4.6), devido ao expoente na distribuição de intensidade  $(r_1^{|m_1|+|m_2|} = r_1^{5.7})$  ser diferente da CTE na fase azimutal ( $\exp[i(m_1 - m_2)\phi_1] = \exp[i(2)\phi_1]$ ). A interpretação física por trás desses resultados pode ser facilmente entendida pela equação (4.6). Podemos jogar com a CT associada a cada feixe incoerente,  $m_1$  e  $m_2$ , de acordo com  $m_\Gamma = (m_1 - m_2)$ , para obter um valor de CTE que pode ser diferente de  $m_1$  e  $m_2$  ou mesmo ter valores fracionários. Estes resultados reforçam o fato de que o MAO de feixes incoerentes obedece a uma regra de correlação bem definida.

Uma maneira de elucidar as correlações entre vórtices é mostrada na figura 4.4. Agora diferentes aberturas são alinhadas no caminho do feixe. As aberturas são ilustradas na figura 4.1. Neste caso, dois feixes incoerentes possuindo cargas topológicas  $m_1$  e  $m_2$  são difratados por duas aberturas diferentes  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. É interessante apontar que se superpusermos as aberturas  $A_1$  e  $A_2$  espacialmente obtemos um triângulo equilátero. A primeira coluna da figura 4.4 mostra correlações numéricas de intensidade entre vários valores de  $m$ . Observe que usando  $m_\Gamma = m_1 - m_2$ , a CTE é igual a  $m_\Gamma = 2$  para os dois primeiros painéis mostrados nas linhas (A) ( $m_1 = 1, m_2 = -1$ ) e (B) ( $m_1 = 2.5, m_2 = 0.5$ ), e  $m_\Gamma = 3$  para os dois primeiros painéis das linhas (C) ( $m_1 = 2, m_2 = -1$ ) e (D) ( $m_1 = 2.5, m_2 = -0.5$ ).

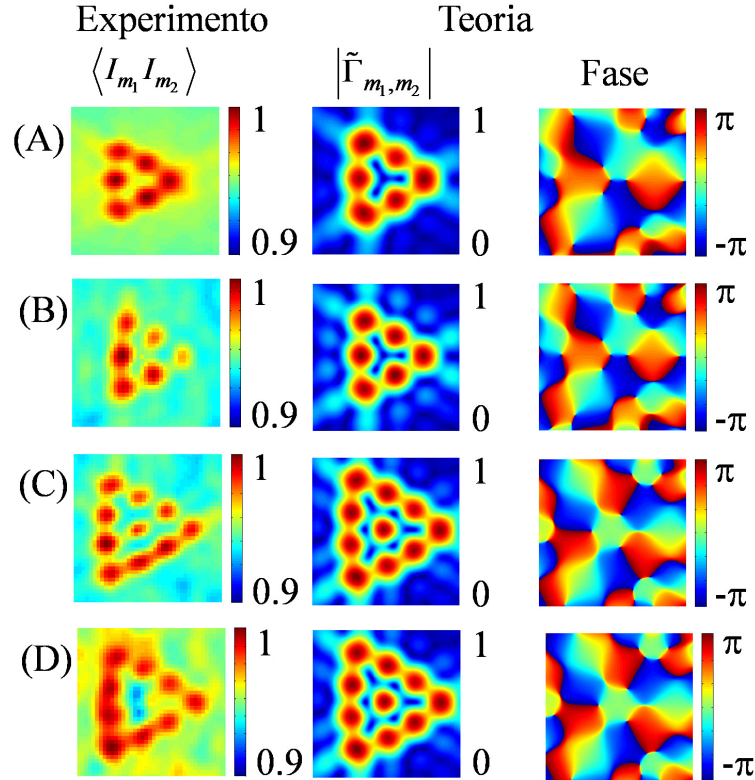
Figura 4.3: Média de 100 correlações numéricas de intensidade (primeira coluna), e resultados teóricos para a amplitude (segunda coluna) e fase (terceira coluna) da função de coerência, equação 4.6. Todos os gráficos são para o caso onde as aberturas  $A_1$  e  $A_2$  não estão presentes. As cargas topológicas associadas aos fixes incoerentes foram:  $(m_1 = 4, m_2 = 0)$ ,  $(m_1 = 1.7, m_2 = 0)$ ,  $(m_1 = 4, m_2 = 0.5)$  e  $(m_1 = 3.7, m_2 = 1.7)$ , para as linhas (A), (B), (C), e (D), respectivamente.



Fonte: (Jesus-Silva [83], 2012)

De fato, segundo Hickmann *et. al.* [25], a CTE pode ser obtida observando que  $m_\Gamma = N - 1$  ( $N$  é o número de máximos de intensidade em cada lado do padrão), em total concordância com a teoria (segunda coluna da figura 4.4). Uma abertura triangular é uma técnica bem conhecida para determinar a quantidade de MAO, diferente de, por exemplo, uma abertura quadrada [30]. É importante lembrar que os padrões de fase mostrados na figura 4.4, na terceira coluna, são os mesmos nas linhas (C) e (D). Isto acontece porque as distribuições de intensidade e fase azimutal são as mesmas (veja equação (4.6)).

Figura 4.4: Média sobre 100 realizações da correlação de intensidade numérica (primeira coluna), resultado teórico para a amplitude (segunda coluna) e fase (terceira coluna) da função de coerência, equação 4.6. Todos os resultados foram obtidos considerando-se um objeto distribuído (aberturas  $A_1$  e  $A_2$ ). As cargas topológicas associadas aos feixes incoerentes foram:  $(m_1 = 1, m_2 = -1)$ ,  $(m_1 = 2.5, m_2 = 0.5)$ ,  $(m_1 = 2, m_2 = -1)$ , e  $(m_1 = 2.5, m_2 = -0.5)$  para as linhas (A), (B), (C), e (D), respectivamente.

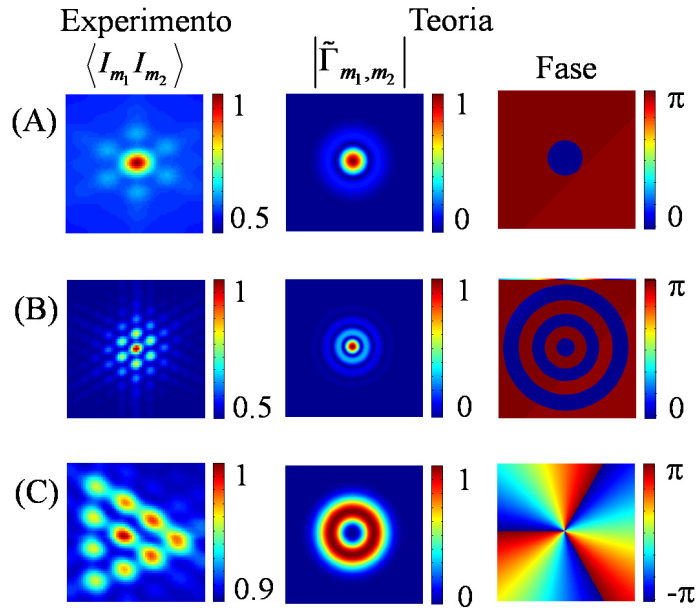


Fonte: (Jesus-Silva [83], 2012)

Na figura 4.5 apresentamos resultados para uma abertura triangular não distribuída, isto é, as aberturas  $A_1$  e  $A_2$  são aberturas triangulares iguais. Na primeira coluna utilizamos a abertura triangular para revelar o valor da CT efetiva na correlação de intensidade e na segunda e terceira colunas apresentamos a amplitude e a fase da função de coerência teórica obtida da equação (4.6). Observe que nas linhas (A) e (B) o que temos é, na verdade, a autocorrelação, desde que estamos fazendo a correlação de uma carga topológica com ela mesma. Neste caso a carga topológica efetiva é zero, mas temos anéis no spectrum da função

de coerência (equação (4.6)), e o número de anéis aumenta com o aumento da carga topológica.

Figura 4.5: Média sobre 100 realizações da correlação de intensidade numérica (primeira coluna), resultado teórico para a amplitude (segunda coluna) e fase (terceira coluna) da função de coerência, equação 4.6. Na primeira coluna usamos um objeto local (aberturas  $A_1$  e  $A_2$  são aberturas triangulares iguais). As cargas topológicas associadas aos feixes incoerentes foram:  $(m_1 = 1, m_2 = 1)$ ,  $(m_1 = 5, m_2 = 5)$  e  $(m_1 = 2, m_2 = -1)$  para as linhas (A), (B) e (C), respectivamente.



Fonte: (Jesus-Silva [83], 2012)

Novamente, a existência desses anéis na figura 4.5 é explicada pelo fato de a amplitude e a fase da função de coerência não corresponder a uma função de um feixe LG completo. Observamos anéis de máximos de intensidade também quando o triângulo está presente, como pode ser visto na primeira coluna. No entanto, é difícil usar esses anéis existentes na autocorrelação para determinar a CT associada a um feixe pseudotérmico. Finalmente, na linha (C) apresentamos a correlação de uma carga positiva com uma carga negativa e o resultado também concorda com a predição teórica.

Os resultados apresentados nesta seção foram publicados na referência [83].

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo exploramos algumas propriedades fundamentais dos vórtices de coerência usando correlação de intensidade, tais como correlações de vórtices; estabilidade do vórtice de coerência; e fase azimutal não localizada. Uma CT bem definida foi observada na correlação de intensidade seguindo uma regra de correlação tal que o valor da CT é definido pela carga topológica de cada feixe incoerente. Como consequência desta regra, observamos uma assinatura precisa de um vórtice inteiro na correlação de intensidade entre dois feixes de CT fracionária. E, também mostramos que uma quantidade de MAO bem definida pode ser facilmente identificada na correlação de intensidade quando dois feixes incoerentes com MAO forem difratados por um objeto não localizado. Obtemos excelente concordância entre a teoria usando um modelo Schell-Gaussiano e o experimento.

Gostaríamos de enfatizar que os resultados obtidos do arranjo das aberturas  $A_1$  e  $A_2$  formando um triângulo não localizado ou distribuído, não representam uma medida de estado de Bell não local. No entanto, os resultados apresentados são importantes para a óptica quântica, especialmente porque estados com MAO são de grande interesse para a óptica quântica atualmente [56], tendo aplicação potencial na informação quântica [54]. Este trabalho pode ser útil em trabalhos futuros sobre medida de CT, tanto na ótica de campos incoerentes quanto em estados de fótons gêmeos emaranhados.

## 5 MEDIDA DE MOMENTO ANGULAR DE FÓTONS VIA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE ESPACIAL

### 5.1 Introdução

O MAO do fóton é um novo grau de liberdade quântico com importantes aplicações para a informação quântica [56] e manipulação óptica [12]. Embora a determinação de MAO para feixes de luz com muitos fótons seja bem estabelecida [21, 23, 25, 84–86], e que grandes esforços têm sido feito para determinar experimentalmente o MAO de um único fóton [18, 53, 87], um método experimental direto e fácil ainda é um grande desafio.

Usualmente feixes com MAO são medidos por interferência com uma onda plana ou com ele mesmo. Mais recentemente, novas técnicas para obtenção do OAM têm sido reportadas. Algumas delas são a medida direta utilizando um sensor de onda Hartman-Shack [84], interferência por uma dupla fenda de Young [21] e difração por uma abertura triangular [25].

Nos anos recentes, vários trabalhos tem sido devotados ao estudo de MAO a nível de um único fóton, com muitas propostas para medi-lo, mas com apenas poucas implementações experimentais que sempre forneceram apenas uma evidência indireta da carga topológica. De fato, a amplitude dos modos de MAO foi poucas vezes experimentalmente medida em nível de fótons, mas nenhuma caracterização da fase azimutal foi feita [88].

Os modos com MAO de fótons (isto é, modos Laguerre-Gauss e Bessel) constituem um

espaço de Hilbert completo de dimensão infinita e o estudo desta alta dimensionalidade [54] tem atraído grande interesse devido a sua potencial aplicação na informação quântica. Uma das mais promissoras aplicações de fótons com MAO é encontrada na criptografia quântica, onde eles podem ser usados para distribuir chaves criptográficas com maior segurança, tendo importantes conseqüências para novos protocolos da informação quântica. Recentemente, um esquema com qutrits codificados em estados de MAO foi demonstrado [89]. Outra aplicação relevante usando fótons com MAO é a geração de estados quânticos hiper-emaranhados [55].

Modos LG de alta ordem são um dos exemplos de modos com MAO mais estudados. Isto se deve aos seguintes motivos: os modos LG formam base completa, de dimensão infinita para a equação de onda paraxial, definindo um espaço de Hilbert paraxial [90]. Em 1992, foi demonstrado que tais modos de luz transportam um MAO bem definido de  $m\hbar$  por fóton [10], onde  $m$  é a CT do modo. Por fim, os modos LG dentro da aproximação paraxial, são auto-estados de um operador de MAO quântico [66]  $\hat{L}_z |m\rangle = m\hbar |m\rangle$ , onde  $|m\rangle$  é o estado de um fóton preparado em um modo LG com MAO igual a  $m$ .

Um aparato multicanal que discrimina MAO foi experimentalmente demonstrado para feixes com intensidade muito baixa, sugerindo que isto poderia funcionar em nível de um único fóton [18, 85]. A principal desvantagem deste aparato é que ele requer uma quantidade de interferômetros de Mach-Zehnder que depende do valor máximo de MAO envolvido. Mais recentemente, um novo aparato para seleção de MAO foi testado com feixes de luz usando um MEL que poderia ser usado em nível de fóton [26]. A vantagem é que este método pode determinar o estado de MAO de um único fóton em cada evento de detecção, desde que o estado seja puro e não seja uma superposição de dois estados de MAO. De qualquer forma, determinar um único fóton em qualquer estado de MAO de forma direta e fácil, e com alta eficiência, permanece um desafio.

Neste capítulo, mostramos teoreticamente e experimentalmente um novo método para determinar de uma maneira não dúbia o estado de MAO de fótons em qualquer auto-estado.

Nosso método é baseado na difração de fótons de um laser fortemente atenuado por uma abertura triangular que produz uma rede na distribuição de probabilidade espacial cujo tamanho é proporcional à CT. Os fótons difratados são medidos no plano de Fraunhofer ou no plano focal de uma lente. Também investigamos, usando aberturas de tamanho variável, a discriminação de superposições de estados de MAO.

## 5.2 Teoria

Começamos considerando que o campo de entrada é um estado de um fóton de um modo paraxial bem definido e pode ser descrito por [91]:

$$|\Psi\rangle = |m, p, \vec{k}_\perp\rangle = \int d\vec{k}_\perp v_{m,p}(\vec{k}_\perp) |\vec{k}_\perp\rangle, \quad (5.1)$$

onde  $\vec{k}_\perp$  representa um conjunto completo de funções transversas ortogonais. Na aproximação paraxial a expressão para o operador campo elétrico no plano de detecção pode ser escrita como

$$\hat{E}_d(\vec{k}_\perp, z) \propto \int d\vec{k}_\perp \hat{a}_{m,p}(\vec{k}_\perp) \tau(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}. \quad (5.2)$$

O operador  $\hat{a}_{m,p}(\vec{k}_\perp)$  aniquila fótons no modo  $m, p$  com vetor de onda transversal  $\vec{k}_\perp$ .  $\tau(\vec{k}_\perp)$  é uma função que representa a função de transmissão da abertura triangular equilátera.

A amplitude de probabilidade no plano de Fraunhofer após o fóton ter sido transmitido pela abertura triangular é dado por [40, 92]

$$A_{m,p}(\vec{r}_\perp) = \langle vac | \hat{E}_d | \Psi \rangle, \quad (5.3)$$

com  $P_{m,p}(\vec{r}_\perp) = |A_{m,p}(\vec{r}_\perp)|^2$  sendo a probabilidade de detecção. Manipulando as equações acima, podemos obter a probabilidade de detecção, a saber,

$$P_{m,p}(\vec{r}_\perp) = |A_{m,p}(\vec{r}_\perp)|^2 \propto \left| \int d\vec{k}_\perp \tau(\vec{k}_\perp) v_{m,p}(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \right|^2. \quad (5.4)$$

Note que a probabilidade de detecção é proporcional à distribuição transversa que depende dos modos paraxiais após os fótons terem sido difratados pela abertura triangular equilátera,



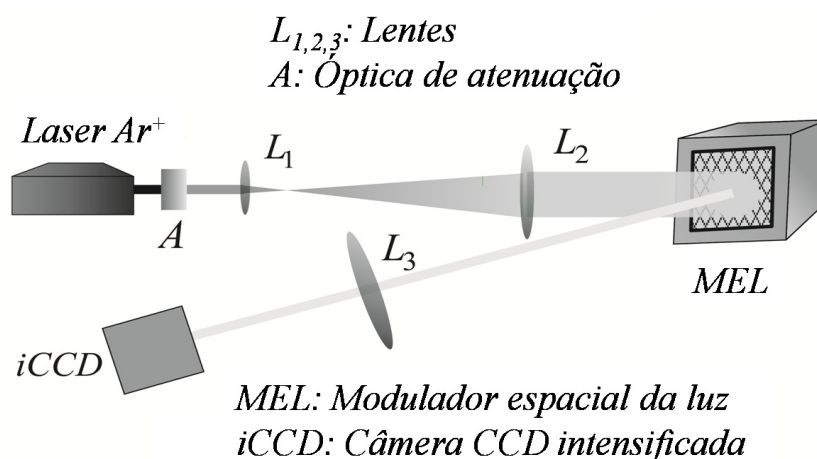
no plano de Fraunhofer. Desta forma, esta distribuição transversa corresponde ao campo distante que faz o papel da rede recíproca. Interessantemente, a integral na equação (5.4) forma um padrão de forma triangular o qual nos permite determinar o MAO dos fótons.

### 5.3 Experimento

O princípio básico do experimento é ilustrado na figura 5.1, onde fótons em um estado de MAO bem definido são difratados por uma abertura triangular equilátera e medidos no plano de Fraunhofer.

Um laser de íons de Argônio operando em 514nm ilumina um holograma gerado por computador [73] escrito em um MEL modelo Hamamatsu X10468-01 para produzir modos LG de alta ordem com MAO variando de  $-7$  a  $7$ . Produzimos apenas modos com  $p = 0$ , então não iremos fazer referência novamente a esse índice do modo. Uma máscara com uma abertura triangular equilátera de lado de 1.75mm foi superposta com o holograma do feixe LG no MEL.

Figura 5.1: **Aparato experimental usado para gerar e medir MAO em nível de um único fóton.** A figura mostra o aparato experimental usado para produzir fótons em modos LG ou Bessel com diferentes CTs, difratá-los por uma abertura triangular (gerada no MEL) e contá-los usando uma iCDD.



Fonte: (Jesus-Silva [94], 2012)

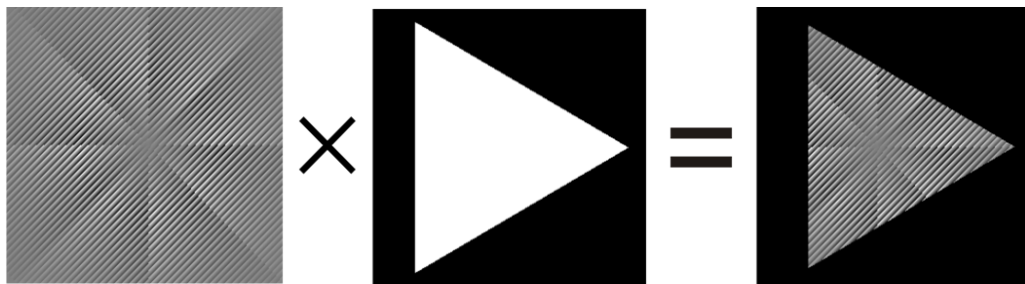
A figura 5.2 ilustra esse processo. Um holograma foi construído para gerar um feixe LG

quando iluminado por uma onda plana, e multiplicado por uma função abertura, a qual é um dentro da abertura e zero fora da abertura. O holograma pode ser expandido como uma série de Fourier infinita, no entanto apenas a primeira ordem nos dá toda a informação sobre o padrão do feixe LG difratado pela abertura triangular

$$TP(u, v) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) h_1(x, y) \times \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda f_1} (xu + yv) \right] dx dy, \quad (5.5)$$

onde  $h_1(x, y) = LG(x, y)$  é a função que descreve o feixe LG e  $A(x, y)$  é a abertura.  $TP$  é o padrão triangular truncado no plano de Fourier.

Figura 5.2: **Ilustração mostrando o processo de superposição de uma abertura triangular com o holograma de um feixe LG. Todas as regiões completamente escuras correspondem a fase zero.**



Fonte: (Jesus-Silva [94], 2012)

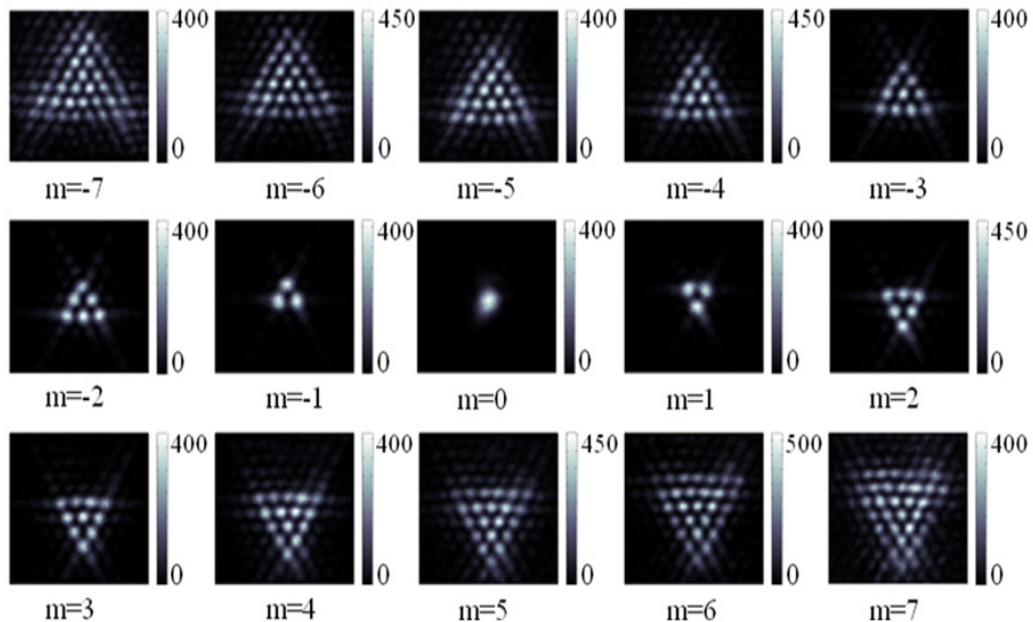
O MEL é colocado no caminho dos fótons e uma lente de comprimento focal igual a 50cm é usada para fazer a transformada de Fourier do holograma, a qual é projetada sobre uma câmera CCD intensificada (iCCD) modelo Andor DH734-18F-03. A câmera foi ajustada para operar em um modo acumulativo de contagem de um único fóton. Acumulamos contagens de fótons para 400 varreduras a uma taxa de 8 Hz para cada imagem. A intensidade do feixe de laser foi fortemente atenuada para nos certificarmos de que a máxima probabilidade de detecção era de 0.1 fóton por pixel por tempo de aquisição. Realizamos nossas medidas neste

regime, porque, como foi apontado recentemente [93], mesmo fótons produzidos por lasers fortemente atenuados podem apresentar propriedades quânticas.

#### 5.4 Resultados e discussão

Mostramos na figura 5.3 as matrizes de contagem de fótons de 70 por 70 pixels correspondendo a uma região de 1.75 por 1.75mm da iCCD iluminada pelos fótons difratados em modos LG. A figura mostra contagens para os modos após difração por uma abertura triangular equilátera. As redes geradas são relacionadas com as propriedades não usuais de luz com MAO difratada por uma borda ou fenda [28]. A carga total  $m$  é diretamente relacionada ao tamanho da rede hexagonal triangular é dada por  $m = N - 1$ , onde  $N$  é o número de lóbulos em qualquer lado externo do triângulo [25]. Na figura 5.3 obtemos um concordância perfeita com os auto-estados de MAO usados.

Figura 5.3: MAO de modos LG medido em nível de um único fóton. Medimos, em nível de um único fóton, modos LG com CT variando de  $m = -7$  a  $m = 7$ .

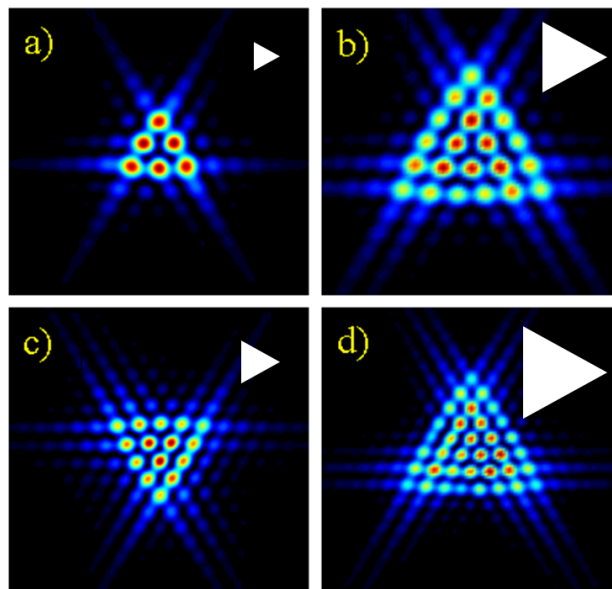


Fonte: (Jesus-Silva [94], 2012)

Note que também é possível determinar o sinal de  $m$ , desde que a orientação do padrão muda como pode ser observado na figura 5.3, onde uma mudança no sinal faz com que a rede triangular apareça girada de  $\pi$ .

Gostaríamos de enfatizar aqui que, como em qualquer método para determinar propriedades de fótons, dada a natureza estatística da mecânica quântica, é intrinsecamente necessário usar um grande conjunto de fótons para em um dado estado para obter uma medida precisa. Obviamente para caracterizar uma superposição quântica de estados determinando a probabilidade associada a cada autoestado requereria usar um selecionador antes da abertura triangular. No entanto, nosso método pode diferenciar autoestados de superposições de pares de autoestados usando uma abertura de tamanho variável.

Figura 5.4: Discriminando os estados de MAO em estados de superposição. Probabilidade calculada para detectar fótons em uma superposição de modos LG com a)  $m_1 = 2$  e b)  $m_2 = 5$  usando aberturas triangulares de diferentes tamanhos, veja o texto principal para maiores detalhes. Em c) e d) mostramos a discriminação de superposições de estados de MAO com  $m_1 = -4$  e  $m_2 = 7$ , respectivamente. A orientação da abertura usada é mostrada em todos os casos no canto superior direito dos painéis.



Fonte: (Jesus-Silva [94], 2012)

Na figura 5.4, difratamos um estado composto de uma superposição de autoestados com MAO iguais a  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 5$  por aberturas triangulares com tamanhos diferentes. O conjunto de fótons mostra a probabilidade de detecção correspondente no plano de medida. Mesmo que a probabilidade de detecção seja a mesma para a superposição antes da difração pela abertura triangular, após a inserção da abertura de diferentes tamanhos os modos são discriminados e são facilmente identificados como mostrados na figura 5.3. Nas figuras 5.4a) e 5.4b) os padrões correspondentes a  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 5$  são mostrados, respectivamente. Devido sua natureza quântica pode não ser fácil determinar a amplitude de probabilidade associada a cada autoestado. De qualquer forma, um resultado de nossas simulações usando a equação (5.4) mostra que para sermos capazes de discriminar ambos os estados de MAO, o autoestado de menor MAO deve ser muito menor que o maior MAO. Também encontramos o seguinte requisito mínimo  $\Delta m = ||m_1| - |m_2|| \geq 3$ . As figuras 5.4c) e 5.4d) mostram a situação na qual os estados de MAO têm sinais opostos  $m_1 = -4$  e  $m_2 = 7$ . Quando as amplitudes de probabilidades de detecção são tais que é possível discriminar ambos os modos, a razão entre o tamanho das aberturas é  $1/4$  com o tamanho da abertura maior sendo determinado pelo raio do estado de maior MAO.

Os resultados apresentados nesta secção foram publicados em [94].

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo, demonstramos teoricamente e experimentalmente uma maneira direta para determinar o MAO da luz em nível de um único fóton. É interessante notar que fótons gerados por laser atenuado é um tópico atual de pesquisa, sendo que estes fótons também podem apresentar propriedades puramente quânticas [93]. Embora estivermos trabalhando no nível de um único fóton, nosso sistema não apresenta nenhuma diferença de um sistema com muitos fótons por modo, como era de se esperar. O método é baseado na geração de um padrão de difração bidimensional pela combinação de interferência de amplitude e fase azimutal. Usamos

---

uma abertura triangular equilátera iluminada por fótons em modos LG par gerar padrões de interferência quânticos na forma de rede. Também demonstramos que é possível usar nosso método para discriminar autoestados de superposições quando apresentadas aos pares. Um problema chave aqui é que a probabilidade espacial de detecção pode distinguir apenas MAO com CT diferindo por mais que 3. Nossos resultados podem certamente serem generalizados para medir a carga topológica de raios X [95] e de elétrons transportando MAO [52].

## 6 REGRA DE BORN E INTERFERÊNCIA DE FÓTONS COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL POR UMA FENDA TRIANGULAR

### 6.1 Introdução

O experimento da dupla fenda em nível de um único fóton [49] ou elétron [50] são experimentos quânticos essenciais [51] onde a fase de caminho executa um papel fundamental, enquanto o MAO [10] de elétrons [52] ou fótons [53] trás uma nova dimensão [54] para o problema da interferência quântica [55] com um novo grau de liberdade [56] associado à fase espiral.

O problema quântico de interferência da dupla fenda com um único fóton [49] ou elétron [50] possui o mistério que não desaparece, como apontado por Feynman [57]. Durante os anos, foram propostos e demonstrados muitos experimentos quânticos extremamente surpreendentes e difíceis de entender como o experimento de escolha atrasada de Wheeler [51, 58]; a interferência fantasma [59]; o comprimento de onda de de Broglie de um pacote de onda de dois fótons [60]; a dupla fenda distribuída [61, 62]; o apagador quântico [63], entre muitos outros. A extensão da fenda dupla para três fendas paralelas tem atraído pouca atenção, até seu recente uso original [64] na verificação experimental da regra de Born [96] em um ponto correspondendo ao máximo de interferência central.

Por outro lado, há um número infinito de modos de luz com MAO [56] e o estudo de estados quânticos com alta dimensionalidade tem atraído grande interesse devido sua potencial

aplicação em informação quântica [54]. Uma das aplicações mais promissoras é em criptografia quântica, onde isto pode ser usado para aumentar a segurança na distribuição de chaves criptográficas [97, 98] ou gerar qutrits codificados em estados de MAO [89]. Outras aplicações usando o MAO da luz são a geração de estados quânticos hyper-emaranhados [55] e redes ópticas [25], bem como em manipulação óptica [12].

A regra de Born é ensinada em todo primeiro curso de mecânica quântica. Basicamente ela nos diz que a probabilidade de detecção de um estado quântico  $\psi(r, t)$  em um dado ponto  $r$  e em um dado instante de tempo  $t$  é dada por

$$P(r, t) = \psi^*(r, t) \psi(r, t) = |\psi(r, t)|^2. \quad (6.1)$$

Neste capítulo vamos fazer uma verificação desta regra aos moldes de Sinhá, *et. al.* [64]. A importância deste trabalho, bem como do trabalho de Sinha *et. al.*, está justamente na possibilidade da violação de tal axioma fundamental da mecânica quântica. A regra de Born, como estabelecida na mecânica quântica (equação (6.1)), prediz que a interferência quântica, como no caso do experimento de difração da dupla fenda, sempre ocorre aos pares de caminhos. Uma versão generalizada da mecânica quântica poderia introduzir múltiplos caminhos e permitir interferência de alta ordem, violando então a teoria.

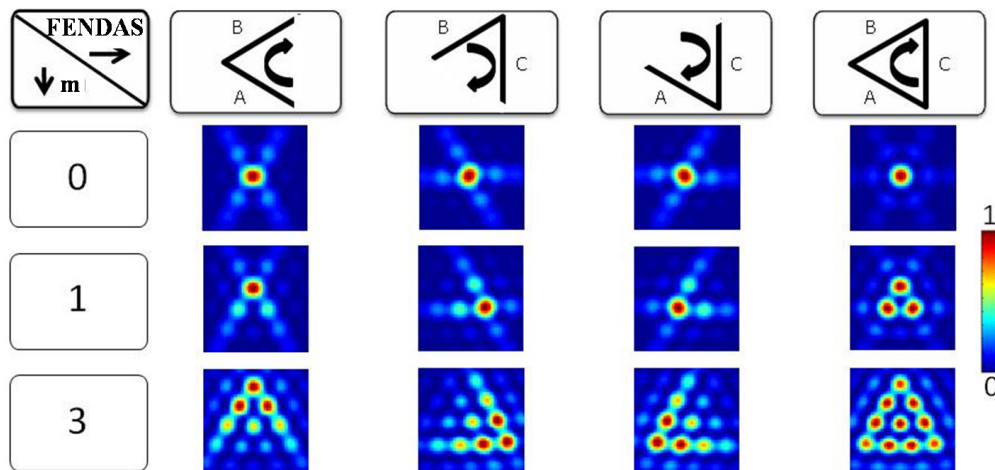
Usamos as propriedades bidimensionais do MAO de fótons para estender a configuração da dupla fenda para a configuração bidimensional da tripla fenda na forma triangular, obtendo um padrão de interferência bidimensional triangular em nível de poucos fótons, cujo tamanho depende da quantidade de MAO. Também mostramos que para este padrão, em contraste com os casos da dupla e tripla fenda paralelas, a fase azimutal joga um papel fundamental, sendo indistinguível da fase de caminho. Nossos resultados confirmam que apenas pares, aqui associados a fase azimutal e de caminho, contribuem para a probabilidade bidimensional de detecção de fótons, como estabelecido pela regra de Born.



## 6.2 Teoria

A fim de entender o padrão de interferência que iremos medir e comparar isto com o experimento quântico da dupla fenda com elétrons ou fótons [57, 99], calculamos os padrões de probabilidade normalizada de detecção mostrada na figura 6.1. Começando com o caso de fótons sem MAO  $m = 0$ , é claro da última coluna na primeira linha da figura 6.1, que há um máximo na probabilidade de detecção no centro da figura. Este máximo é uma assinatura do fato de que não podemos determinar por qual fenda (na verdade par de fendas, como veremos mais adiante) o fóton foi difratado.

Figura 6.1: Dualidade onda partícula com fótons mediada por MAO aplicada a tripla fenda em uma configuração triangular. A seta curva indica a direção do aumento da fase azimutal. Em todos os gráficos a probabilidade foi normalizada.



Fonte: (Jesus-Silva [100], 2012)

A existência de apenas este máximo central é relacionada ao fato de que a soma dos padrões de difração de cada fenda tem um formato de estrela, e não é uma superposição ao longo da mesma linha como nas configurações de duas ou três fendas paralelas, mesmo no caso de luz com MAO [28].

Muito mais interessante é o caso para MAO igual à unidade ( $m = 1$ ). A primeira coisa que vemos é que o máximo central desapareceu porque agora a fase azimutal do fóton incidente

adiciona informação sobre a fase de caminho do fóton. No entanto, o pico de interferência foi apagado não pela informação usual de qual caminho, mas pela não usual informação de qual fase azimutal. Ao mesmo tempo em que a fase azimutal faz o máximo central desaparecer, ela faz outros máximos aparecer. Se analisarmos separadamente a densidade de probabilidade de cada um dos três possíveis pares de fenda adjacentes (mostrados na figura 6.1, três primeiras colunas da segunda linha), descobrimos que o máximo aparece deslocado na direção da fenda ausente. Cada um destes máximos vem da impossibilidade de distinguir entre fase azimutal e fase de caminho. Em outras palavras, em alguns pontos no plano de Fraunhofer, não podemos saber se um fóton passou pela fenda mais próxima com maior fase azimutal ou pela fenda mais distante com menor fase azimutal. Note que se mudarmos o sinal do MAO, o máximo será deslocado ao longo da mesma direção, mas ficará próximo da outra fenda, pois o MAO aumentará na direção desta fenda. O resultado final será uma rotação de  $\pi$  no padrão triangular para MAO negativo.

Aumentando o MAO do fóton faz com que a estrutura fique mais complexa, porque o MAO age como um parâmetro na difração triangular, produzindo padrões maiores para MAO maior. De fato, o número de picos de interferência cresce como a soma de uma progressão aritmética e é dado por  $(m + 1)(m + 2)/2$ . Ressaltamos que para MAO igual a três, o pico central reaparece porque agora temos uma diferença de fase de  $2\pi$  entre fendas adjacentes. Este máximo central está presente para MAO igual a zero ou múltiplos de três e ausente em todos os outros casos. Em resumo, a difração de um único fóton com MAO revela um padrão de interferência quântica planar na forma de rede triangular, cujo tamanho é controlado pelo MAO, estendendo a dualidade onda-partícula da dupla fenda para além da informação de fase de caminho, de forma a incluir a informação de fase azimutal.

De acordo com a regra de Born, na mecânica quântica, apenas pares de amplitude de probabilidade contribuem para a interferência quântica [64], resultando no fato de que os termos de interferência de três ou mais amplitudes de probabilidade são nulos. Na sequência,

mostramos experimentalmente que a regra de Born é válida para três fendas em configuração triangular, com interferência de pares não usuais: menor caminho/maior fase azimutal e maior caminho/menor fase azimutal, generalizando o caso recentemente demonstrado experimentalmente de três fendas paralelas [64].

### 6.3 Experimento

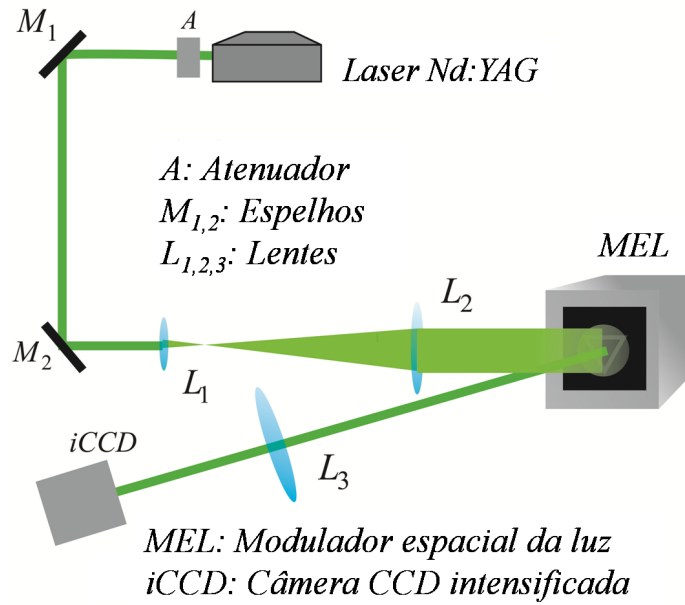
O princípio do experimento é ilustrado na figura 6.2. Um laser CW estabilizado “single-frequency” modelo torus feito por laser-quantum operando em 532nm é expandido 25X e ilumina um holograma gerado por computador e escrito em um MEL modelo Hamamatsu X10468-01 para produzir únicos fótons em modos LG de alta ordem. Um holograma de fase [73] foi usado para gerar o feixe LG quando iluminado por uma onda plana. Mostramos no MEL apenas a porção do holograma contida na região interior das diferentes combinações de fendas. Fora da fenda, colocamos fase zero. No campo distante podemos observar exatamente o mesmo campo que observaríamos se primeiramente tivéssemos gerado o campo LG e depois difratado pela combinação de fendas.

Os fótons são difratados usando-se uma lente de 50cm e são detectados em uma câmera CCD intensificada (iCCD) modelo Andor DH734-18F-03. A intensidade do feixe laser foi fortemente atenuada para certificar que a probabilidade máxima de detecção é menor que 0.1 fótons por pixel por tempo de aquisição. Realizamos nossas medidas nesse regime porque, como foi apontado recentemente [93], fótons produzidos por um laser desde que fortemente atenuado apresentam propriedades quânticas.

A câmera iCCC foi ajustada para operar em regime acumulativo de contagem de um único fóton a um ganho nominal de 600 elétrons por fotoelétron atingindo o “microchannel electron multiplier plate” (MCP). Disparamos a detecção a uma taxa de 8.065 Hz durante 290 segundos usando o potencial do fotocátodo em frente da iCCD para direcionar fotoelétrons para a MCP. Depois que os elétrons amplificados são convertidos novamente para fótons na camada de

fósforo em frete da CCD atrás da iCCD, contagens de fótons foram obtidas realizando-se uma seqüência de disparos sincronizados de varreduras de 2 milisegundos da carga acumulada na CCD. O discriminador foi fixado em 900 elétrons da CCD para contagem de um fóton.

Figura 6.2: **Geração, difração de medida de fótons com MAO.** A figura mostra o aparato experimental usado par produzir fótons com MAO, difratá-los por diferentes combinações de fendas e contá-los com a ajuda de uma iCCD.



Fonte: (Jesus-Silva [100], 2012)

## 6.4 Resultados e discussão

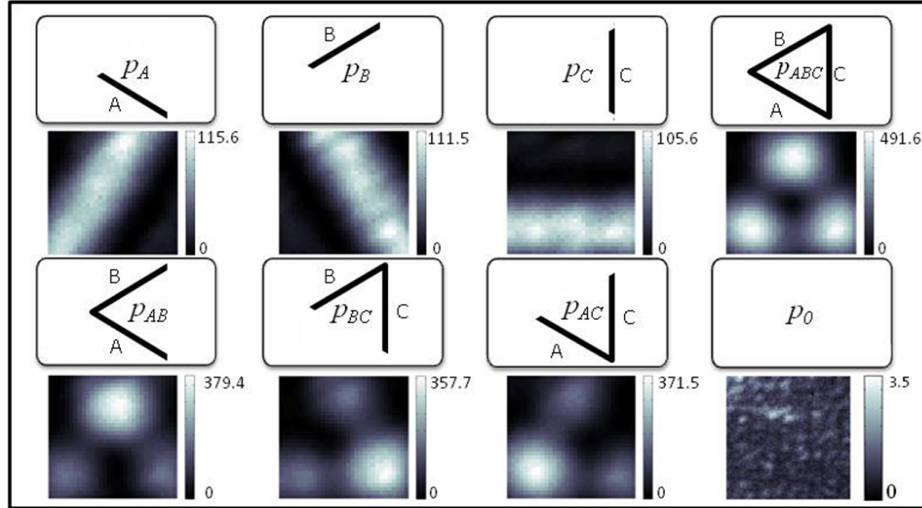
O termo de interferência de alta ordem para as três fendas pode ser obtido da expressão [64]

$$i_{ABC} = p_{ABC} + p_A + p_B + p_C - p_{AB} - p_{BC} - p_{CA} - p_0 \quad (6.2)$$

onde  $p_{ABC}$  é a padrão de contagem da difração pela fenda triangular.  $p_i$  e  $p_{ij}$  são os padrões de contagem da difração pela fenda única e por pares de fendas, respectivamente,  $i$  e  $j$  se refere às fendas  $A, B, C$ , e  $p_0$  são as contagens de ruído e do “background” obtido usando um holograma totalmente preto no MEL (fase zero em todos os pixels).

Na figura 6.3 mostramos todas as contribuições experimentalmente obtidas, usando a máscara correspondente (também mostrada na figura), necessárias para estimar  $i_{ABC}$  e calcular  $\kappa = i_{ABC}/\delta$  onde  $\delta = |i_{AB}| + |i_{BC}| + |i_{AC}|$  [64]. Medimos cada termo no lado direito da equação (6.2) com a configuração da iCCD descrita acima e usamos fótons em um modo LG com  $m = 1$ . Todas as fendas e combinações de fendas têm 4.92mm de comprimento e 0.3mm de espessura. Os números ao lado da barra cinza representam a quantidade de fótons após fazermos uma média de 70 conjuntos de 5000 varreduras. Todas as medidas foram realizadas sobre uma matriz de 30 por 30 pixels, correspondendo a uma região da iCCD de 0.39 por 0.39mm<sup>2</sup>.

Figura 6.3: Padrões de interferência medidos em nível de um único fóton para cada fenda, combinações de fenda, e “background”, correspondendo a cada termo na equação 6.2. A direção do aumento da fase azimuthal é a mesma da figura 6.1. As barras de contagem de fótons à direita de cada padrão correspondem ao número de fótons integrados durante uma média de 70 medidas de 5000 varreduras.

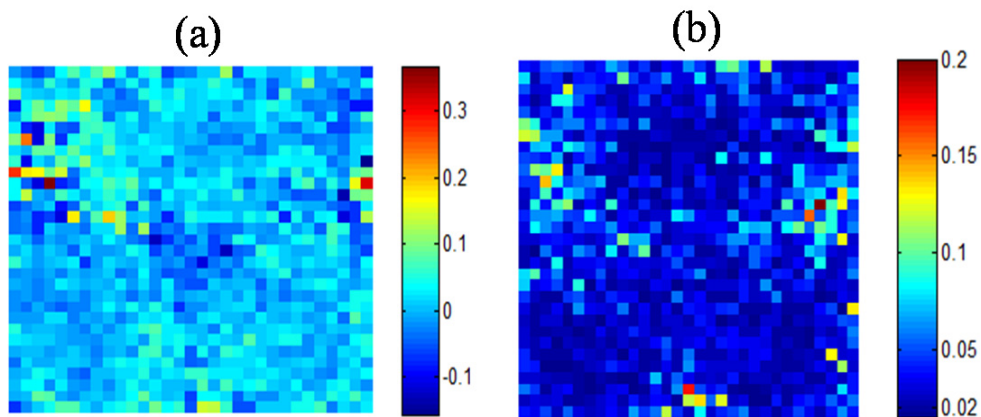


Fonte: (Jesus-Silva [100], 2012)

Na figura 6.4 apresentamos estas matrizes para o termo calculado de interferência de terceira ordem  $\kappa$  (a) e o desvio padrão da média  $\sigma_{\bar{\kappa}}$  (b). No gráfico para  $\kappa$ , vemos que não podemos observar qualquer tipo de padrão de interferência, além do fato de que  $\kappa$  pode ser grande em alguns pontos. Acreditamos que isto acontece porque  $\delta$  pode ser zero ou ter valores muito

pequenos, amplificando o ruído. Os valores obtidos nos pontos máximos de interferência são  $\kappa = -0.0060 \pm 0.0251$ ,  $-0.0012 \pm 0.0601$  e  $0.0007 \pm 0.0667$ . Podemos fazer uma média dos pixels de matrizes 5 por 5 centradas nestes picos obtendo  $\kappa = -0.0046 \pm 0.0297$ ,  $-0.0045 \pm 0.0308$  e  $0.0015 \pm 0.0295$ . Nossos resultados corroboram o princípio de que a interferência quântica sempre ocorre aos pares, e estende a verificação experimental da regra de Born para sistemas onde MAO fornece um grau extra de liberdade, isto é, a fase azimutal, a qual aumenta a indistinguibilidade. Também estendemos tal verificação experimental de dimensão zero (um ponto) [64] para duas dimensões (2D).

Figura 6.4: **Descartando o termo de interferência de terceira ordem.** (a) Termo de interferência de terceira ordem  $\kappa$  calculado usando todos os termos medidos, representados na equação 6.2 e mostrados na figura 6.3. (b) Desvio padrão calculado para o termo de interferência de terceira ordem  $\kappa$ .



Fonte: (Jesus-Silva [100], 2012)

Finalmente, devemos ressaltar que mesmo sem um efeito de interferência de terceira ordem, temos uma contribuição em cada pico de interferência de todos os três pares de fendas. É fácil concluir isso olhando para os padrões de densidade de probabilidade mostrados na figura 6.1, onde a estrutura triangular para a fenda triangular está presente para todos os pares, apesar de terem diferentes probabilidades de pico. Este efeito não vem da interferência de pares de amplitude de probabilidade como estabelecido pela regra de Born, mas surge da adição clássica

das três probabilidades associadas com cada par de fendas.

Os resultados apresentados nesta secção foram publicados na referência [100].

## 6.5 Conclusão

Neste capítulo, mostramos que para tirar vantagem do grau de liberdade extra do MAO, devemos usar uma dimensão extra, estendendo a dupla fenda para uma tripla fenda em uma configuração triangular. Mostramos também que o padrão de interferência resultante também tem uma dimensão extra, com o número de máximos de interferência diretamente relacionado à quantidade de MAO dos fótons. Nossos resultados são uma consequência direta do fato de que a fase azimutal é indistinguível da fase de caminho óptico. Além do mais, nossos resultados não violam a regra de Born e apenas fendas tomadas duas a duas contribuem para o padrão de interferência, com a contribuição das três fendas sendo nula, confirmando a predição de [64] de que a regra de Born estaria associada a outras quantidades como estados de momento angular. Usamos uma tripla fenda em uma configuração triangular iluminada, em nível de um único fóton, com modos LG gerando padrões de interferência 2D, mas os resultados apresentados poderiam ser aplicados a outras famílias de modos de fótons com MAO ou partículas massivas como elétrons transportando MAO [50, 52].

Nossos resultados experimentais representam um passo fundamental em direção à validação, generalização ou uma possível integração com a teoria da relatividade [64], bem como pode ser relevante para as tentativas teóricas [101] de derivação da regra de Born a partir de princípios mais fundamentais.

## 7 CONCLUSÃO GERAL E PERSPECTIVAS

Nesta tese de doutorado procuramos dar várias contribuições no estudo da difração de luz com MAO, sempre buscando aplicações. Neste sentido, investigamos diversos temas que exploram o MAO e a difração de Fraunhofer como uma ferramenta. Nossas investigações abrangeram desde propagação coerente, passando por propagação incoerente e chegando a estados semi-clássicos usados para explorar um problema fundamental da mecânica quântica.

No capítulo 2 fizemos uma revisão dos principais tipos de aberturas exploradas para estudar difração de luz com MAO. Estudamos a dupla fenda cujo padrão de difração pode estar inclinado indicando a presença de MAO no feixe incidente. Vimos também a fenda simples cujo padrão de difração foi estudado em dois regimes: longe do plano de Fraunhofer e no plano de Fraunhofer. Uma das primeiras aplicações que se poderia vislumbrar para estes padrões é a determinação do MAO da luz. No entanto, vimos que nenhum destes padrões é bom candidato para a determinação do MAO da luz. Mas a fenda simples quando combinada em um conjunto de três e dispostas na forma triangular tem um padrão de Fraunhofer que possibilita a medição do módulo e sinal da CT de um feixe LG. Vimos também a difração por uma abertura quadrada, cujo padrão de difração de Fraunhofer também não é um bom candidato para a determinação da carga topológica de um feixe. A abertura triangular e a abertura quadrada podem ser exploradas para geração de redes truncadas de máximos de intensidade. Notamos que para abertura triangular sempre há a formação de uma rede triangular truncada cujo tamanho aumenta com o aumento da CT. No caso da abertura quadrada, observamos



---

uma boa formação de uma rede quadrada truncada de máximos de intensidade apenas para CT par.

No capítulo 3 estudamos o nascimento de um vórtice no plano de Fraunhofer. Mostramos que se difratarmos um feixe LG com CT fracionária, no plano de Fraunhofer sempre ocorre o aparecimento de um vórtice extra, fazendo com que a carga total se torne inteira. Além disso, cada vórtice tem carga unitária e fica em uma posição separada espacialmente dos demais, isto é, surge o efeito chamado quebra de degenerescência espacial. Este estudo mostra que no plano de Fraunhofer não vale a regra usualmente aceita de que um vórtice nasce quando a CT topológica fracionária atinge e passa a metade de um valor inteiro.

No capítulo 4 exploramos alguns aspectos fundamentais da difração de vórtice de coerência. Para realizar este estudo experimentalmente usamos correlações de intensidade. Estudamos tópicos tais como: correlações de vórtices, estabilidade de um vórtice de coerência e fase azimutal não localizada. Investigamos correlações espaciais entre dois feixes com diferentes singularidades de fase embutidas. Uma CT bem definida foi observada na correlação de intensidade seguindo uma regra de correlação tal que o valor da CT é definido pela carga topológica de cada feixe incoerente. Como consequência desta regra, observamos uma assinatura de um vórtice inteiro na correlação de intensidade entre dois feixes de CT fracionária. O interessante foi observar que de um padrão completamente aleatório surge um padrão bem definido, do qual a quantidade de MAO pode ser inferida. A CT é dada pelo número de máximos em cada lado do padrão triangular subtraído de um. Mostramos também que uma quantidade de MAO bem definida pode facilmente ser identificada na correlação de intensidade quando dois feixes incoerentes com MAO forem difratados por um objeto não localizado. Obtemos excelente concordância entre a teoria, baseada em um modelo Schell-Gaussiano, e o experimento.

No capítulo 5 estudamos a difração de luz com MAO em nível de um fóton. Pudemos verificar que a distribuição de probabilidade de detecção espacial, a qual é proporcional à intensidade detectada, é suficiente para determinar o MAO dos fótons difratados. De fato,

---

verificamos que a distribuição de probabilidade espacial também tem a forma de uma rede triangular truncada de máximos de intensidade. A CT é dada pelo número de máximos em cada lado do padrão triangular subtraído de um. Também verificamos que é possível discriminar o MAO de superposições de pares de dois feixes utilizando uma abertura de tamanho variável. No entanto, as probabilidades de detecção se superpõem de tal forma que é possível discriminar apenas o MAO de feixes cuja CT difere de 3 ou mais.

O estudo da difração de luz com MAO por uma abertura triangular em nível de poucos fótons possibilitou o desenvolvimento de uma aplicação na verificação de um axioma fundamental da mecânica quântica, a regra de Born. Esta regra é a regra para a interferência de probabilidades na mecânica quântica e é ensinada em todo primeiro curso de mecânica quântica. No capítulo 6 apresentamos nossos resultados referentes à verificação de que ela é válida mesmo utilizando estados com momento angular. A verificação da validade, ou não, desta regra em qualquer situação física é importante para uma possível generalização da mecânica quântica. A compatibilidade da mecânica quântica com a relatividade geral depende de uma generalização de uma destas teorias, e a regra de Born, por exemplo, poderia ser violada.

Com esta visão geral da tese apresentada podemos ver que os resultados vêm contribuir nos campos de difração de luz com MAO e aplicações. Mostrando que o grau de liberdade extra introduzido pela fase azimutal tem uma rica gama de implicações para os padrões de difração e aplicações, adicionando novos conhecimentos sobre temas fundamentais da óptica singular. Estes conhecimentos vão desde estudos envolvendo CT topológica inteira ou fracionária, coerente e incoerente, em feixes com muitos fótons, até o regime semiclassico.

Como perspectivas futuras, esperamos que os estudos aqui apresentados possam ser estendidos para estados de fótons gêmeos emaranhados e venham a contribuir nas áreas de informação quântica, em especial para a comunicação quântica. Acreditamos que a difração de fótons gêmeos por aberturas triangulares ou quadradas possa ser explorada na geração de redes ópticas não locais emaranhadas com potencial aplicação na informação quântica. Outro

aspecto cuja exploração pode ser motivada pelos nossos trabalhos é a exploração experimental da propagação coerente e incoerente de luz com MAO por meios não lineares. Além do mais esperamos que os estudos aqui apresentados sirvam de inspiração na exploração de novos tipos de luz complexa com propriedades especiais, indo além dos feixes com MAO.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics** . 3rd. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999. xv, 576 p. ISBN 013805326X.
- [2] COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. **Photons and atoms: introduction to quantum electrodynamics**. New York: Wiley, 1989. xviii, 468 p. ISBN 0471845264.
- [3] JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd. New York: Wiley, 1999. xxi, 808 p. ISBN 047130932X.
- [4] JAKSCH, D. et al. Cold bosonic atoms in optical lattices. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 15, p. 3108-3111, Oct 12 1998. ISSN 0031-9007.
- [5] HOFSTETTER, W. et al. High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices. **Physical Review Letters**, v. 89, n. 22, p. 220407, Nov 25 2002. ISSN 0031-9007.
- [6] POYNTING, A. J. The Wave Motion of a Revolving Shaft, and a Suggestion as to the Angular Momentum in a Beam of Circularly Polarised Light. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 82, p. 560, 1909.
- [7] BETH, R. A. Direct Detection of the Angular Momentum of Light. **Phys. Rev.**, v. 48, p. 471, 1935.
- [8] BETH, R. A. Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light. **Phys. Rev.**, v. 50, p. 115, 1936.
- [9] CARRARA, N. Coppia e momento angolare della radiazione. **Nuovo Cimento**, v. 6, p. 50, 1949.
- [10] ALLEN, L. et al. Orbital Angular-Momentum of Light and the Transformation of Laguerre-Gaussian Laser Modes. **Physical Review A**, v. 45, n. 11, p. 8185-8189, Jun 1 1992. ISSN 1050-2947.
- [11] DHOLAKIA, K.; CIZMAR, T. Shaping the future of manipulation. **Nature Photonics**, v. 5, n. 6, p. 335-342, Jun 2011. ISSN 1749-4885.
- [12] GRIER, D. G. A revolution in optical manipulation. **Nature**, v. 424, n. 6950, p. 810-816, Aug 14 2003. ISSN 0028-0836.
- [13] GISIN, N. et al. Quantum cryptography. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, n. 1, p. 145-195, Jan 2002. ISSN 0034-6861.

- 
- [14] TORRES, J. P.; MOLINA-TERRIZA, G.; TORNER, L. Twisted photons: new classical and quantum applications. **Lasers and Applications**, v. 5958, 2005. ISSN 0277-786X.
- [15] HARWIT, M. Photon orbital angular momentum in astrophysics. **Astrophysical Journal**, v. 597, n. 2, p. 1266-1270, Nov 10 2003. ISSN 0004-637X.
- [16] ARLT, J. et al. The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer-generated holograms. **Journal of Modern Optics**, v. 45, n. 6, p. 1231-1237, Jun 1998. ISSN 0950-0340.
- [17] LAVERY, M. P. J. et al. Robust interferometer for the routing of light beams carrying orbital angular momentum. **New Journal of Physics**, v. 13, Sep 7 2011. ISSN 1367-2630.
- [18] LEACH, J. et al. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 25, Jun 24 2002. ISSN 0031-9007.
- [19] WANG, Z. Y.; ZHANG, Z.; LIN, Q. A novel method to determine the helical phase structure of Laguerre-Gaussian beams. **Journal of Optics a-Pure and Applied Optics**, v. 11, n. 8, Aug 2009. ISSN 1464-4258.
- [20] GHAI, D. P.; SENTHILKUMARAN, P.; SIROHI, R. S. Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 47, n. 1, p. 123-126, Jan 2009. ISSN 0143-8166.
- [21] SZTUL, H. I.; ALFANO, R. R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. **Optics Letters**, v. 31, n. 7, p. 999-1001, Apr 1 2006. ISSN 0146-9592.
- [22] BERKHOUT, G. C. G.; BELJERSBERGEN, M. W. Method for probing the orbital angular momentum of optical vortices in electromagnetic waves from astronomical objects. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 10, Sep 5 2008. ISSN 0031-9007.
- [23] MORENO, I. et al. Vortex sensing diffraction gratings. **Optics Letters**, v. 34, n. 19, p. 2927-2929, Oct 1 2009. ISSN 0146-9592.
- [24] GUO, C. S.; LU, L. L.; WANG, H. T. Characterizing topological charge of optical vortices by using an annular aperture. **Optics Letters**, v. 34, n. 23, p. 3686-3688, Dec 1 2009. ISSN 0146-9592.
- [25] HICKMANN, J. M. et al. Unveiling a Truncated Optical Lattice Associated with a Triangular Aperture Using Light's Orbital Angular Momentum. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 5, Jul 29 2010. ISSN 0031-9007.
- [26] BERKHOUT, G. C. G. et al. Efficient Sorting of Orbital Angular Momentum States of Light. **Physical Review Letters**, v. 105, n. 15, Oct 4 2010. ISSN 0031-9007.
- [27] VAITY, P.; SINGH, R. P. Topological charge dependent propagation of optical vortices under quadratic phase transformation. **Optics Letters**, v. 37, n. 8, p. 1301-1303, Apr 15 2012. ISSN 0146-9592.
- [28] FERREIRA, Q. S. et al. Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum by a slit. **Optics Letters**, v. 36, n. 16, p. 3106-3108, Aug 15 2011. ISSN 0146-9592.
-

- 
- [29] FERREIRA, Q. S. **Difração de luz com momento angular orbital por uma fenda.** 2011. 94f. TESE (mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2011.
- [30] MESQUITA, P. H. F. et al. Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum. **Optics Express**, v. 19, n. 21, p. 20616-20621, Oct 10 2011. ISSN 1094-4087.
- [31] MESQUITA, P. H. F. **Construindo uma rede quadrada com momento angular orbital da luz.** 2011. 105f. TESE (mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2011.
- [32] BERRY, M. V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. **Journal of Optics a-Pure and Applied Optics**, v. 6, n. 2, p. 259-268, Feb 2004. ISSN 1464-4258.
- [33] LEACH, J.; YAO, E.; PADGETT, M. J. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam. **New Journal of Physics**, v. 6, Jul 5 2004. ISSN 1367-2630.
- [34] LEE, W. M.; YUAN, X. C.; DHOLAKIA, K. Experimental observation of optical vortex evolution in a Gaussian beam with an embedded fractional phase step. **Optics Communications**, v. 239, n. 1-3, p. 129-135, Sep 1 2004. ISSN 0030-4018.
- [35] MOURKA, A. et al. Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture. **Optics Express**, v. 19, n. 7, p. 5760-5771, Mar 28 2011. ISSN 1094-4087.
- [36] TAO, S. H.; YUAN, X. C. Self-reconstruction property of fractional Bessel beams. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 21, n. 7, p. 1192-1197, Jul 2004. ISSN 1084-7529.
- [37] GARCIA-GRACIA, H.; GUTIERREZ-VEGA, J. C. Diffraction of plane waves by finite-radius spiral phase plates of integer and fractional topological charge. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 26, n. 4, p. 794-803, Apr 2009. ISSN 1084-7529.
- [38] GOTTE, J. B. et al. Light beams with fractional orbital angular momentum and their vortex structure. **Optics Express**, v. 16, n. 2, p. 993-1006, Jan 21 2008. ISSN 1094-4087.
- [39] JONES, P. H. et al. Sagnac interferometer method for synthesis of fractional polarization vortices. **Optics Letters**, v. 34, n. 17, p. 2560-2562, Sep 1 2009. ISSN 0146-9592.
- [40] MANDEL, L.; WOLF, E. **Optical coherence and quantum optics**; Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1995. xxvi, 1166 p. ISBN 0521417112.
- [41] GBUR, G.; VISSER, T. D. Coherence vortices in partially coherent beams. **Optics Communications**, v. 222, n. 1-6, p. 117-125, Jul 1 2003. ISSN 0030-4018.
- [42] GORI, F. et al. Partially coherent sources with helicoidal modes. **Journal of Modern Optics**, v. 45, n. 3, p. 539-554, Mar 1998. ISSN 0950-0340.

- 
- [43] MALEEV, I. D. et al. Spatial correlation vortices in partially coherent light: theory. **Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics**, v. 21, n. 11, p. 1895-1900, Nov 2004. ISSN 0740-3224.
- [44] MALEEV, I. D.; SWARTZLANDER, G. A. Propagation of spatial correlation vortices. **Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics**, v. 25, n. 6, p. 915-922, Jun 2008. ISSN 0740-3224.
- [45] PALACIOS, D. M. et al. Spatial correlation singularity of a vortex field. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 14, p. 143905, Apr 9 2004. ISSN 0031-9007.
- [46] PIRES, H. D.; WOUDEMBERG, J.; VAN EXTER, M. P. Measurement of the orbital angular momentum spectrum of partially coherent beams. **Optics Letters**, v. 35, n. 6, p. 889-891, Mar 15 2010. ISSN 0146-9592.
- [47] VISSER, T. D.; VAN DIJK, T. Evolution of singularities in a partially coherent vortex beam. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 26, n. 4, p. 741-744, Apr 2009. ISSN 1084-7529.
- [48] PIRES, H. D.; WOUDEMBERG, J.; VAN EXTER, M. P. Measurements of spatial coherence of partially coherent light with and without orbital angular momentum. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 27, n. 12, p. 2630-2637, Dec 2010. ISSN 1084-7529.
- [49] FRENCH, A. P.; TAYLOR, E. F. **An introduction to quantum physics**. 1st. New York: Norton, 1978. xviii, 670 p. ISBN 0393090159.
- [50] TONOMURA, A. et al. DEMONSTRATION OF SINGLE-ELECTRON BUILDUP OF AN INTERFERENCE PATTERN. **American Journal of Physics**, v. 57, n. 2, p. 117-120, Feb 1989. ISSN 0002-9505.
- [51] MARLOW, A. R. **Mathematical foundations of quantum theory**. New York: Academic Press, 1978. x, 372 p. ISBN 012473250X.
- [52] UCHIDA, M.; TONOMURA, A. Generation of electron beams carrying orbital angular momentum. **Nature**, v. 464, n. 7289, p. 737-739, Apr 1 2010. ISSN 0028-0836.
- [53] MAIR, A. et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. **Nature**, v. 412, n. 6844, p. 313-316, Jul 19 2001. ISSN 0028-0836.
- [54] STRAUPE, S.; KULIK, S. QUANTUM OPTICS The quest for higher dimensionality. **Nature Photonics**, v. 4, n. 9, p. 585-586, Sep 2010. ISSN 1749-4885.
- [55] BARREIRO, J. T. et al. Generation of hyperentangled photon pairs. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 26, p. 260501, Dec 31 2005. ISSN 0031-9007.
- [56] MOLINA-TERRIZA, G.; TORRES, J. P.; TORNER, L. Twisted photons. **Nature Physics**, v. 3, n. 5, p. 305-310, May 2007. ISSN 1745-2473.
- [57] FEYNMAN, R. P. **The Feynman lectures on physics: new millenium edition**. New York, NY: Basic Books, A Member of the Perseus Books Group, 2010. ISBN 9780465024148.
-

- 
- [58] ROCH, J. F. et al. Experimental realization of Wheeler's delayed-choice gedanken experiment. **Science**, v. 315, n. 5814, p. 966-968, Feb 16 2007. ISSN 0036-8075.
- [59] STREKALOV, D. V. et al. Observation of 2-Photon Ghost Interference and Diffraction. **Physical Review Letters**, v. 74, n. 18, p. 3600-3603, May 1 1995. ISSN 0031-9007.
- [60] FONSECA, E. J. S.; MONKEN, C. H.; PADUA, S. Measurement of the de Broglie wavelength of a multiphoton wave packet. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 14, p. 2868-2871, Apr 5 1999. ISSN 0031-9007.
- [61] FONSECA, E. J. S. et al. Quantum interference by a nonlocal double slit. **Physical Review A**, v. 60, n. 2, p. 1530-1533, Aug 1999. ISSN 1050-2947.
- [62] VIDAL, I. et al. Observation of interference pattern in the intensity correlation of a non-local object using a Hanbury Brown and Twiss-type experiment. **Europhysics Letters**, v. 82, n. 3, p. 34004, May 2008. ISSN 0295-5075.
- [63] WALBORN, S. P. et al. Multimode Hong-Ou-Mandel interference. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 14, p. 143601, Apr 11 2003. ISSN 0031-9007.
- [64] SINHA, U. et al. Ruling Out Multi-Order Interference in Quantum Mechanics. **Science**, v. 329, n. 5990, p. 418-421, Jul 23 2010. ISSN 0036-8075.
- [65] NIENHUIS, G.; ALLEN, L. Paraxial Wave Optics and Harmonic-Oscillators. **Physical Review A**, v. 48, n. 1, p. 656-665, Jul 1993. ISSN 1050-2947.
- [66] VANENK, S. J.; NIENHUIS, G. Eigenfunction Description of Laser-Beams and Orbital Angular-Momentum of Light. **Optics Communications**, v. 94, n. 1-3, p. 147-158, Nov 1 1992. ISSN 0030-4018.
- [67] ALLEN, L.; COURTIAL, J.; PADGETT, M. J. Matrix formulation for the propagation of light beams with orbital and spin angular momenta. **Physical Review E**, v. 60, n. 6, p. 7497-7503, Dec 1999. ISSN 1063-651X.
- [68] VANENK, S. J.; NIENHUIS, G. Commutation Rules and Eigenvalues of Spin and Orbital Angular-Momentum of Radiation-Fields. **Journal of Modern Optics**, v. 41, n. 5, p. 963-977, May 1994. ISSN 0950-0340.
- [69] VANENK, S. J.; NIENHUIS, G. Spin and Orbital Angular-Momentum of Photons. **Europhysics Letters**, v. 25, n. 7, p. 497-501, Mar 1 1994. ISSN 0295-5075.
- [70] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. **Fundamentals of photonics**. 2nd. Hoboken, N.J.: Wiley Interscience, 2007. xix, 1175 p. ISBN 9780471358329 (hbk.).
- [71] DURNIN, J. Exact-Solutions for Nondiffracting Beams .1. The Scalar Theory. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 4, n. 4, p. 651-654, Apr 1987. ISSN 0740-3232.
- [72] HECKENBERG, N. R. et al. Generation of Optical-Phase Singularities by Computer-Generated Holograms. **Optics Letters**, v. 17, n. 3, p. 221-223, Feb 1 1992. ISSN 0146-9592.



- 
- [73] KIRK, J. P.; JONES, A. L. Phase-Only Complex-Valued Spatial Filter. **Journal of the Optical Society of America**, v. 61, n. 8, p. 1023-&, 1971. ISSN 0030-3941.
- [74] ARRIZON, V. et al. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision**, v. 24, n. 11, p. 3500-3507, Nov 2007. ISSN 1084-7529.
- [75] SILVA, W. C. S. **Geração e caracterização de feixes possuindo momento angular orbital**. 2011. 71f. TESE (doutorado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2011.
- [76] GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. 3rd. Englewood, Colo.: Roberts & Co., 2005. xviii, 491 p. ISBN 0974707724
- [77] KUMAR, A.; VAITY, P.; SINGH, R. P. Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices. **Optics Express**, v. 19, n. 7, p. 6182-6190, Mar 28 2011. ISSN 1094-4087.
- [78] KARTASHOV, Y. V.; VYSLOUKH, V. A.; TORNER, L. Stability of vortex solitons in thermal nonlinear media with cylindrical symmetry. **Optics Express**, v. 15, n. 15, p. 9378-9384, Jul 23 2007. ISSN 1094-4087.
- [79] VIDAL, I. et al. Second-order interference with orthogonally polarized pseudothermal beams. **Physical Review A**, v. 78, n. 5, p. 053815, Nov 2008. ISSN 1050-2947.
- [80] WANG, W. et al. Experimental study of coherence vortices: Local properties of phase singularities in a spatial coherence function. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 7, p. 073902, Feb 24 2006. ISSN 0031-9007.
- [81] KATZ, O.; BROMBERG, Y.; SILBERBERG, Y. Compressive ghost imaging. **Applied Physics Letters**, v. 95, n. 13, p. 131110, Sep 28 2009. ISSN 0003-6951.
- [82] BROMBERG, Y.; KATZ, O.; SILBERBERG, Y. Ghost imaging with a single detector. **Physical Review A**, v. 79, n. 5, p. 053840, May 2009. ISSN 1050-2947.
- [83] JESUS-SILVA, A. J.; HICKMANN, J. M.; FONSECA, E. J. Strong correlations between incoherent vortices. **Optics Express**, v. 20, p. 19708-19713, 2012.
- [84] LEACH, J. et al. Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in a helically phased beam. **Optics Express**, v. 14, n. 25, p. 11919-11924, Dec 11 2006. ISSN 1094-4087.
- [85] LEACH, J. et al. Interferometric methods to measure orbital and spin, or the total angular momentum of a single photon. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 1, p. 013601, Jan 9 2004. ISSN 0031-9007.
- [86] WHITE, A. G. et al. Interferometric Measurements of Phase Singularities in the Output of a Visible Laser. **Journal of Modern Optics**, v. 38, n. 12, p. 2531-2541, Dec 1991. ISSN 0950-0340.
- [87] GOMES, R. M. et al. Observation of a Nonlocal Optical Vortex. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 3, p. 033602, Jul 17 2009. ISSN 0031-9007.
-

- 
- [88] GALVEZ, E. J. et al. **Imaging spatial-helical mode interference of single photons**. San Francisco, California, USA: SPIE, 2010. 76130N-7 p.
- [89] GROBLACHER, S. et al. Experimental quantum cryptography with qutrits. **New Journal of Physics**, v. 8, p. 75, May 26 2006. ISSN 1367-2630.
- [90] GARRISON, J. C.; CHIAO, R. Y. **Quantum optics**. Oxford ; New York: Oxford University Press, 2008. xiii, 716 p. ISBN 9780198508861.
- [91] AIELLO, A.; WOERDMAN, J. P. Exact quantization of a paraxial electromagnetic field. **Physical Review A**, v. 72, n. 6, p. 060101(R) Dec 2005. ISSN 1050-2947.
- [92] CALVO, G. F.; PICON, A.; BAGAN, E. Quantum field theory of photons with orbital angular momentum. **Physical Review A**, v. 73, n. 1, p. 013805 Jan 2006. ISSN 1050-2947.
- [93] D'AURIA, V. et al. Quantum Decoherence of Single-Photon Counters. **Physical Review Letters**, v. 107, p. 107, 2011.
- [94] JESUS-SILVA, A. J.; FONSECA, E. J. S.; HICKMANN, J. M. Measurement of the orbital angular momentum at photon level via the spatial probability distribution. **Journal of Modern Optics**, p. 1-5, 2012. ISSN 0950-0340.
- [95] SASAKI, S.; MCNULTY, I. Proposal for generating brilliant x-ray beams carrying orbital angular momentum. **Physical Review Letters**, v. 100, n. 12, p. 124801, Mar 2008. ISSN 0031-9007.
- [96] WHEELER, J. A.; ZUREK, W. H. **Quantum theory and measurement**. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1983. xxviii, 811 p. ISBN 0691083150 (alk. paper)
- [97] BRUSS, D. Optimal eavesdropping in quantum cryptography with six states. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 14, p. 3018-3021, Oct 5 1998. ISSN 0031-9007.
- [98] BECHMANN-PASQUINUCCI, H.; PERES, A. Quantum cryptography with 3-state systems. **Physical Review Letters**, v. 85, n. 15, p. 3313-3316, Oct 9 2000. ISSN 0031-9007.
- [99] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley, 1977. ISBN 0471164321 (v. 1)
- [100] HICKMANN, J. M.; FONSECA, E. J. S.; JESUS-SILVA, A. J. Born's rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit. **Europhysics Letters**, v. 96, n. 6, Dec 2011. ISSN 0295-5075.
- [101] ZUREK, W. H. Environment-assisted invariance, entanglement, and probabilities in quantum physics. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 12, p. 120404, Mar 28 2003. ISSN 0031-9007.

## APÊNDICE

# Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum by a slit

Queila S. Ferreira, Alcenísio J. Jesus-Silva, Eduardo J. S. Fonseca, and Jandir M. Hickmann\*

Optics and Materials Group–Optma, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, Alagoas, 57061-970, Brazil

\*Corresponding author: [jmh@optma.org](mailto:jmh@optma.org)

Received May 31, 2011; accepted July 8, 2011;

posted July 14, 2011 (Doc. ID 148479); published August 10, 2011

We study the Fraunhofer diffraction problem while taking into account the orbital angular momentum of light. In this case, the phase singularity of the light beam is incident on the slit in two different cases: in one, it is incident slightly above the slit, and in the other it is centered on the slit. We observed that the symmetry and the fringe formation in the interference pattern strongly depend on the amount of orbital angular momentum and the slit position in relation to the beam. © 2011 Optical Society of America

OCIS codes: 050.4865, 050.1940.

The study of light possessing orbital angular momentum (OAM) has yielded unexpected effects with bearing on very different fields of research, such as quantum information [1–3], micromachining [4], optical communication [5], optical tweezers [6], as well as in astronomy [7] and gravitational wave detectors [8,9].

Light beams possessing OAM have been extensively studied since their initial demonstration in 1992 [10]. In general, light beams having an azimuthal phase dependence of the form  $e^{im\phi}$  carry an OAM of  $m\hbar$  per photon. In this case,  $\phi$  is the azimuthal coordinate, and  $m$  is an integer number, which is referred to as the topological charge of the beam. Higher-order Laguerre–Gauss (LG) [11] and Bessel beams [12] are examples of beams carrying OAM.

The rich relationship between the azimuthal phase of light possessing OAM and diffraction phenomena has a number of interesting effects and has motivated researchers to make new discoveries. In particular, a multipinhole interferometer was proposed as an efficient method for probing the OAM of optical vortices from astronomical objects [13–15]. Hickmann *et al.* showed that the OAM can be used to unveil the lattice properties hidden in diffraction patterns using a simple triangular aperture [16]. Even traditional single-slit [17], double-slit [18], and aperture-iris diaphragm [19] diffraction problems can yield novel physical interpretations because of the unusual phase distribution of light possessing OAM. In addition, a new framework has been developed showing the Fourier relationship between angle and angular momentum [20].

In this Letter, we study light possessing OAM diffracted from a single slit at the Fourier plane. In this case, we studied two situations, one where the phase singularity of the light beam is incident directly on the slit and another where the phase singularity is incident slightly above the slit. For the first case, we observe a symmetrical interference pattern. This case is analogous to Young's double-slit pattern with constructive and destructive interference that depends of the amount of OAM. For the second case, because of the phase variation along the slit, the interference pattern becomes asymmetric and shifts. We study both cases theoretically and experimentally.

The setup used in the experiment is shown schematically in Fig. 1(a). An Nd:YAG laser operating at 532 nm illuminates a computer hologram with controllable pixels written in a Hamamatsu Model X10468-01 spatial light modulator (SLM) and produces high-order LG modes. A mask with a slit of  $2a = 9.34$  mm in length and width of  $280 \mu\text{m}$  can be superimposed over the LG hologram in the SLM. This is shown in Fig. 1(b). The slit length always covers the full extent of the beam for any value of  $m$ . We have used a type 1 hologram for coding phase and amplitude [21]. The collected diffracted light is imaged by a 50 cm lens on a CCD camera.

The cylindrical beams, LG and Bessel, are families of beams that can be used to describe a light beam possessing OAM. The LG beams are defined by [22]

$$E_{\text{LG}}(\rho, \phi, z) = A_{m,p} \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right] \left( \frac{\rho}{W(z)} \right)^m L_p^m \left( \frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \times \exp \left( -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left[ -ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - im\phi + i(m+2p+1)\zeta(z) \right], \quad (1)$$

where  $W(z)$  is the beam waist diameter,  $L_p^m$  is the associated Laguerre polynomial,  $m$  is the topological charge,  $\zeta(z)$  is the Gouy phase, and  $p$  is the radial index.

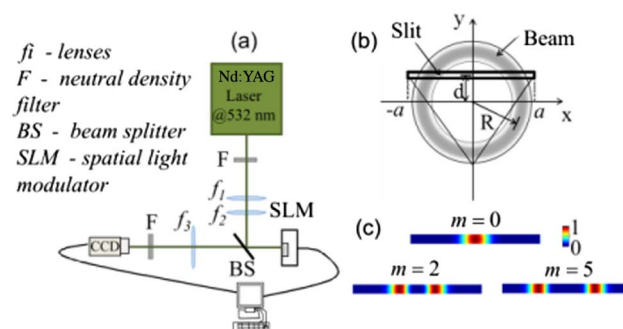


Fig. 1. (Color online) (a) Experimental setup. (b) Arrangement of the slit and higher-order LG beams generated by the SLM; where  $2a$  is the length of the slit and  $d$  is the distance from the center of the beam to the center of the slit. (c) Numerical simulation of intensity distribution over the slit for  $m = 0$ ,  $m = 2$ , and  $m = 5$  for  $d = 0$ .

The goal of the numerical investigation is to obtain the diffraction patterns caused by light beams scattered by the slit in the far-field region. To achieve this, we need the Fraunhofer integral given by [22]

$$E(x, y, z) \propto \iint_A E(x', y', 0) e^{-ik(x'x + y'y)} dx' dy', \quad (2)$$

where  $k = 2\pi/\lambda$  is the wave vector and  $\nu_x = x/\lambda z$  and  $\nu_y = y/\lambda z$  are spatial frequencies in directions  $x$  and  $y$ . This expression corresponds to the Fourier transform of the field at the aperture. The aperture is a slit, which is shown in Fig. 1(b).

Panels in Fig. 2 show numerical simulations (top row) and experimental results (middle row) of the diffraction pattern of the OAM beam from the slit for  $d = 0$  and  $m = 0, 1, 2, 4$ , and  $5$ . We also show phase diagrams in the slit plane (bottom row). For  $m = 0$  we have a normal slit diffraction pattern. However, for higher orders of OAM, the patterns are similar to Young's double-slit interference pattern. Note that, for  $d = 0$  and  $m \neq 0$ , there is a central maximum for even OAM orders and a central minimum for odd OAM orders. These effects can be understood by looking at the OAM beam profile at the position of the slit [see Fig. 1(c)]. When  $m = 0$ , only one bright spot is present. For this case, we have the usual diffraction pattern for a typical Gaussian beam from a single slit. This can be seen in the panels for  $m = 0$ . However, for higher-order LG beams we have two bright regions with a separation between them that depends on the OAM. This can be seen in Fig. 1(c) for  $m = 2$  and  $5$ . We have to consider also the phase distribution along the slit. For even OAM orders, the phase difference between any two bright points along a line in the direction of the slit is modulus of  $2\pi$ . This difference is  $\pi$  for odd orders. Also, the number of fringes increases with amount of OAM because the distance between the bright spots increases with  $m$ .

We also investigated situations with  $d \neq 0$ , i.e., when the phase singularity is not centered in the slit. Figure 3 shows the numerical simulations, experimental results, and phase diagrams for  $d = 0.2R$ . In this case,  $R$  is the beam radius. In contrast to the profiles shown in Fig. 2, the patterns are asymmetric and shifted from zero position.

Figure 4 compares the phase of the beam along the slit for  $m = 1$  and  $m = 5$  for  $d = 0$  and  $d = 0.2R$ . It can be seen from Fig. 4 that, for  $d = 0$ , the phase along the slit

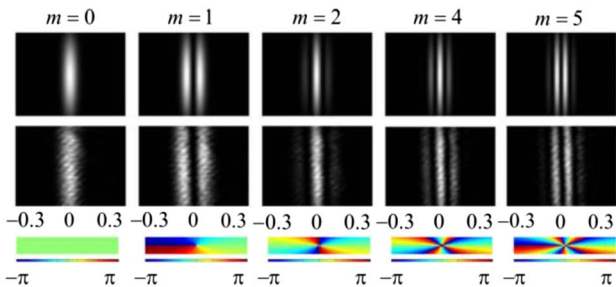


Fig. 2. (Color online) Diffraction patterns and phase diagrams for  $m = 0, 1, 2, 4$ , and  $5$  (from left to right) for  $d = 0$ . (top) Numerical simulation. (middle) Experimental results corresponding to top row. (bottom) Phase diagrams along the slit.

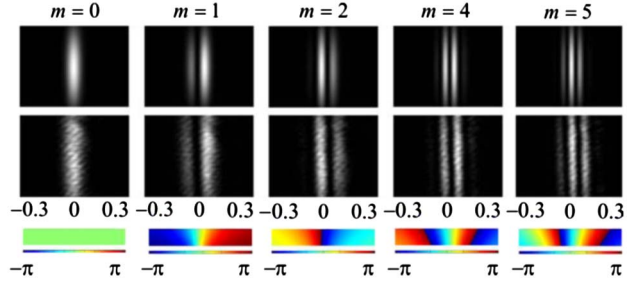


Fig. 3. (Color online) Diffraction patterns and phase diagrams for  $m = 0, 1, 2, 4$ , and  $5$  (from left to right) and  $d = 0.2R$ . (top) Simulated diffraction patterns. (middle) Experimental results corresponding to top row. (bottom) Phase diagrams inside the slit.

for the two bright spots (regions not close to  $x = 0$ ) is constant and has nonconstant behavior for  $d \neq 0$ . The last behavior evolves from being approximately linear with increasing inclination to being nonlinear as  $m$  increases.

To understand the behavior shown in Fig. 3, a simple calculation was performed, approximating the LG beam by two separated Gaussian intensity profiles with a linear phase variation along the intensity profiles. We assume that

$$E(x) = \exp(i\phi_1) \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{w_0^2}\right) + \exp(i\phi_2) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{w_0^2}\right), \quad (3)$$

where the phase along the beam can be described as  $\phi_1 = \beta(x+x_0)$  and  $\phi_2 = \beta(x-x_0)$ . In this case,  $\beta$  is the phase slope,  $w_0$  is the beam waist, and  $x_0$  is the position of the center of the peak. The contribution  $\beta x$  is the responsible for the shift, which can be explained using the shift theorem [22].

Substituting Eq. (3) into Eq. (2), we have

$$E(v_x) \propto \exp(i\beta x_0) \exp\left[\left(-\frac{i\beta w_0}{2} + \frac{x_0}{w_0} + i\pi v_x w_0\right)^2\right] + \exp(-i\beta x_0) \exp\left[\left(-\frac{i\beta w_0}{2} - \frac{x_0}{w_0} + i\pi v_x w_0\right)^2\right]. \quad (4)$$

In Fig. 5 the plots show the results obtained from Eq. (4) for  $\beta = 0.2, 0.3$ , and  $0.5$ . Comparing the interference patterns shown in Fig. 3 (top and middle row), where the shift and asymmetry of the interference patterns can be observed, with those of Fig. 5, it can be seen

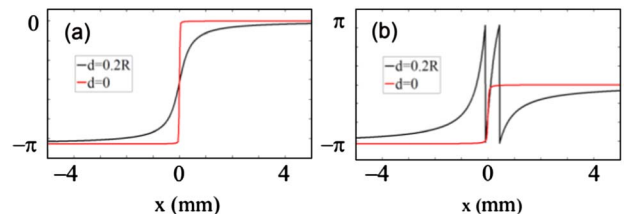


Fig. 4. (Color online) Phase profiles along the slit center. The topological charge is (a)  $m = 1$  and (b)  $m = 5$  for  $d = 0$  and  $d = 0.2R$ .

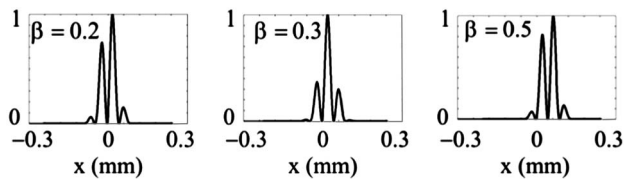


Fig. 5. Interference pattern for the two Gaussian intensity profiles with a linear phase along the beam.

that the linear phase introduced along the slit gives us physical insight into the problem.

Note that the diffraction of a beam containing OAM through the single slit is analogous to Young's double-slit experiment with a beam without OAM. In this case, the singularity acts as the central blocking mask in Young's double-slit experiment. The "which-path" interference arises from the two bright spots. However, the OAM phase adds a new element to the interference pattern. This indicates that it plays an important role. The OAM phase allows us to control the fringe formation by changing the amount of OAM in the beam. Note that, for negative  $m$ , there is no difference in the patterns for  $d = 0$  and  $d \neq 0$ . In the last case the shift is negative.

In conclusion, we have studied the Fraunhofer diffraction of LG beams by a single slit. Because of the annular form of the LG beam profile, the single-slit diffraction problem using OAM beams can be interpreted as a Young's double-slit experiment using beams without OAM. However, to understand the interference fringe formation, a new element must be taken into account: the azimuthal phase. The position of the maxima and minima of the interference pattern can be controlled by changing the amount of OAM in the beam. Note that previous works observed bending of the interference fringes using double- and single-slit experiments, but not in the Fourier plane [17,18]. We show that, in the Fourier plane, such an effect does not occur. Our findings may be useful to explain the formation of other polygonal configurations such as of the equilateral triangle [16].

The authors are thankful for the financial support from Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) Pró-equipamentos/Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PROCAD)/PROCAD-Ação Novas Fronteiras, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)/

Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), Programa de Apoio a Núcleos de Excelência (Pronex)/Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL), FAPEAL, Institutos Nacionais de Ciência e Tecnologia (INCT)—Fotônica para Telecomunicações, and INCT—Informação Quântica.

## References

1. G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 013601 (2001).
2. J. P. Torres, Y. Deyanova, L. Torner, and G. Molina-Terriza, *Phys. Rev. A* **67**, 052313 (2003).
3. S. Straupe and S. Kulik, *Nat. Photonics* **4**, 585 (2010).
4. K. Ladavac and D. G. Grier, *Opt. Express* **12**, 1144 (2004).
5. G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S. M. Barnett, and S. Franke-Arnold, *Opt. Express* **12**, 5448 (2004).
6. D. G. Grier, *Nature* **424**, 810 (2003).
7. G. Foo, D. M. Palacios, and G. A. Swartzlander, *Opt. Lett.* **30**, 3308 (2005).
8. M. Granata, C. Buy, R. Ward, and M. Barsuglia, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 231102 (2010).
9. P. Fulda, K. Kokeyama, S. Chelkowski, and A. Freise, *Phys. Rev. D* **82**, 012002 (2010).
10. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
11. N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, and T. Hara, *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1642 (2008).
12. V. Arrizon, D. Sanchez-de-la-Llave, U. Ruiz, and G. Mendez, *Opt. Lett.* **34**, 1456 (2009).
13. C. S. Guo, S. J. Yue, and G. X. Wei, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 231104 (2009).
14. G. C. G. Berkhout and M. W. Beijersbergen, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 100801 (2008).
15. G. C. G. Berkhout and M. W. Beijersbergen, *J. Opt. A* **11**, 094021 (2009).
16. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chavez-Cerda, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).
17. D. P. Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi, *Opt. Lasers Eng.* **47**, 123 (2009).
18. H. I. Sztul and R. R. Alfano, *Opt. Lett.* **31**, 999 (2006).
19. A. Kumar, P. Vaity, and R. P. Singh, *Opt. Commun.* **283**, 4141 (2010).
20. B. Jack, M. J. Padgett, and S. Franke-Arnold, *New J. Phys.* **10**, 103013 (2008).
21. V. Arrizon, U. Ruiz, R. Carrada, and L. A. Gonzalez, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 3500 (2007).
22. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley Interscience, 2007).

# Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum

Pedro H. F. Mesquita, Alcenísio J. Jesus-Silva, Eduardo J. S. Fonseca, and Jandir M. Hickmann\*

Optics and Materials Group – OPTMA, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, AL 57061-970, Brazil.

\*[jmh@optma.org](mailto:jmh@optma.org)

**Abstract:** We engineer an intensity square lattice using the Fraunhofer diffraction of a Laguerre-Gauss beam by a square aperture. We verify numerically and experimentally that a perfect optical intensity lattice takes place only for even values of the topological charge. We explain the origin of this behavior based on the decomposition of the patterns. We also study the evolution of the lattice formation by observing the transition from one order to the next of the orbital angular momentum varying the topological charge in fractional steps.

©2011 Optical Society of America

**OCIS codes:** (050.4865) Optical vortices; (050.0050) Diffraction and gratings; (050.1220) Apertures; (050.1940) Diffraction.

---

## References and links

1. L. M. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields: From Liquid Crystals to Superfluids, from Non-Equilibrium Patterns to Cosmic Strings* (Oxford University Press, Oxford, 1999).
2. Y. S. Kivshar, and G. P. Agrawal, *Optical solitons: from fibers to photonic crystals* (Academic Press, Amsterdam; Boston, 2003).
3. V. Tikhonenko, J. Christou, and B. Lutherdaves, "Spiraling bright spatial solitons formed by the breakup of an optical vortex in a saturable self-focusing medium," *J. Opt. Soc. Am. B* **12**(11), 2046–2052 (1995).
4. V. Tikhonenko, J. Christou, and B. Luther-Davies, "Three dimensional bright spatial soliton collision and fusion in a saturable nonlinear medium," *Phys. Rev. Lett.* **76**(15), 2698–2701 (1996).
5. D. V. Petrov, L. Torner, J. Martorell, R. Vilaseca, J. P. Torres, and C. Cojocar, "Observation of azimuthal modulational instability and formation of patterns of optical solitons in a quadratic nonlinear crystal," *Opt. Lett.* **23**(18), 1444–1446 (1998).
6. J. R. Abo-Shaer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, "Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates," *Science* **292**(5516), 476–479 (2001).
7. J. Masajada, A. Popiolek-Masajada, and M. Leniec, "Creation of vortex lattices by a wavefront division," *Opt. Express* **15**(8), 5196–5207 (2007).
8. J. Masajada and B. Dubik, "Optical vortex generation by three plane wave interference," *Opt. Commun.* **198**(1-3), 21–27 (2001).
9. J. Masajada, A. Popiolek-Masajada, and D. M. Wieliczka, "The interferometric system using optical vortices as phase markers," *Opt. Commun.* **207**(1-6), 85–93 (2002).
10. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda, "Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum," *Phys. Rev. Lett.* **105**(5), 053904 (2010).
11. R. W. Schoonover and T. D. Visser, "Creating polarization singularities with an N-pinhole interferometer," *Phys. Rev. A* **79**(4), 043809 (2009).
12. G. C. G. Berkhout and M. W. Beijersbergen, "Method for probing the orbital angular momentum of optical vortices in electromagnetic waves from astronomical objects," *Phys. Rev. Lett.* **101**(10), 100801 (2008).
13. G. C. G. Berkhout and M. W. Beijersbergen, "Using a multipoint interferometer to measure the orbital angular momentum of light in astrophysics," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **11**(9), 094021 (2009).
14. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1996).
15. J. P. Kirk and A. L. Jones, "Phase-only complex-valued spatial filter," *J. Opt. Soc. Am. B* **61**, 1023–1028 (1971).
16. J. Leach, M. Dennis, J. Courtial, and M. Padgett, "Vortex knots in light," *New J. Phys.* **7**, 55 (2005).
17. U. Sinha, C. Couteau, T. Jennewein, R. Laflamme, and G. Weihs, "Ruling out multi-order interference in quantum mechanics," *Science* **329**(5990), 418–421 (2010).

## 1. Introduction

Vortices are a unique system which exhibits remarkable behavior in various branches of physics such as Bose condensates, superconductors, superfluids, fluid flow, and optics [1,2]. Vortices are characterized by a topological charge (TC) whose signal is associated with the direction of circulation. In particular, in optics, this circulation or orbital angular momentum (OAM) is related to the optical phase profile of the optical field in a plane orthogonal to the light's propagation direction. Such fields possess a well-defined net OAM value and can be written in polar coordinates as  $E(r, \varphi) = E_0(r) \exp(im\varphi)$ , where  $m$  is an integer that we will call net TC. Note that such fields usually possess an optical axis centered phase singularity. The wave front of this field is composed of  $m$  intertwined helical surfaces that result in an annular intensity cross-section, with a handedness given by the sign of  $m$ .

Optical lattice formation is currently a very active research area. It has been studied in various media such as nonlinear media [3–5], Bose-Einstein condensates [6], and periodic photonic structures [2]. It has also been studied in free space through the interference of three plane waves [7–9]. Recently, optical intensity lattice formation associated with the apertures using light possessing OAM has been observed using, for example, an equilateral triangle [10] and a multipoint interferometer [11–13].

In this paper, we study the optical intensity lattice formation through the diffraction of light possessing OAM by a square aperture. In contrast to the work in ref [10], in which a well-shaped hexagonal truncated intensity lattice is always generated for any value of OAM, we find here that a perfect truncated square intensity lattice is formed only for even values of the TC. For odd values of the TC the lattice is not very well formed. We study both cases theoretically and experimentally, as well as the influence of fractional topological charges.

## 2. Theoretical results

We determine the Fraunhofer diffraction pattern in the far field region of a beam carrying OAM scattered using a square aperture. If we are interested only in the relative intensities at a fixed plane placed at the position  $z = z_0$ , the diffracted field  $E_d$  is given by the integral [14]:

$$E_d(\mathbf{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\mathbf{r}_\perp) E_i(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}_\perp, \quad (1)$$

In this integral, the far field distribution  $E_d(\mathbf{k}_\perp)$  is obtained from the Fourier transform of the product of the function describing the square aperture  $\tau(\mathbf{r}_\perp)$  and the incident field  $E_i(\mathbf{r}_\perp)$ . Note that the transverse wavevector  $\mathbf{k}_\perp$  can be associated with the coordinate system of the far field region playing the role of reciprocal space.



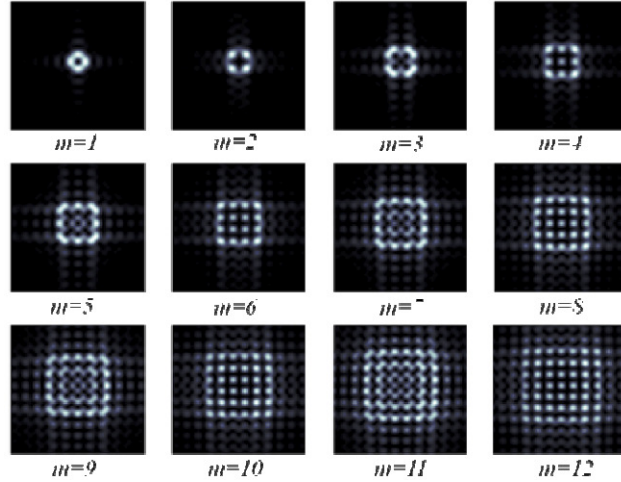


Fig. 1. Diffraction patterns corresponding to the numerical results of Eq. (1).

The integral shown in Eq. (1) was numerically evaluated using high-order LG beams as the initial condition for the electric field. For LG beams with  $p = 0$ , the Fraunhofer diffraction patterns for different values of the TC ranging from 1 to 12 are shown in Fig. 1. We can observe that a square intensity lattice forms as  $m$  increases but only for even values of the TC with  $m = 2n$  and  $n \in \mathbb{Z}$ . For odd values of  $m$ , the maxima are not well defined. It can be seen that there is a relation between the number of lateral spots  $N$  and the TC, namely  $m = 2N - 2$ , but only for even values of  $m$ .

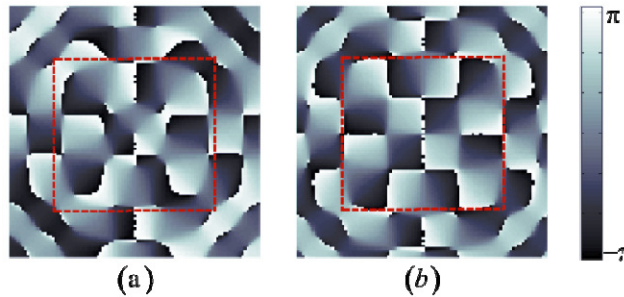


Fig. 2. Phase patterns corresponding to the diffraction patterns in Fig. 1, for  $m = 5$  (a) and  $m = 6$  (b). The red dashed square was used only to highlight the center of the pattern.

To understand the formation of the intensity lattices, we analyze the phase diagrams in the Fourier plane depicted in Fig. 2(a) and 2(b) for  $m = 5$  and  $m = 6$ , respectively. Note that the phase has a uniform distribution, mainly in the central region, only in Fig. 2(b). Phase jumps, which form a square shape, are clearly observed in Fig. 2(b). In contrast, in some parts in the center of Fig. 2(a) (in which  $m$  has an odd value), the phase distribution is sufficiently smooth that it is impossible to clearly identify the phase jumps. Similar behavior is observed for all phase diagrams for the various values of  $m$ , in accordance with the amount and the parity of OAM.

### 3. Experimental setup

The setup used to perform the experiment is depicted in Fig. 3(a). An Nd:YAG laser operating at 532 nm illuminates a pixilated computer hologram written with a Hamamatsu model X10468-01 spatial light modulator (SLM) to produce high-order LG modes.

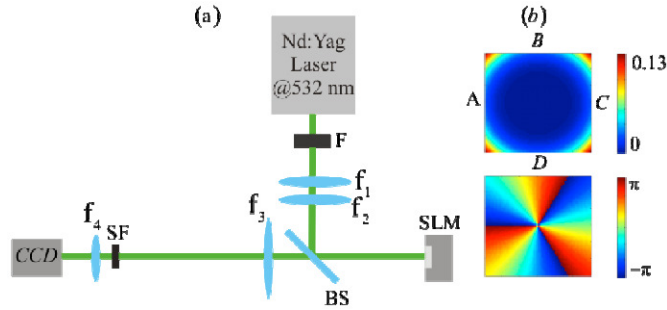


Fig. 3. (a) Experimental setup; (b) A beam inside of the square aperture (top) and the phase diagram (bottom) for  $m = 3$ . In the figure F is a density neutral filter;  $f_i$  are lenses; SLM is the spatial light modulator; and SF is a spatial filter.

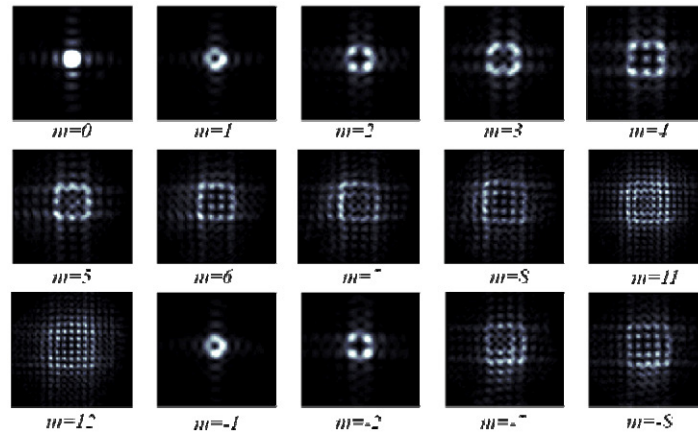


Fig. 4. Diffraction patterns corresponding to experimental results for integer topological charges.

Because the LG beam radius increases with  $m$ , we used square masks with sides varying from 1.8 mm to 3.3 mm for different LG beams. These masks can be superimposed over the LG hologram in the SLM. The effect is similar to an LG beam incident in a square aperture as illustrated in Fig. 3(b). Note that we have carefully aligned the beam at the center of the aperture to avoid asymmetries in the patterns. We have used a hologram type 1 for coding phase and amplitude as first proposed by Kirk et al [15] and first used for LG beams by Leach et al [16]. The Fourier transform was implemented by a 50-cm lens ( $f_3$ ) and the collected diffracted light was imaged by a 20-mm lens ( $f_4$ ) in a Charge Coupled Device (CCD) camera.

#### 4. Experimental results and discussion

Panels presented in Fig. 4 show experimental results for the diffraction pattern of a LG beam by a square aperture for  $m$  from 0 to 12,  $-1$ ,  $-2$ ,  $-7$ , and  $-8$ . We observe a well-formed square optical lattice only for even values of  $m$ , confirming the numerical results. The sign of  $m$  does not change globally the shape of the pattern because the phase is invariant by  $\pi$  rotation for a square aperture. Naturally, for  $m = 0$  we have the usual square aperture diffraction pattern.

The experimental results shown in Fig. 4 can be obtained from summing the contributions of single slits and double slits, a result that in quantum optics is known as Born's rule [17]. For simplicity we can associate a slit to each edge of the square. Note that both a square aperture and a square slit have very similar diffraction patterns.

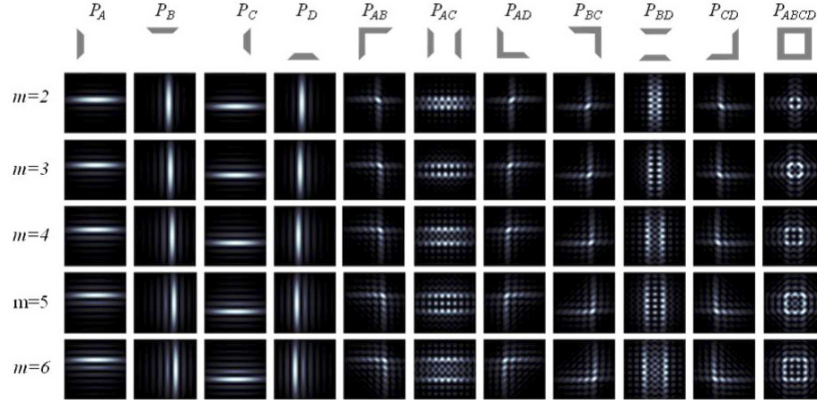


Fig. 5. Diffraction patterns produced by combinations of slits. Each slit combination is shown at the top.

Figure 5 shows the diffraction patterns for all slit combinations with  $m$  from 2 to 6. The overall pattern  $P_{ABCD}$  is obtained through the following pattern summation [17]:

$$P_{ABCD} = P_{AB} + P_{AC} + P_{AD} + P_{BC} + P_{BD} + P_{CD} - 2P_A - 2P_B - 2P_C - 2P_D, \quad (1)$$

where A, B, C, and D represent each slit of the square and  $P_i$  and  $P_{ij}$ , with  $i, j = A, B, C, D$ , represent the patterns due to each slit and each pair of slits, respectively. We can observe a very good agreement of the right side column with Fig. 1 and 3.

The patterns  $P_i$ , associated with the single slits, show that when  $m$  increases the number of fringes increases and all patterns are shifted as expected [18]. By contrast, the patterns  $P_{ij}$ , from the pairs of slits exhibit very different behaviors depending if they orthogonal or parallel. For the orthogonal slit configuration, it can be seen that the patterns comprise intensity peaks and the number of these peaks increases with the value of  $m$  but without any TC parity dependence. However, for the parallel slit configuration, it can be seen that there are two types of patterns, one for even values of  $m$  and the other for odd values of  $m$ . Such dependence on the TC parity can be associated to the fact that there is an odd or even multiple of  $\pi$  phase difference between the opposite slits for odd or even TC, respectively. This observation indicates that the patterns  $P_{AC}$  and  $P_{BD}$  have an important role in the optical intensity lattice formation processes that are dependent on the parity of  $m$ .

In Fig. 6, we superimpose the intensity patterns,  $P_{AC}$  and  $P_{BD}$ , for  $m = 5$  and  $m = 6$ . In the first case, we observe that the intensity peaks in  $P_{AC}$  and  $P_{BD}$  do not match. However, for  $m = 6$  the peaks in the center of each pattern coincide. For even values of  $m$  this effect produces a shaped optical intensity lattice when all contributions of all patterns are taken into account. For odd values of  $m$  this effect smears out the optical lattice.

Note that for the cases in which the intensity patterns  $P_{AC}$  and  $P_{BD}$  match in the center, the phase corresponding to the square optical intensity lattice will be similar to the one shown in Fig. 2(b).

Finally, we analyzed the evolution of the pattern for the azimuthal profile  $r^m e^{im\phi}$  for fractional TC, varying  $m$  in increments of 0.1. Note that the use of an azimuthal profile instead of a true LG beam is a good approximation because the potential functions and the Laguerre have approximately the same behavior at the edges of the square. In the panels of Fig. 7, we see the results of such simulation. It is clear that there is no well-formed lattice pattern between two patterns from two consecutive even values of  $m$  for any fractional TC.

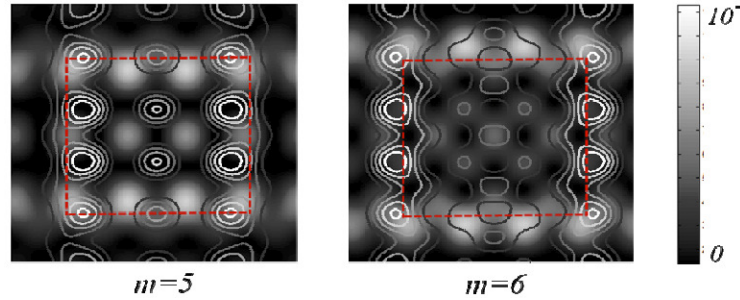


Fig. 6. Superimposed patterns,  $P_{AC}$  (intensity) and  $P_{BD}$  (intensity contours).

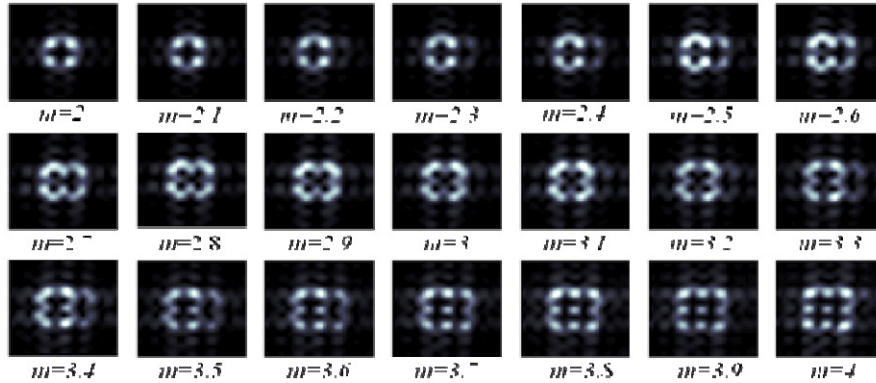


Fig. 7. Diffraction patterns corresponding to the experimental results for the fractional topological charges

## 5. Conclusions

We studied the Fraunhofer diffraction of LG beams by a square aperture. We observed that for even topological charge values, a truncated square optical intensity lattice, which is composed of a set of rotationally-symmetric intensity peaks, appears. By contrast, the resulting pattern is washed-out for odd topological charge values. To understand this diffraction pattern formation, we focused on the edge of the square rather than on the square aperture. Because the interference comes from the pairs, we decomposed the diffraction patterns of the square slit in patterns that originated from each slit and pair of slits. We found that the patterns that result from parallel slit configurations are responsible for two different types of patterns: one for odd and the other for even values of topological charge. In contrast to the case of odd values of the topological charge, for even topological charge values there is a good match between the intensity maxima in the center of the pattern. This is reflected in the formation of a square-truncated optical intensity lattice. Finally, we showed that there is a continuous transition between the two lattices that correspond to two consecutive even values of  $m$ , and there is no intermediate lattice between them for fractional TC.

## Acknowledgments

The authors are thankful for the financial support from Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) Pró-equipamentos/Programa Nacional de Cooperação Acadêmica (PROCAD)/PROCAD-Ação Novas Fronteiras, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)/ Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), Programa de Apoio a Núcleos de Excelência (Pronex)/Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL), FAPEAL, Institutos Nacionais de Ciência e Tecnologia (INCT)—Fotônica para Telecomunicações, and INCT—Informação Quântica.

# Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone

Alcenio J. Jesus-Silva, Eduardo J. S. Fonseca,\* and Jandir M. Hickmann

Optics and Materials Group—Optma, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, AL 57061-970, Brazil

\*Corresponding author: efonseca@optma.org

Received June 28, 2012; revised July 26, 2012; accepted October 3, 2012;  
posted October 3, 2012 (Doc. ID 171612); published October 31, 2012

We analytically and experimentally study the Fraunhofer diffraction of an optical vortex beam possessing noninteger values of the azimuthal index. We show that the Fraunhofer diffraction of this beam presents the birth of a vortex at  $\alpha = n + \varepsilon$ , where  $n$  is an integer number and  $\varepsilon$  is a small fraction. We discuss this behavior on the basis of the born vortex movement from a position of low intensity to high intensity when  $\alpha$  is increased of an integer number in fractional steps of  $\varepsilon$ . © 2012 Optical Society of America

OCIS codes: 050.4865, 050.1940, 050.1220, 140.3300.

The study of optical vortices started in 1992 with Allen *et al.* [1]. They showed that Laguerre–Gaussian (LG) beams may possess orbital angular momentum (OAM). These OAM light beams have a circularly symmetric transverse profile along the axis of propagation and are characterized by two integer indices  $p$  and  $\alpha$ . The first is the radial index with  $p + 1$  denoting the number of bright rings in the transversal profile. The second, azimuthal index  $\alpha$ , so called topological charge (TC), characterizes the transversal phase dependence,  $\exp(i\alpha\phi)$ . A complete round trip around the vortex implies a  $2\pi\alpha$  phase difference. Recently, there has been significant interest in optical vortices with fractional TCs [2–8]. In a pioneering paper, Berry theoretically studied the evolution on propagation of waves with optical vortices of  $2\pi\alpha$ , with  $\alpha$  assuming integer or noninteger values [2]. A remarkable result was obtained for the case of non-integer value of  $\alpha$ . Berry showed that the birth of a vortex within the beam occurs as the fractional phase step reaches and passes a half-integer value. This result was experimentally confirmed by [3,4] and, recently, by [9] using a triangular aperture, after the work by Hickmann *et al.* [10].

To infer the birth of a vortex is not an evident experimental task. There is a number of key features that one must take into account. Interesting, all papers on this subject are carried out far from Fraunhofer zone. A remarkable result was shown in [9]. A triangular aperture was aligned over the beam at the plane where the vortex should be born, and the intensity of the field transmitted by this aperture was observed in the Fraunhofer zone. They showed that only for fractional values greater or equal to half-integer value of  $\alpha$ , a new row of lobes developed for a well-defined triangular truncated optical lattice.

Here, we present a new ingredient to this problem. Our results show that at the Fraunhofer plane of the fractional TC beam, it is not possible to characterize the birth of a vortex as an event that occurs only for greater or equal to half-integer value of  $\alpha$ . But the vortex is born at  $\alpha = n + \varepsilon$ , with  $n$  an integer number and  $\varepsilon$  a small fraction number that defines the birth of a vortex.

The experimental setup is shown schematically in Fig. 1. An Ar<sup>+</sup> laser, operating at 514 nm, illuminates a computer hologram with controllable pixels written in a Hamamatsu model X10468-01 spatial light modulator (SLM). We have used a phase hologram for coding phase

and amplitude [11]. A pair of lens  $f_2$  and  $f_3$  was used to image the SLM onto the lens  $f_4$ . The effect of the SLM discrete pixel structure was eliminated by spatial filtering SF. A small focus lens  $f_5$  imaged the Fraunhofer field onto the small triangular aperture. The aperture was positioned over each vortex. The field of the aperture was Fourier transformed by the lens  $f_6$  in order to give us the TC of each vortex spatially separated. The collected diffracted light is imaged onto the charge-coupled device (CCD) camera.

To elucidate better what we want to show, let's consider the field at lens  $f_4$  as a LG beam, given by

$$E_i(\rho, \phi) = A\rho^\alpha \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \exp(i\alpha\phi), \quad (1)$$

where  $\alpha$  is the TC, which may assume fractional values,  $w_0$  is the beam waist at the initial plane (at lens  $f_4$ ),  $A$  is a normalization constant, and  $(\rho, \phi)$  are the polar coordinates. The radial index  $p$  is zero in this case. At this point the vortex is degenerated, i.e., it is a single vortex of fractional TC.

We are interested in the spectrum (Fraunhofer field) of the field of Eq. (1). In order to analytically calculate this field, we do not take into account the term  $\rho^\alpha$  in Eq. (1), which is negligible for our purpose, and calculated the Fraunhofer integral [12]:

$$E(k, \theta_k) \propto \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} E_i(\rho, \phi) e^{-ik\rho \cos(\theta_k - \phi)} \rho d\rho d\phi. \quad (2)$$

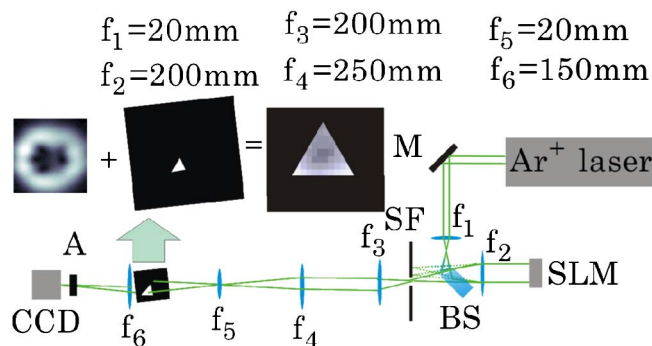


Fig. 1. (Color online) Experimental setup. A triangular aperture was placed over each vortex and the diffracted light was acquired by a CCD camera.

This expression corresponds to the Fourier transform of the field  $E_i$ . Experimentally this is performed by lens  $f_4$ .

For fractional  $\alpha$ , we can expand the fractional phase in Fourier series [2],

$$\exp(i\alpha\phi) = \frac{\exp(i\pi\phi) \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(in\phi)}{\alpha - n}. \quad (3)$$

Using expression (3) in Eq. (1) and inserting it in Eq. (2), we get the spectrum of Eq. (1), given by

$$E(k, \theta_k) \propto k \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)^{|n|} \exp(in\theta_k) BI_n(k)}{\alpha - n}, \quad (4)$$

where

$$BI_n(k) = I_{(|n|-1)/2}\left(\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right) - I_{(|n|+1)/2}\left(\frac{\pi^2 k^2 w_0^2}{2}\right), \quad (5)$$

and  $I_\nu(\gamma)$  is the modified Bessel function of the first kind of order  $\nu$  and argument  $\gamma$ .

Figure 2 shows the theoretical results for the amplitude, first column, and phase, second column. This is a plot of Eq. (4) with  $\alpha = 3.3$ . It is interesting to note a clear signature of four integer vortices on the phase pattern.

The total vortex strength  $S$  (TC) of the Fraunhofer field can be calculated [2],

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \arg E(k, \theta_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_k \operatorname{Re} \left[ (-i) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_k} E(k, \theta_k)}{E(k, \theta_k)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

We have numerically evaluated this expression using  $k = 4$  and  $w_0 = 0.7$ . We have observed jumps in the total vortex strength at  $\alpha = 2.1, 3.1, 4.2,$  and  $5.2$ . These results are shown in Fig. 3. It is observed the birth of a vortex at  $\alpha = n + \epsilon$ , where  $n$  is an integer number and  $\epsilon$  is a small fraction.

The reason for the small quantity  $\epsilon$  is the finite extension of the beam radius. The vortex strength defined in Eq. (6) depends on intensity and phase distributions. The beam intensity defines a finite region and the vortex moves toward the center of this region when the fractional TC  $\alpha$  is increased. For very small value of  $\epsilon$ , the vortex is not over the bright intensity, so that its

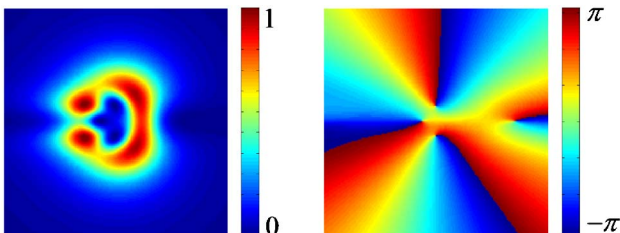


Fig. 2. (Color online) Theoretical result at Fraunhofer plane for amplitude (left) and phase (right) using  $\alpha = 3.3$ .

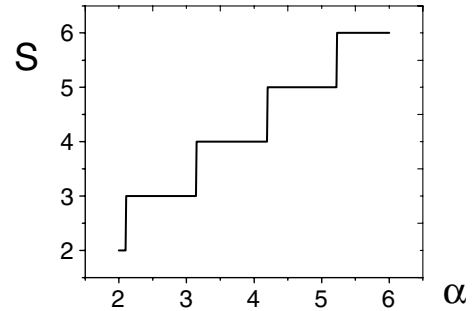


Fig. 3. Total vortex strength  $S$  of the field at Fraunhofer plane as a function of  $\alpha$  computed from Eq. (6).

contribution to the integral is almost negligible. It is worthwhile to mention that the beam waist increases with  $\alpha$ , and the value of  $\epsilon$  changes with  $\alpha$  as well. This vortex movement will become clear in the explanation of the experimental results.

At the Fraunhofer plane the fractional TC is spatially separated independently if its value is smaller than a half-integer value. Therefore, we can't manage the birth of a vortex looking at the Fraunhofer plane as presented in [2].

To further investigation we have performed some experiments. Figure 4 shows experimental images of profiles of LG beams given by the spectrum of Eq. (1), for fractional value of  $\alpha$  varying from 3 to 4 with steps of 0.1. We used the plot of the quantity  $\log(1 + |E|^2)$ , where  $|E|^2$  is the measured intensity of the LG beam. The splitting of a high charge optical vortex core into unit charge vortices is clearly observed for a small fraction of  $\epsilon = 0.2$  added to an integer TC  $n = 3$ . Observe that for  $\alpha = 3.1$ , the contribution of the emerging vortex is very small.

In fact, it has been observed in other systems such as the breaking up of optical vortices [13,14]. Basically, in all these experimental and theoretical studies, some kind of asymmetry has been applied to a vortex. In our case, we have a break of symmetry in the phase distribution along the beam.

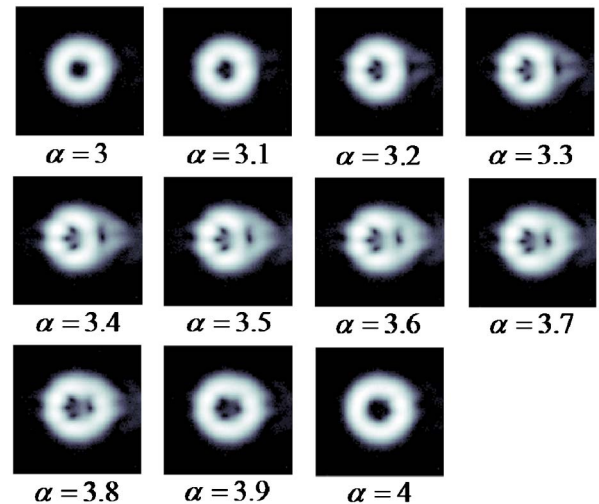


Fig. 4. (Color online) Experimental measurements of intensity profile of a LG beam for fractional value of  $\alpha$  varying from 3 to 4 with steps of 0.1 at Fraunhofer plane.

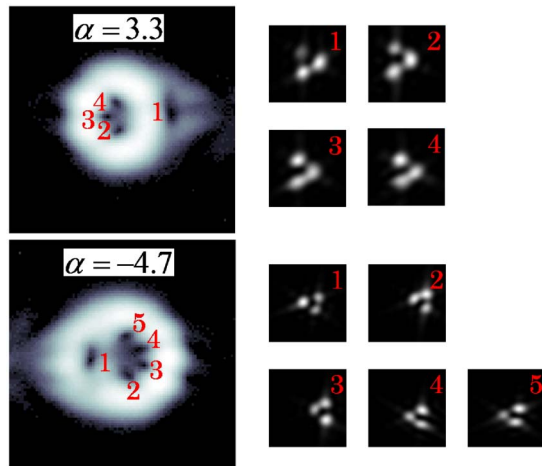


Fig. 5. (Color online) Experimental measurements of the intensity profile of a LG beam for values of  $\alpha = 3.3$ ,  $-4.7$  at Fraunhofer plane and the diffraction pattern by a triangle aperture showing the value of TC of  $\alpha = 1$  and  $\alpha = -1$  for fractional TC of  $\alpha = 3.3$  and  $\alpha = -4.7$ , respectively.

As we can see in Fig. 4, a single vortex, which was born isolated at right positions of patterns, moves to the left side toward the pattern center by increasing the TC in fractional steps. When it approaches the next integer TC value the vortices coalesce in a single vortex of integer value.

Figure 5 presents the breakup of an optical vortex into 4 for  $\alpha = 3.3$  and into  $-5$  for  $\alpha = -4.7$ . Observe that even for values of  $\epsilon$  smaller than half-integer values we have already the birth of a vortex. To confirm this statement, Fig. 5 also shows measurements of diffraction of each optical vortex by a small triangle aperture, as suggested in Fig. 1. The small triangle was positioned at the center of each optical vortex, as shown at right side of Fig. 5. As we can see, the measured interference pattern is typically of an OAM light with TC  $n = 1$  [10] in all measurements for  $\alpha = 3.3$ , having the same sign.

A similar behavior was observed for negative fractional TC, where the entire pattern is rotated by  $\pi$  and each optical vortex has negative signal, as exemplified for  $\alpha = -4.7$  in Fig. 5.

In conclusion, we have theoretically and experimentally studied the birth of a vortex at Fraunhofer zone. We have shown a break of degeneracy and the formation of integer TC charges for fractional value less than a half-integer fraction. The rule of a half-integer value to the birth of a vortex presented in [2] is not valid for the Fraunhofer zone.

The authors are thankful for the financial support from CAPES, CNPq/MCT, Pronex/FAPEAL, INCT-IQ, and INCT-Fotonicom.

## References

1. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
2. M. V. Berry, *J. Opt. A* **6**, 259 (2004).
3. J. Leach, E. Yao, and M. J. Padgett, *New J. Phys.* **6**, 71 (2004).
4. W. M. Lee, X. C. Yuan, and K. Dholakia, *Opt. Commun.* **239**, 129 (2004).
5. S. H. Tao and X. C. Yuan, *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1192 (2004).
6. H. Garcia-Gracia and J. C. Gutierrez-Vega, *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 794 (2009).
7. J. B. Gotte, K. O'Holleran, D. Preece, F. Flossmann, S. Franke-Arnold, S. M. Barnett, and M. J. Padgett, *Opt. Express* **16**, 993 (2008).
8. P. H. Jones, M. Rashid, M. Makita, and O. M. Marago, *Opt. Lett.* **34**, 2560 (2009).
9. A. Mourka, J. Baumgartl, C. Shanor, K. Dholakia, and E. M. Wright, *Opt. Express* **19**, 5760 (2011).
10. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chavez-Cerda, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).
11. J. P. Kirk and A. L. Jones, *J. Opt. Soc. Am.* **61**, 1023 (1971).
12. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 3rd ed. (Roberts, 2005).
13. A. Kumar, P. Vaity, and R. P. Singh, *Opt. Express* **19**, 6182 (2011).
14. Y. V. Kartashov, V. A. Vysloukh, and L. Torner, *Opt. Express* **15**, 9378 (2007).

# Strong correlations between incoherent vortices

A. J. Jesus-Silva, J. M. Hickmann and E. J. S. Fonseca\*

Optics and Materials Group – OPTMA, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, AL 57061-970, Brazil.

\*[efonseca@optma.org](mailto:efonseca@optma.org)

**Abstract:** We establish a correlation rule of which the value of the topological charge obtained in intensity correlation between two coherence vortices is such that this value is bounded by the topological charge of each coherence vortex. The original phase information is scrambled in each speckle pattern and unveiled using numerical intensity correlation. According to this rule, it is also possible to obtain a coherence vortex stable, an integer vortex, even when each incoherent vortex beam is unstable, non-integer vortex.

©2012 Optical Society of America

**OCIS codes:** (030.0030) Coherence and statistical optics; (050.4865) Optical vortices; (050.1220) Apertures; (050.1940) Diffraction.

---

## References and links

1. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes," *Phys. Rev. A* **45**(11), 8185–8189 (1992).
2. M. V. Berry, "Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps," *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* **6**(2), 259–268 (2004).
3. J. Leach, E. Yao, and M. J. Padgett, "Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam," *New J. Phys.* **6**, 71 (2004).
4. A. Mourka, J. Baumgartl, C. Shanor, K. Dholakia, and E. M. Wright, "Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture," *Opt. Express* **19**(7), 5760–5771 (2011).
5. H. C. Huang, Y. T. Lin, and M. F. Shih, "Measuring the fractional orbital angular momentum of a vortex light beam by cascaded Mach-Zehnder interferometers," *Opt. Commun.* **285**(4), 383–388 (2012).
6. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1995).
7. F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi, and S. Vicalvi, "Partially coherent sources with helicoidal modes," *J. Mod. Opt.* **45**(3), 539–554 (1998).
8. J. Serna and J. M. Movilla, "Orbital angular momentum of partially coherent beams," *Opt. Lett.* **26**(7), 405–407 (2001).
9. G. V. Bogatyryova, C. V. Fel'de, P. V. Polyanskii, S. A. Ponomarenko, M. S. Soskin, and E. Wolf, "Partially coherent vortex beams with a separable phase," *Opt. Lett.* **28**(11), 878–880 (2003).
10. G. Gbur and T. D. Visser, "Coherence vortices in partially coherent beams," *Opt. Commun.* **222**(1-6), 117–125 (2003).
11. I. D. Maleev, D. M. Palacios, A. S. Marathay, and G. A. Swartzlander, Jr., "Spatial correlation vortices in partially coherent light: theory," *J. Opt. Soc. Am. B* **21**(11), 1895–1900 (2004).
12. D. M. Palacios, I. D. Maleev, A. S. Marathay, and G. A. Swartzlander, Jr., "Spatial correlation singularity of a vortex field," *Phys. Rev. Lett.* **92**(14), 143905 (2004).
13. W. Wang, Z. H. Duan, S. G. Hanson, Y. Miyamoto, and M. Takeda, "Experimental study of coherence vortices: Local properties of phase singularities in a spatial coherence function," *Phys. Rev. Lett.* **96**(7), 073902 (2006).
14. H. D. Pires, J. Woudenberg, and M. P. van Exter, "Measurements of spatial coherence of partially coherent light with and without orbital angular momentum," *J. Opt. Soc. Am. A* **27**(12), 2630–2637 (2010).
15. O. Katz, Y. Bromberg, and Y. Silberberg, "Compressive ghost imaging," *Appl. Phys. Lett.* **95**(13), 131110 (2009).
16. I. Vidal, D. P. Caetano, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, "Observation of interference pattern in the intensity correlation of a non-local object using a Hanbury Brown and Twiss-type experiment," *Europhys. Lett.* **82**(3), 34004 (2008).
17. I. Vidal, D. P. Caetano, C. Olindo, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, "Second-order interference with orthogonally polarized pseudothermal beams," *Phys. Rev. A* **78**(5), 053815 (2008).
18. Y. Bromberg, Y. Lahini, E. Small, and Y. Silberberg, "Hanbury Brown and Twiss interferometry with interacting photons," *Nat. Photonics* **4**(10), 721–726 (2010).
19. J. P. Kirk and A. L. Jones, "Phase-only complex-valued spatial filter," *J. Opt. Soc. Am.* **61**(8), 1023–1028 (1971).



20. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda, "Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum," *Phys. Rev. Lett.* **105**(5), 053904 (2010).
21. P. H. F. Mesquita, A. J. Jesus-Silva, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, "Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum," *Opt. Express* **19**(21), 20616–20621 (2011).
22. G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, "Twisted photons," *Nat. Phys.* **3**(5), 305–310 (2007).
23. S. Straupe and S. Kulik, "Quantum optics the quest for higher dimensionality," *Nat. Photonics* **4**(9), 585–586 (2010).

## 1. Introduction

It's well known that vortices in optical beams have an azimuthal phase dependence around a dark spot in form  $e^{im\phi}$ , with  $m$  an integer number also so-called topological charge (TC) [1], which determines the amount of the orbital angular momentum (OAM). Interesting enough, optical vortices with fractional topological charges have recently gained significant interest. The pioneer paper in this field was published by M. V. Berry [2]. Since then, several experimental works have been performed in order to explain the nature of this type of vortex [3–5]. One important characteristic is its instability in the propagation, which was explained by a propagation mechanism that involves an infinite chain of vortices annihilating in pairs during the propagation [2]. The vortex instability is characterized by the vortices breaking into fundamental unit, the vortices are spatially separated, in the Fourier plane.

Light possessing integer or fractional vortex has been widely studied in coherent systems where the phase is well-defined. However, partially coherent systems [6], where statistics are required to quantify the phase, can also present optical vortices in the correlation function, so-called *coherence vortices*. These are pairs of points where the spectral degree of coherence, a two-field correlation function, vanishes. In fact, *coherence vortices* involving correlation between beams with integer TC have unveiled a new research field [7–15]. But, for fractional TC no work has been reported, to the best of our knowledge.

In this paper, we explore various fundamental aspects of coherence vortices using the intensity correlation, also known as fourth-order field correlation: i) *strong vortices correlation* - the value of the equivalent TC obtained in the intensity correlation follows a correlation rule such that this value is bound to the TC associated to each incoherent beam; ii) *stability of a coherence fractional vortices* - a precise signature of an integer vortex was observed in the intensity correlation from two incoherent beams with each beam possessing fractional vortices; iii) *non-localized azimuthal phase* - a well-defined amount of OAM was observed in the intensity correlation when two incoherent beams possessing OAM were diffracted by different objects, the information of azimuthal phase was recovered of a distributed object. Our findings were supported by the theoretical analyses of the correlation function using the Gaussian-Schell correlator [12].

## 2. Theoretical results

For simplicity, we consider a vortex with the initial field amplitude of a Laguerre-Gauss (LG) beam [1]

$$E_m(r, \phi) = E_0 \left| \frac{r}{w_0} \right|^{|m|} \exp(-r^2/w_0^2) \exp(im\phi), \quad (1)$$

where  $E_0$  and  $w_0$  are the characteristic amplitude and beam size in the plane  $z=0$ , respectively,  $m$  is the topological charge, and  $\phi$  is the azimuthal phase.

The intensity correlation function is given by an ensemble average [6]

$$\begin{aligned} \langle I_1(\vec{r}_1) I_2(\vec{r}_2) \rangle &= \langle E_1^*(\vec{r}_1) E_2^*(\vec{r}_2) E_1(\vec{r}_1) E_2(\vec{r}_2) \rangle \\ &= \langle I_1(\vec{r}_1) \rangle \langle I_2(\vec{r}_2) \rangle + |\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $E_1(\vec{r}_1)$  and  $E_2(\vec{r}_2)$  are the fields at the detection plane, and  $\langle \rangle$  denote the ensemble average.  $\langle I_1(\vec{r}_1) \rangle \langle I_2(\vec{r}_2) \rangle$  corresponds to a background term, and  $|\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2$  is the squared modulus of the second-order field correlation [6],

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle E_1(\vec{r}_1) E_2^*(\vec{r}_2) \rangle. \quad (3)$$

We consider a random phase in the plane  $z=0$  whose statistical distribution produces a stationary light source which is well-described using a Gaussian-Schell correlator  $C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \exp(-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2/l_c^2)$  [6], where  $l_c$  is the coherence length. By inserting Eq. (1) into Eq. (3) and using the Gaussian-Schell correlator, the second-order field correlation function of two OAM beams with topological charges of  $m_1$  and  $m_2$  may be written as:

$$\begin{aligned} \Gamma_{m_1, m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{E_0^2}{w_0^{(|m_1|+|m_2|)}} r_1^{|m_1|} r_2^{|m_2|} \exp(im_{\Gamma} \phi_{\Gamma}) \\ &\times \exp\left[-(r_1^2 + r_2^2)/w_0^2\right] C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \end{aligned} \quad (4)$$

with  $m_{\Gamma} \phi_{\Gamma} = m_1 \phi_1 - m_2 \phi_2$ , where  $m_{\Gamma}$  refers to an effective topological charge (ETC) of the correlation function with effective azimuthal phase  $\phi_{\Gamma}$ .

The angular spectrum of this correlation function is given by [6]:

$$\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \iint A_1(\vec{r}_1) A_2(\vec{r}_2) \Gamma_{m_1, m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (5)$$

where  $A_i(\vec{r}_i)$  ( $i=1,2$ ) is an aperture function.

The physical quantity  $\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2}(\vec{k}, -\vec{k})$  is particularly interesting for the study of the robustness of the optical vortex [11, 12]. When the coherence length  $l_c$  is very small we can suppose that the Gaussian-Schell correlator reduce to  $C(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = I_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , where  $I_0$  and  $\delta$  denote a positive constant and the two-dimensional Dirac delta function, respectively. In this case, Eq. (5) becomes

$$\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2} = \frac{E_0^2}{w_0^{(|m_1|+|m_2|)}} \int A_1(\vec{r}_1) A_2(\vec{r}_1) r_1^{|m_1|+|m_2|} e^{i(m_1-m_2)\phi_1} e^{[-2r_1^2/w_0^2]} e^{[-2i\vec{k} \cdot \vec{r}_1]} d\vec{r}_1, \quad (6)$$

where we have used  $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1 = -\vec{k}$ . And now the ETC is given by  $m_{\Gamma} \phi_{\Gamma} = (m_1 - m_2) \phi_1$ .

### 3. Experimental setup

To experimentally verify the theoretical analysis, we used the intensity correlation [16–18] instead of the two-field correlation [12–14]. It is worth remembering that the two approaches are connected by Eq. (2). The experimental setup is illustrated in Fig. 1. A CW Ar + laser operating at 514 nm illuminates through a 10X beam expander a phase computer generated hologram [19] that was displayed in a Hamamatsu model X10468-01 spatial light modulator (SLM) to produce high-order LG modes. The hologram was imaged onto a rotating Ground Glass Disk (GGD) by a combination of lenses through a pinhole, working as a spatial filter. In same measurements, a pair of lenses,  $f_4$  and  $f_5$ , was used to image the GGD surface onto the aperture, which can have any shape, here represented by  $A_1$  and  $A_2$ . In our case, we have used a distributed triangular aperture (see  $A_1$  and  $A_2$  in Fig. 1). The beam transmitted by the

aperture was Fourier transformed by a  $f_6$  lens and observed by a charge coupled device (CCD) camera.

It is important to notice that a coherent beam with a well-defined TC illuminates a GGD. However, it becomes spatially incoherent after being transmitted by the GGD, having a chaotic wave front, but still with a characteristic azimuthal phase  $e^{im\phi}$  associated to it [12].

The rotating GGD and the CCD camera were synchronized to guarantee that two images can be acquired from the same point of the GGD, i.e., both LG beams with  $m_1$  and  $m_2$  are spatially incoherent, but correlated beams. We numerically performed one realization of the correlation between these two images and in the end we averaged over 100 realizations to obtain a resulting pattern in the intensity correlation. This procedure is similar to that of the compressive ghost imaging process [15].

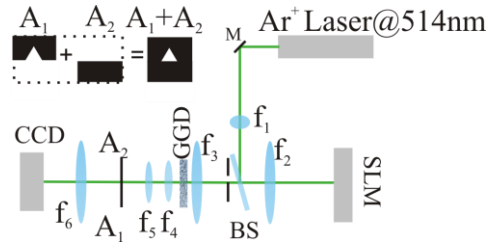


Fig. 1. Experimental setup.

#### 4. Results and discussion

Figure 2 shows speckles patterns produced by illuminating the GGD with LG beams of different orders of  $m$ . Line (A) of Fig. 2 shows images of a CCD camera with  $m_1 = 4$  and  $m_2 = 0.5$ , with  $A_i$  is equal to one, ( $i = 1, 2$ ). This case allows us to measure the spatial coherence length of  $21.4 \mu\text{m}$ . The same procedure was performed to obtain the results shown on the line (B) for  $m_1 = 2.5$  and  $m_2 = -0.5$ . However, these two images were recorded with  $A_1$  and  $A_2$  apertures (see Fig. 1) placed in the beam path, respectively. It is clear from Fig. 2 that no regular pattern can be observed. However, if we numerically correlate the corresponding images and average over 100 realizations, a well-defined pattern emerges, as shown in Figs. 3 and 4.

Figure 3 illustrates experimental results (first line) and theoretical results of amplitude (second line) and phase (third line) of the function  $\tilde{\Gamma}_{m_1, m_2}$  for the  $A_i(\vec{r}_i) = 1$ , with  $i = 1, 2$ . In the first line, we have numerically performed intensity correlations between incoherent beams with OAM of different orders,  $\langle I_{m_1} I_{m_2} \rangle$ . It is intriguing to notice that, from a spatially incoherent beam, similar to the images presented in Fig. 2, a well-formed pattern appears in the intensity correlation even for fractional values of  $m_1$  and  $m_2$ . For the case  $\langle I_{m_1=4} I_{m_2=0} \rangle$ , we have a stable vortex with ETC equal to 4, in total agreement with the panel for  $|\tilde{\Gamma}_{m_1=4, m_2=0}|$ . This result is confirmed by checking the phase diagram in the first column where a round trip phase (relative phase) of four times  $2\pi$  is observed. On the other hand, unstable vortices are observed in the first line of columns two and three for fractional values

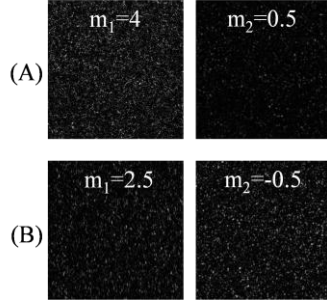


Fig. 2. Speckles patterns recorded in single shot mode using a CCD camera. Line (A) shows images of LG beams with  $m_1 = 4$  and  $m_2 = 0.5$  after diffracting by GGD without  $A_1$  and  $A_2$  apertures in the beam path. Line (B) shows images of LG beams with  $m_1 = 2.5$  and  $m_2 = -0.5$  after diffracting by GGD with  $A_1$  and  $A_2$  in the beams path, respectively.

of the ETC, i.e., for  $\langle I_{m_1=1.7} I_{m_2=0} \rangle$ , and  $\langle I_{m_1=4} I_{m_2=0.5} \rangle$ , respectively. However, the result shown for  $\langle I_{m_1=3.7} I_{m_2=1.7} \rangle$  is quite surprising. Even though each beam has non-integer values of  $m_1$  and  $m_2$ , the vortex core in the center is stable (it doesn't brake) and maintain its ETC, in this case, equal to two. This result is confirmed by observing the center of the phase diagram in the fourth column. However, a new ingredient appears in this panel. The phase diagram shows a ring dislocation. It emerges, by inspecting Eq. (6), due to the exponent in intensity distribution ( $r_1^{|m_1|+|m_2|} = r_1^{5.7}$ ) be different from the ETC of the azimuthal phase ( $\exp[i(m_1 - m_2)\phi_1] = \exp[i(2)\phi_1]$ ).

The physical interpretation behind Fig. 3 can be easily understood by Eq. (6), once that we can play with the TC associated to each incoherent beam,  $m_1$  and  $m_2$ , according to  $m_T = (m_1 - m_2)$ , to obtain an ETC value that can be different from  $m_1$  and  $m_2$  or even have fractional values. These results stress the fact that the OAM of incoherent fields obeys a well-defined vortices correlation rule.

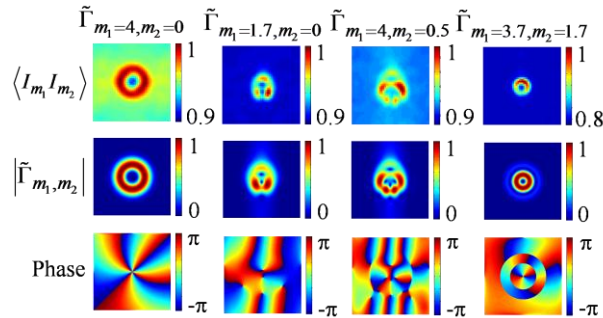


Fig. 3. Numerical intensity correlation averaged over 100 realization (First column), theoretical results of amplitude (second column) and phase (third column) of coherence function, Eq. (6). All results were obtained without considering  $A_1$  and  $A_2$  apertures.

A way to elucidate the strong correlation between coherence vortices is shown in Fig. 4. Now different apertures are aligned in the beam path. The apertures are illustrated in Fig. 1. In this case, two incoherent beams possessing topological charges  $m_1$  and  $m_2$  are diffracted by two apertures  $A_1$  and  $A_2$ , respectively. It is interesting to point out that if we spatially superpose the aperture  $A_1$  over  $A_2$  we have an equilateral triangle. First line of Fig. 4 shows numerical intensity correlations between various combinations of  $m$ . Observe that following

$m_T = m_1 - m_2$  from Eq. (6), the ETC is equal to  $m_T = 2$  for the first and third columns,  $m_T = -2$  for the second column,  $m_T = 3$  for the panels in the fourth and fifth columns, and  $m_T = 0$  for the sixth column. In fact, following Hickmann et al [20], the ETP can be obtained observing that  $m_T = N - 1$  ( $N$  is a number of spots of any external side of the triangle), in total agreement with the theory (second line of Fig. 4). A triangular aperture is a well known technique to determine the amount of OAM, unlike, for example, a square aperture [21]. It is worth pointing out that phase diagrams are the same to the panels of the third line of the fourth and fifth columns. It happens because the intensity distribution and azimuthal phase are the same (see Eq. (6)). In the last column observe the formation of a central spot as expected.

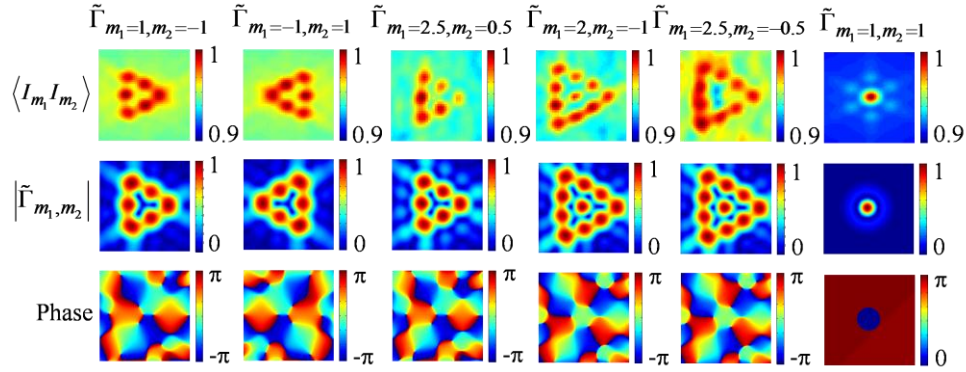


Fig. 4. Numerical intensity correlation averaged over 100 realization (First column), theoretical results of amplitude (second column) and phase (third column) of coherence function, Eq. (6). All results were obtained considering a distributed object ( $A_1$  and  $A_2$  apertures).

Finally, we would like to point out that the results obtained from arrangement of  $A_1$  and  $A_2$  apertures, forming a non-localized or distributed equilateral triangle, do not represent a nonlocal Bell measurement. However, the results presented in this paper may be of particular interest for quantum optics [22, 23].

## 5. Conclusions

In conclusion, we explored some fundamental aspects of coherence vortex using intensity correlation such as strong vortices correlation, stability of a coherence fractional vortex, and non-localized azimuthal phase. We have investigated the correlation between two spatially incoherent beams with different embedded phase singularities. A well defined topological charge was obtained in the intensity correlation following a correlation rule such that this value is bound to the topological charge associated to each incoherent beam. As a consequence of this rule, we observed a precise signature of an integer vortex in the intensity correlation from two incoherent beams with each beam possessing fractional vortices. And, we also showed that a well-defined amount of OAM can easily be identified in the intensity correlation when two incoherent beams possessing OAM were diffracted by a non-localized object. We have obtained excellent agreement between the theory using the Gaussian-Schell correlator and the experimental results. This paper may be useful in future works in singular statistical optics field.

## Acknowledgments

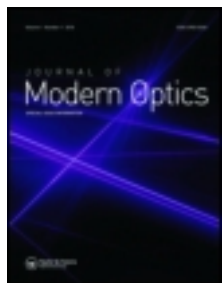
The authors would like to thank the following organizations for financial support: CAPES Pró-equipamentos/PROCAD/PROCAD-NF, CNPq/MCT, FAPEAL, INCT- Fotônica para Telecomunicações, and INCT - Informação Quântica.

This article was downloaded by: [University of Guelph]

On: 25 July 2012, At: 07:51

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



## Journal of Modern Optics

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/tmop20>

### Measurement of the orbital angular momentum at photon level via the spatial probability distribution

Alcenisio J. Jesus-Silva<sup>a</sup>, Eduardo J.S. Fonseca<sup>a</sup> & Jandir M. Hickmann<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Optics and Materials Group - Optma, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, AL, Brazil

Version of record first published: 25 Jul 2012

To cite this article: Alcenisio J. Jesus-Silva, Eduardo J.S. Fonseca & Jandir M. Hickmann (2012): Measurement of the orbital angular momentum at photon level via the spatial probability distribution, Journal of Modern Optics, DOI:10.1080/09500340.2012.705344

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/09500340.2012.705344>



PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Full terms and conditions of use: <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden.

The publisher does not give any warranty express or implied or make any representation that the contents will be complete or accurate or up to date. The accuracy of any instructions, formulae, and drug doses should be independently verified with primary sources. The publisher shall not be liable for any loss, actions, claims, proceedings, demand, or costs or damages whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with or arising out of the use of this material.

## Measurement of the orbital angular momentum at photon level via the spatial probability distribution

Alcenisio J. Jesus-Silva\*, Eduardo J.S. Fonseca and Jandir M. Hickmann

*Optics and Materials Group – Optma, Universidade Federal de Alagoas,  
Caixa Postal 2051, Maceió, AL, Brazil*

*(Received 24 May 2012; final version received 18 June 2012)*

We demonstrate that by diffracting light at single photon level with orbital angular momentum (OAM) by an equilateral triangular aperture, it is possible to determine their OAM amount by simply counting the number of maxima in the side of a generated triangular shaped hexagonal lattice in the spatial photon probability distribution. The sign of the OAM is obtained by the orientation of the latticed triangle. We also show that by changing the aperture size it is possible to discriminate OAM state superpositions.

**Keywords:** orbital angular momentum; optical vortex; single photon

### 1. Introduction

The photon's orbital angular momentum (OAM) is a new quantum degree of freedom with important implications for quantum information [1] and for optical manipulation [2]. Although the determination of OAM for whole beams is well established [3–8] and significant efforts have been made to experimentally determine single-photon OAM [8–10], an experimentally proved direct and easy method has remained a great challenge.

Usually, beams with OAM are measured by interfering them with a reference wave or with its mirror image. More recently, new techniques for obtaining the OAM have been reported. Some of them are the direct measurement with a Hartman–Shack wavefront sensor [6], interference by a Young's double-slit [7], and diffraction by a triangular aperture [8].

In recent years, a lot of work has been devoted to study OAM at the single photon level, with many proposals to measure it, but with only a few experimental implementations that always provided indirect evidence of the topological charge. In fact, the amplitude of OAM modes have been experimentally measured at photon level a few times, but no characterization of the helical phase has ever been done [11].

The photon's OAM modes (e.g. Bessel and Laguerre–Gauss modes) constitute an infinite-dimensional complete Hilbert basis and the study of high dimensionality [12] has attracted great interest due to its potential application in quantum information. One of the most promising applications of OAM

modes is found in quantum cryptography, where they can be used to code cryptographic keys with increased security in distribution having important consequences for new quantum information protocols. Recently, a scheme with qutrits coded in OAM has been demonstrated [13]. Another relevant application using the photon's OAM is the generation of hyper-entangled quantum states [14].

High-order Laguerre–Gauss (LG) modes are one of the most studied examples of modes possessing OAM. This is due to the next three main reasons. The LG modes form a complete, infinite-dimensional basis for the paraxial wave equation, defining a paraxial Hilbert space [15]. In 1992, it was demonstrated that such light modes carry a well-defined OAM of  $m\hbar$  per photon [16], where  $m$  is an integer number, referred to as the topological charge of the mode. Also, LG modes, within the paraxial approximation, can be identified as an eigenstate of a quantum OAM operator [17]  $\hat{L}_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$ , where  $|m\rangle$  stands for a one-photon state prepared in a LG mode.

A multichannel device that discriminates OAM has been experimentally demonstrated for beams with very low intensity, suggesting that it should work at the single photon level [18,19]. The main drawback of this device was that it required a number of Mach–Zehnder interferometers that depend on the maximum value of OAM of photons involved. More recently, a new OAM sorting device was tested with light beams using spatial light modulators (SLM) that could be used at photon level [20]. In any case, to experimentally determine a

\*Corresponding author. Email: [alcenisio@optma.org](mailto:alcenisio@optma.org)

single photon in any of different OAM states in an easy and direct way, and with high efficiency, remains a challenge.

In this paper, we theoretically and experimentally demonstrate a new method to determine in an undoubted way the OAM of photons in any eigenstate mode. Our new method is based on the diffraction of photons from a strong attenuated laser by an equilateral triangular aperture that produces a lattice in the spatial probability distribution whose size is proportional to the topological charge. The diffracted photons are measured at the Fraunhofer plane or at the focal plane of a lens. We also investigate, using variable size apertures, the discrimination of OAM state superpositions.

## 2. Theory

We start considering that the input field is a one-photon state with well-defined paraxial modes and can be described by [21]:

$$|\Psi\rangle = |m, p, \vec{k}_\perp\rangle = \int d\vec{k}_\perp v_{m,p}(\vec{k}_\perp) |\vec{k}_\perp\rangle, \quad (1)$$

where  $v_{m,p}(\vec{k}_\perp)$  represents a complete set of orthogonal transverse functions. In the paraxial approximation the expression for the electrical field operator in the detection plane can be written as

$$\hat{E}_d(\vec{r}_\perp, z) \propto \int d\vec{k}_\perp \hat{a}_{m,p}(k_\perp) \tau(k_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp}, \quad (2)$$

The operator  $\hat{a}_{m,p}(k_\perp)$  annihilates a photon in modes  $m, p$  with transverse wavevector  $k_\perp$ .  $\tau(k_\perp)$  is the inverse Fourier transform of the function that represents the transmission function of the equilateral triangular aperture.

The probability amplitude after the photon is transmitted by the triangular aperture at the Fourier plane is given by [22,23]

$$A_{m,p}(\vec{r}_\perp) = \langle \text{vac} | \hat{E}_d | \Psi \rangle, \quad (3)$$

with  $P_{m,p}(\vec{r}_\perp) = |A_{m,p}(\vec{r}_\perp)|^2$  as the detection probability. Manipulating the above equations, we can obtain the detection probability, i.e.

$$P_{m,p} = |A_{m,p}(\vec{r}_\perp)|^2 \propto \left| \int d\vec{k}_\perp \tau(\vec{k}_\perp) v_{m,p}(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \right|^2. \quad (4)$$

Note that the detection probability is proportional to a transverse distribution that depends on the paraxial modes after the photons have been diffracted by the equilateral triangular aperture, at the Fourier plane. Therefore, this transverse distribution corresponds to the far field region which plays the role

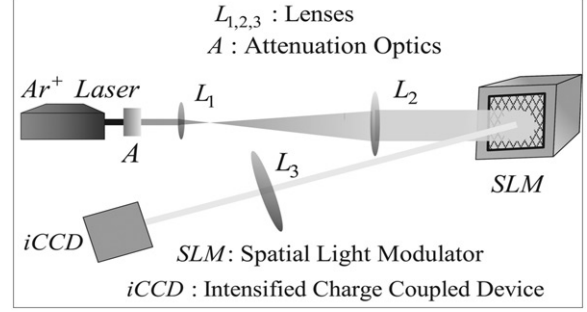


Figure 1. Experimental setup to generate and measure OAM at single-photon level. The figure depicts the experimental setup used to produce photons in a LG or Bessel mode with different topological charges, diffract them by an equilateral triangular aperture (generated at the SLM) and count them using the iCCD.

of reciprocal space. Interesting enough, the solution of the integral in Equation (4) forms a triangular shape pattern, which allows determination of the photon's OAM.

## 3. Experiment

The principle of the experiment is illustrated in Figure 1, where photons in a well-defined OAM state are diffracted by an equilateral triangular aperture and measured at the Fraunhofer plane.

An argon ion laser operating at 514 nm illuminates a pixelated computer hologram [24] written in a Hamamatsu model X10468-01 spatial light modulator (SLM) to produce high order LG modes with OAM varying from  $-7$  to  $7$ . We produced only modes with  $p = 0$ ; thus we will not make further reference to that index mode. A mask with an equilateral triangular aperture with side length of 1.75 mm can be superimposed over the LG hologram in the SLM.

Figure 2 illustrates this process. A phase hologram was constructed to generate the Laguerre–Gauss beam when illuminated by a plane wave, and multiplied by an aperture function, which is one inside and zero outside the aperture. The hologram can be expanded as an infinite Fourier series; however, only the first order gives us all the information about the diffracted pattern of a LG beam for a triangular aperture:

$$TP(u, v) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) h_1(x, y) \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f_1} (xu + yv)\right] dx dy, \quad (5)$$

where  $h_1(x, y) = LG(x, y)$  is the Laguerre–Gauss function and  $A(x, y)$  is the aperture.  $TP$  is the triangular truncated pattern in the Fourier plane.



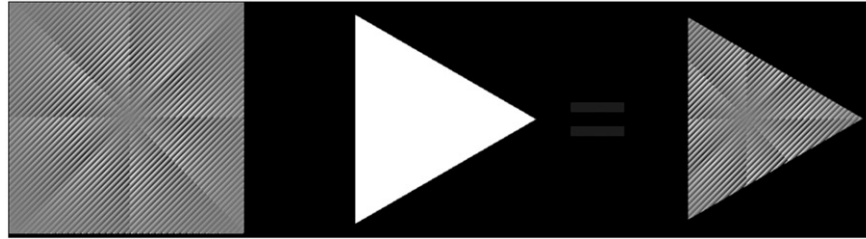


Figure 2. Illustration showing the process of superimposing a slit over the LG hologram. All completely black regions in the final hologram correspond to zero phases.

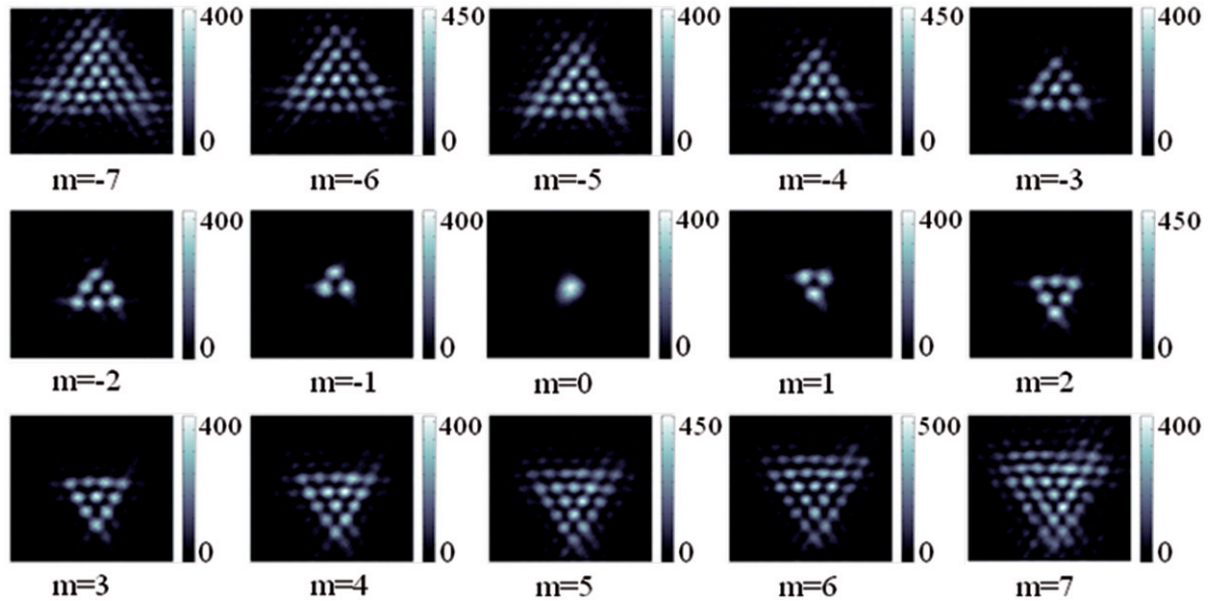


Figure 3. Measurements at single-photon level OAM of LG modes. We measured, at single photon level, LG modes with the topological charge varying from  $m = -7$  to  $m = 7$ . (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

The SLM is placed in the photons' path and the collected diffracted photons imaged by a 50 cm lens in an Andor model DH734-18F-03 intensified CCD camera (iCCD). The camera was adjusted to operate in an accumulative single photon count mode. We accumulated photon counts for 4000 scans at 8 Hz for each image. The intensity of the laser beam was strongly attenuated to make sure that the maximum photon-detection probability was of the order of 0.1 photon per pixel per acquisition time. We performed our measurements in this regime because, as it was recently pointed out [25], even photons produced by strongly attenuated lasers can exhibit quantum properties.

#### 4. Results and discussion

We show in Figure 3 the photon count matrices of  $70 \times 70$  pixels corresponding to a region of

$1.75 \times 1.75$  mm of the iCCD illuminated by the diffracted photons in LG modes. The figure shows counts for the modes after the diffraction by the equilateral triangular aperture. The generated lattices are related to the unusual properties of light with OAM diffracted by an edge or slit [26]. The total charge  $m$  is directly related to the size of the triangular shaped hexagonal lattice of maxima and is given by  $m = N - 1$ , where  $N$  is the number of lobes on any external side of the triangle [8]. In Figure 3, we obtained a perfect agreement with the OAM eigenstate of the photons used. Note that it is also possible to determine the sign of  $m$ , since the orientation of the interference pattern changes as can also be observed in Figure 3, where an OAM sign change causes the triangular shaped lattice to appear rotated by  $\pi$ .

We should emphasize here that as in any method to determine photon properties, given the statistical

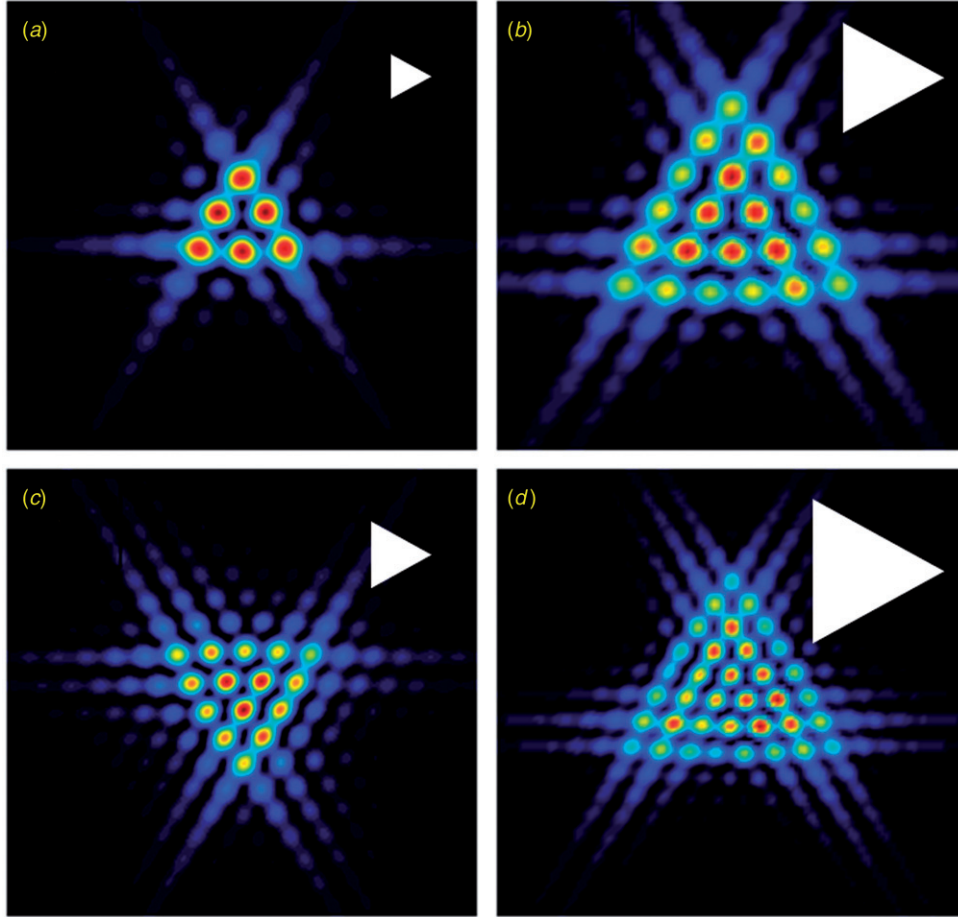


Figure 4. Discriminating the OAM states of photons in superposition states. The calculated probability density to detect photons in a superposition of LG modes with (a)  $m_1 = 2$  and (b)  $m_2 = 5$  using different size triangular apertures; see main text for details. In (c) and (d), the discrimination for the superposition of OAM states with  $m_1 = -4$  and  $m_2 = 7$ , respectively, is shown. The orientation of the aperture used in all cases is shown in the top right of the panels. (The color version of this figure is included in the online version of the journal.)

nature of quantum mechanical measurements, it is intrinsically necessary to use a large set of single photons in a given state to obtain a precise measurement. Obviously to characterize quantum superposition of states determining the probability associated to each eigenstate it would be necessary to use a sorter before the triangular aperture. Nevertheless, our method can differentiate eigenstates from states superposition pairs using a variable aperture.

In Figure 4, we show the result of diffracting a superposition state composed of eigenstates with OAM equal to  $m_1 = 2$  and  $m_2 = 5$  by the triangular aperture with different sizes. The set of plots shows the corresponding detection probability at the measurement plane. Even though the detection probability is identical for the superposition before having been diffracted by the triangular aperture, after inserting the

different size apertures the modes are discriminated and are easily identified, as shown in Figure 3. Figure 4(a) and (b) show the patterns corresponding to  $m_1 = 2$  and  $m_1 = 5$ , respectively. Due to their quantum nature it could not be easy to determine the modulus of the amplitude probabilities for each state. However, a result from our simulations using Equation (4) is that to be able to discriminate both OAM states, the eigenstate with lower amount of OAM must be much smaller than that of high OAM. We also found the requirement that  $\Delta m = ||m_1| - |m_2|| \geq 3$ . Figure 4(c) and (d) show the situation in which the OAM states have opposite sign with  $m_1 = -4$  and  $m_2 = 7$ . When the detection probability amplitudes of the modes are such that it is possible to discriminate both modes, the size ratio between the apertures is 1/4 with the size of the larger triangle determined by the radius of the higher OAM state [8].

## 5. Summary

In summary, we have experimentally and theoretically demonstrated a direct way to determine the light's OAM at single-photon level. It is interesting to notice that photons generated from an attenuated laser source are a current topic of research and also exhibit quantum properties [25]. Even though we are working at single photon level, as expected, our findings do not present any difference from a system with many photons per mode [8]. The method is based on the generation of a two-dimensional diffraction pattern by a combination of path phase and azimuthal phase interference. We have used an equilateral triangular aperture illuminated by photons in LG modes to generate the latticed quantum interference patterns. We also demonstrated that using our method it is possible to discriminate eigenstates from states superpositions when presented in pairs. A key issue here is that the detection spatial probability distributions can distinguish only OAM with topological charge differing by 3 or more. Our findings could certainly be extended to measure the topological charge of X-rays [27] and of single-electrons carrying OAM [28].

## Acknowledgements

The authors would like to express their thanks for financial support from: CAPES Pró-equipamentos/PROCAD/PROCAD-NF, CNPq/MCT, Pronex/FAPEAL, FAPEAL, PADCT, Nanofoton Network, INCT- Fotônica para Telecomunicações and INCT - Informação Quântica.

## References

- [1] Molina-Terriza, G.; Torres, J.P.; Torner, L. *Nat. Phys.* **2007**, *3*, 305–310.
- [2] Grier, D.G. *Nature (London)* **2003**, *424*, 810–816.
- [3] Heckenberg, N.R.; McDuff, R.; Smith, C.P.; White, A.G. *Opt. Lett.* **1992**, *17*, 221–223.
- [4] Harris, M.; Hill, C.A.; Vaughan, J.M. *Opt. Commun.* **1994**, *106*, 161–166.
- [5] Harris, M.; Hill, C.A.; Tapster, P.R.; Vaughan, J.M. *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **1994**, *49*, 3119–3122.
- [6] Leach, J.; Keen, S.; Padgett, M.J.; Saunter, C.; Love, G.D. *Opt. Express.* **2006**, *14*, 11919–11924.
- [7] Sztul, H.I.; Alfano, R.R. *Opt. Lett.* **2006**, *31*, 999–1001.
- [8] Hickmann, J.M.; Fonseca, E.J.S.; Soares, W.C.; Chavez-Cerda, S. *Phys. Rev. Lett.* **2010**, *105*, 053904.
- [9] Gomes, R.M.; Salles, A.; Toscano, F.; Ribeiro, P.H.S.; Walborn, S.P. *Phys. Rev. Lett.* **2009**, *103*, 033602.
- [10] Mair, A.; Vaziri, A.; Weihs, G.; Zeilinger, A. *Nature (London)* **2001**, *412*, 313–316.
- [11] Galvez, E.J.; Johnson, E.; Reschovsky, B.J.; Coyle, L.E.; Shah, A. *Proc. SPIE* **2010**, *7613*, 76130–76137.
- [12] Straupe, S.; Kulik, S. *Nat. Photonics* **2010**, *4*, 585–586.
- [13] Groblacher, S.; Jennewein, T.; Vaziri, A.; Weihs, G.; Zeilinger, A. *New J. Phys.* **2006**, *8*, 75.
- [14] Barreiro, J.T.; Langford, N.K.; Peters, N.A.; Kwiat, P.G. *Phys. Rev. Lett.* **2005**, *95*, 260501.
- [15] Garrison, J.C.; Chiao, R.Y. *Quantum Optics*; Oxford University Press: New York, 2008.
- [16] Allen, L.; Beijersbergen, M.W.; Spreeuw, R.J.C.; Woerdman, J.P. *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **1992**, *45*, 8185–8189.
- [17] Vanenk, S.J.; Nienhuis, G. *Opt. Commun.* **1992**, *94*, 147–158.
- [18] Leach, J.; Padgett, M.J.; Barnett, S.M.; Franke-Arnold, S.; Courtial, J. *Phys. Rev. Lett.* **2002**, *88*, 257901.
- [19] Leach, J.; Courtial, J.; Skeldon, K.; Barnett, S.M.; Franke-Arnold, S.; Padgett, M.J. *Phys. Rev. Lett.* **2004**, *92*, 013601.
- [20] Berkhout, G.C.G.; Lavery, M.P.J.; Courtial, J.; Beijersbergen, M.W.; Padgett, M.J. *Phys. Rev. Lett.* **2010**, *105*, 153601.
- [21] Aiello, A.; Woerdman, J.P. *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **2005**, *72*, 060101(R).
- [22] Mandel, L.; Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*; Cambridge University Press: New York, 1995.
- [23] Calvo, G.F.; Picon, A.; Bagan, E. *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **2006**, *73*, 013805.
- [24] Arrizon, V.; Ruiz, U.; Carrada, R.; Gonzalez, L.A. *J. Opt. Soc. Am. A* **2007**, *24*, 3500–3507.
- [25] D'Auria, V.; Lee, N.; Amri, T.; Fabre, C.; Laurat, J. *Phys. Rev. Lett.* **2011**, *107*, 050504.
- [26] Ferreira, Q.S.; Jesus-Silva, A.J.; Fonseca, E.J.; Hickmann, J.M. *Opt. Lett.* **2011**, *36*, 3106–3108.
- [27] Sasaki, S.; McNulty, I. *Phys. Rev. Lett.* **2008**, *100*, 124801.
- [28] Uchida, M.; Tonomura, A. *Nature (London)* **2010**, *464*, 737–739.

## Born's rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

2011 EPL 96 64006

(<http://iopscience.iop.org/0295-5075/96/6/64006>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 200.17.112.210

The article was downloaded on 30/08/2012 at 13:23

Please note that [terms and conditions apply](#).

# Born's rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit

J. M. HICKMANN<sup>(a)</sup>, E. J. S. FONSECA and A. J. JESUS-SILVA

*Optics and Materials Group - OPTMA, Universidade Federal de Alagoas - Caixa Postal 2051, 57061-970, Maceió, AL, Brazil*

received 10 August 2011; accepted in final form 7 November 2011

published online 14 December 2011

PACS 42.50.Xa – Optical tests of quantum theory

PACS 42.50.Tx – Optical angular momentum and its quantum aspects

PACS 03.65.Ta – Foundations of quantum mechanics; measurement theory

**Abstract** – We use photon OAM's two-dimensional properties to extend the double-slit to a two-dimensional triple-slit configuration in the shape of an equilateral triangle, obtaining a bidimensional triangular interference pattern at photon level, whose size depends on the OAM amount. We also show that for this pattern, in contrast with the parallel two- and three-slit cases, the azimuthal phase plays a fundamental role, being undistinguishable from the path phase. Our results confirm that only pairs, here associated to path and azimuthal phases, contribute to the two-dimensional photon detection probability, as established by Born's rule.

Copyright © EPLA, 2011

The double-slit experiment at single-photon [1] or -electron [2] level has been the ubiquitous quantum interference experiment [3] where the path phase plays a key role, while the orbital angular momentum (OAM) [4] of single electrons [5] or single photons [6] brings another dimension [7] to the quantum interference problem [8] with a new degree of freedom [9] associated to the spiral phase.

The quantum single-photon [1] or -electron [2] double-slit interference holds the mystery that it does not go away, as pointed out by Feynman [10]. Over the years, it was used to propose and demonstrate many mind-boggling quantum-mechanical paradoxes like the Wheeler delayed choice [3,11]; the ghost interference [12]; the de Broglie wavelength of a two-photon wave packet [13]; the distributed double-slit [14,15]; the quantum eraser [16], among many others. The extension to three parallel slits has attracted little attention, until its recent original use [17] in the experimental verification of Born's rule [18] for a point corresponding to the central interference maximum.

On the other hand, there is an infinite number of light's OAM modes [9] and the study of quantum states with high dimensionality has attracted great interest due to its potential application in quantum information [7]. One of the most promising applications is in quantum

cryptography, where it can be used to increase security in the distribution of cryptographic keys [19,20] or generate OAM coded qutrits [21]. Other applications using light OAM are the generation of hyper-entangled quantum states [8] and optical lattices [22], as well as in optical manipulation [23].

Laguerre-Gauss (LG) modes form a complete, infinite-dimensional basis for the paraxial wave equation, associated to a Paraxial Hilbert space [24]. In 1992 [4], it was demonstrated that LG modes are eigenstates of the quantum OAM operator  $\hat{L}_z|m\rangle = m\hbar|m\rangle$ , where  $|m\rangle$  represents a single-photon LG state and  $m$  is an integer number.

In order to understand the interference pattern that we will measure and to compare it with the double-slit experiment for single photons or electrons [10,25], we calculated the normalized probability density patterns shown in fig. 1. Starting with the case of photons without OAM ( $m=0$ ), it is clear from the last column in the first row of fig. 1, that there is a maximum in the detection probability at the centre of the figure. This maximum is the signature of the fact that we cannot determine exactly by which slit the photon was diffracted. The existence of only this central spot is related to the fact that the sum of the diffraction patterns from each slit forms a star-like shape, and not along the same line as in the parallel two- or three-slit configurations, even for light with OAM [26].

Much more interesting is the case for the OAM equal to unity ( $m=1$ ). The first thing we see is that the central

<sup>(a)</sup>E-mail: [jmh@optma.org](mailto:jmh@optma.org)

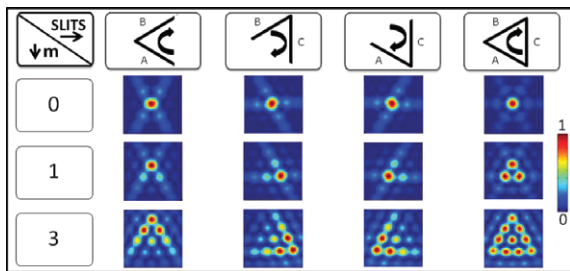


Fig. 1: (Colour on-line) OAM mediated photon wave particle duality applied to three slits in a triangular configuration. The curved arrow indicates the direction of increasing azimuthal phase. In all graphs the maximum probability density was normalized to the unity.

maximum disappeared because the azimuthal phase from the incident photon provided the information that revealed by which slit it was diffracted. However, the interference peak was erased not by the usual *which path information* but rather by an unusual *which azimuthal phase information*. At the same time at which the azimuthal phase makes the central maximum disappear, it makes other maxima to appear. If we analyze the probability density pattern of the three possible pairs of adjacent slits separately (depicted in fig. 1, three left columns of the second row), we discover that a maximum appears dislocated along the direction of the absent slit. Each of these maxima comes from the impossibility to distinguish between path phase and azimuthal phase. In other words, for some points in the Fraunhofer plane, we cannot find out if a photon is crossed by a closer slit with a larger azimuthal phase or a farther slit with a smaller azimuthal phase. Note that if we changed the sign of the OAM, the maximum would be dislocated along the same direction but closer to the other slit because the azimuthal phase would increase towards that slit. The final result is a  $\pi$  rotation of the triangle-shaped pattern for negative OAM.

Increasing the photon's OAM makes the structure richer, because OAM acts like a parameter in the triangular diffraction, producing larger patterns for larger OAM. In fact the number of interference peaks grows as the sum of an arithmetic progression and is given by  $(m + 1)(m + 2)/2$ . We should point out that for OAM equal to three, the central maximum reappears because now there is a phase difference of  $2\pi$  between adjacent slits. This central spot is present for OAM states equal to zero or multiples of three and is absent in all the other cases. In short, the diffraction of single photons with OAM reveals a latticed planar quantum interference pattern, whose size is controlled by the OAM, extending the double-slit wave particle duality beyond the photon's path phase wave behaviour to include the photon's OAM azimuthal phase wave behaviour.

According to Born's rule, in quantum mechanics only pairs of amplitude probabilities contribute to the quantum interference [17], resulting in the fact that interference

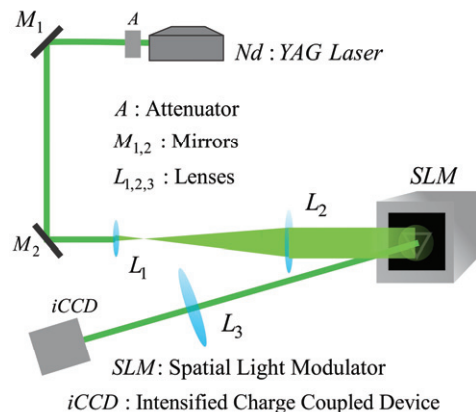


Fig. 2: (Colour on-line) Generation, diffraction and measurement of photons with OAM. The figure depicts the experimental setup used to produce photons with OAM, diffract them by different slits combinations and count them with the help of an iCCD.

terms from three or more probability amplitudes are null. In the following, we experimentally show that Born's rule is valid for three slits in a triangular configuration, with the interference coming from unusual pairs: shorter path/larger azimuthal phase and longer path/smaller azimuthal phase, generalizing the recently experimentally demonstrated three-parallel-slits case [17].

The principle of the experiment is illustrated in fig. 2. A stabilized single-frequency CW laser model torus made by laser-quantum operating at 532 nm illuminates through a 25X beam expander a pixelated computer hologram written in a Hamamatsu model X10468-01 spatial light modulator (SLM) to produce single photons in high-order LG modes. A phase hologram [27,28] was used to generate the LG beam when illuminated by a plane wave. We displayed in the SLM only that portion of the hologram contained in the interior region of the different slit combinations. Outside the slit, we have put zero phases. In the far-field plane we can observe exactly the same far-field diffraction pattern as if we first have generated the LG beam and after have diffracted by the slit combination.

The collected diffracted photons are imaged by a 50 cm lens in an Andor model DH734-18F-03 intensified CCD camera (iCCD). The intensity of the laser beam was strongly attenuated to make sure that the maximum photon detection probability is smaller than 0.1 photons per pixel per acquisition time. We performed our measurements in this regime because, as was recently pointed out [29], even photons produced by strongly attenuated lasers can present quantum properties.

The iCCD camera was adjusted to operate in a cumulative single-photon counting mode at a nominal gain of 600 electrons per photoelectron reaching the microchannel electron multiplier plate (MCP). We gated at 8.065 Hz during 290 microseconds the potential of the photocathode in front of the iCCD to direct photoelectrons to the

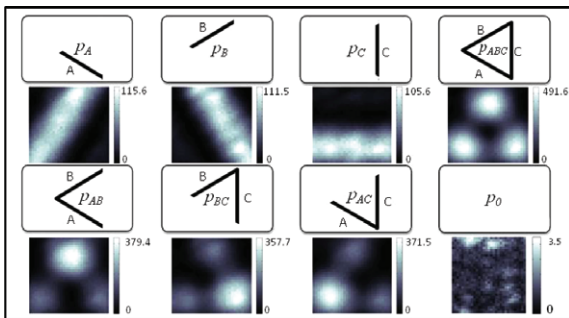


Fig. 3: Measured interference patterns at single-photon level for each slit, slit combination, and background. In the figure is presented the measured single-photon interference pattern for each slit, pairs of slits, three slits, and background counting, corresponding to each term on the right-hand side of eq. (1). The direction of increasing azimuthal phase is the same as in fig. 1. The photon counting bars to the right of each pattern correspond to the number of photons integrated over a total time of 1.45 seconds corresponding to 5000 scans and averaged over 70 distinct measurements.

MCP. After the amplified electrons were converted back to photons in a phosphor layer in front of a CCD at the back of the iCCD, photon counts were obtained performing a sequence of gated synchronized 2 milliseconds scans of the charge accumulated in the CCD. The discriminator was set at 900 CCD's electrons per photon count.

The multi-order interference term for three slits can be obtained from the expression [17]

$$i_{ABC} = p_{ABC} + p_A + p_B + p_C - p_{AB} - p_{BC} - p_{CA} - p_0, \quad (1)$$

where  $p_{ABC}$  is the diffraction counting pattern of the triangular slit,  $p_i$  and  $p_{ij}$  are the diffraction counting pattern by single slits and pairs of slits, respectively,  $i$  and  $j$  refers to slits  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $p_0$  is the noise and background counting obtained with a totally black mask in the SLM.

In fig. 3, we show all experimentally obtained contributions, using the corresponding mask (also depicted in the figure), necessary to estimate  $i_{ABC}$  and calculate  $\kappa = i_{ABC}/\delta$  with  $\delta = |i_{AB}| + |i_{BC}| + |i_{AC}|$  [17].

We measure each term on the right-hand side of eq. (1) with the iCCD configuration described above and used single photons in a LG mode with  $m = 1$ . All the slits and slits combinations have 4.92 mm side length and 0.3 mm thickness. The numbers besides the grey bar represent the amount of counted photons after averaging 70 sets of 5000 scans, corresponding to a total integration time of 1.45 seconds for each data set. All measurements were performed over matrices of 30-by-30 pixels, corresponding to a 0.39-by-0.39 mm<sup>2</sup> iCCD region.

In fig. 4, we present these matrices for the calculated third-order interference term  $\kappa$  (a) and mean standard deviation  $\sigma_{\bar{\kappa}}$  (b). In the graph for  $\kappa$ , we cannot observe any third-order interference pattern, besides the fact that  $\kappa$  can be large at some points. We believe that this

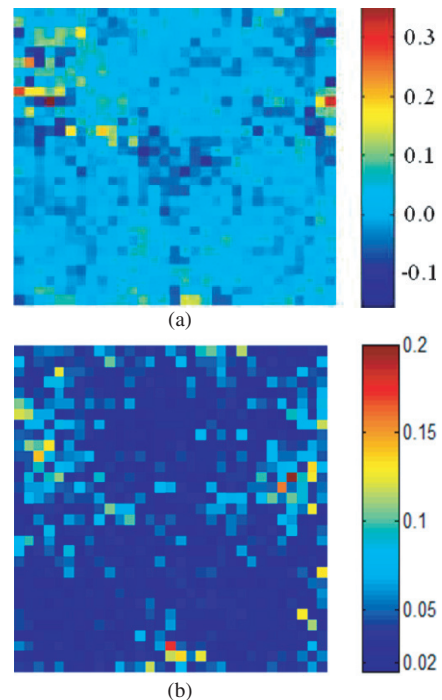


Fig. 4: (Colour on-line) Ruling out the third-order interference term. (a) The calculated third-order interference  $\kappa$  obtained using all experimentally measured and averaged terms on the right-hand side of eq. (1) shown in fig. 3. (b) The calculated standard deviation of the third-order interference  $\kappa$ .

results in the fact that  $\delta$  can reach zero or very small quantities, amplifying the noise. The obtained values at the positions of the three interference peaks are  $\kappa = -0.0060 \pm 0.0251$ ,  $-0.0012 \pm 0.0601$  and  $0.0007 \pm 0.0667$ . We can average matrices of 5-by-5 pixels centred at these peaks to obtain  $\kappa = -0.0046 \pm 0.0297$ ,  $-0.0045 \pm 0.0308$  and  $0.0015 \pm 0.0295$ . Our results corroborate the principle that quantum interference always comes from correlating pairs, and extend the experimental verification of Born's rule for systems where OAM provides an extra degree of freedom, *i.e.* the azimuthal phase, which enhances indistinguishability. We also extend such experimental verification from zero dimension (one point) [17] to two dimensions (2D).

Finally, we must point out that even without a third-order interference effect, we have a contribution in every interference peak from all three pairs of slits. It is easy to conclude that by looking at the density patterns for each slits pair in fig. 1, where the triangular structure for the triangular slit is present for all pairs, besides having different peak probabilities. Note that this effect is not coming from pairs of interfering probability amplitudes as established by Born's rule but rather by just *classically* adding the three probabilities associated with slit pairs.

In conclusion, we have shown that to take advantage of the OAM's extra degree of freedom, one must use an extra dimension extending the double-slit to a triple-slit triangular configuration and that the resulting interference

pattern has also an extra dimension, with the number of interference maxima directly related to the amount of the photon's OAM. Our results are a consequence of the fact that the azimuthal phase is undistinguishable from the optical path phase. Moreover, our results do not violate Born's rule and only slits taken two by two contribute to the interference pattern, with the contribution of three slits being void, confirming the prediction [17] that Born's rule could be associated to other quantities like angular-momentum states. We have used three slits in an equilateral triangular configuration illuminated, at single-photons level, with LG modes to generate the 2D interference patterns, but the results presented may be applied to other families of photon modes possessing OAM or massive particles like electrons carrying OAM [2,5]. Our experimental results represent a fundamental step to the validation or a generalization [30] with a possible integration with the gravitation theory [17], as well as to theoretical attempts [31] to derive Born's rule from more fundamental principles.

\*\*\*

The authors acknowledge the financial support from CAPES Pró-equipamentos/PROCAD/PROCAD-NF, Nanofoton Network, INCT-IQ, INCT-FOTONICOM, PADCT, Pronex/FAPEAL, CNPq/MCT, and FINEP. JMH thanks Mr P. H. F. MESQUITA for the help in the lab, and Dr M. A. R. C. ALENCAR for lending the Torus laser.

## REFERENCES

- [1] FRENCH A. P. and TAYLOR E. F., *An Introduction to Quantum Physics*, 1st edition (Norton, New York) 1978.
- [2] TONOMURA A., ENDO J., MATSUDA T., KAWASAKI T. and EZAWA H., *Am. J. Phys.*, **57** (1989) 117.
- [3] MARLOW A. R., *Mathematical Foundations of Quantum Theory* (Academic Press, New York) 1978.
- [4] ALLEN L., BEIJERSBERGEN M. W., SPREEUW R. J. C. and WOERDMAN J. P., *Phys. Rev. A*, **45** (1992) 8185.
- [5] UCHIDA M. and TONOMURA A., *Nature*, **464** (2010) 737.
- [6] MAIR A., VAZIRI A., WEIHS G. and ZEILINGER A., *Nature*, **412** (2001) 313.
- [7] STRAUPE S. and KULIK S., *Nat. Photon.*, **4** (2010) 585.
- [8] BARREIRO J. T., LANGFORD N. K., PETERS N. A. and KWIAT P. G., *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005) 260501.
- [9] MOLINA-TERRIZA G., TORRES J. P. and TORNER L., *Nat. Phys.*, **3** (2007) 305.
- [10] FEYNMAN R. P., *The Feynman Lectures on Physics: New Millennium Edition*, Vol. **III** (Basic Books, A Member of the Perseus Books Group, New York, NY) 2010.
- [11] ROCH J. F., JACQUES V., WU E., GROSSHANS F., TREUSSART F., GRANGIER P. and ASPECT A., *Science*, **315** (2007) 966.
- [12] STREKALOV D. V., SERGIENKO A. V., KLYSHKO D. N. and SHIH Y. H., *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3600.
- [13] FONSECA E. J. S., MONKEN C. H. and PADUA S., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 2868.
- [14] FONSECA E. J. S., RIBEIRO P. H. S., PADUA S. and MONKEN C. H., *Phys. Rev. A*, **60** (1999) 1530.
- [15] VIDAL I., CAETANO D. P., FONSECA E. J. S. and HICKMANN J. M., *EPL*, **82** (2008) 34004.
- [16] WALBORN S. P., OLIVEIRA A. N., PADUA S. and MONKEN C. H., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 143601.
- [17] SINHA U., COUTEAU C., JENNEWEIN T., LAFLAMME R. and WEIHS G., *Science*, **329** (2010) 418.
- [18] WHEELER J. A. and ZUREK W. H., *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, Princeton, NJ) 1983.
- [19] BRUSS D., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 3018.
- [20] BECHMANN-PASQUINUCCI H. and PERES A., *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000) 3313.
- [21] GROBLACHER S., JENNEWEIN T., VAZIRI A., WEIHS G. and ZEILINGER A., *New J. Phys.*, **8** (2006) 75.
- [22] HICKMANN J. M., FONSECA E. J. S., SOARES W. C. and CHAVEZ-CERDA S., *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 053904.
- [23] GRIER D. G., *Nature*, **424** (2003) 810.
- [24] GARRISON J. C. and CHIAO R. Y., *Quantum Optics* (Oxford University Press, Oxford, New York) 2008.
- [25] COHEN-TANNOUJDI C., DIU B. and LALOË F., *Quantum Mechanics* (Wiley, New York) 1977.
- [26] FERREIRA Q. S., JESUS-SILVA A. J., FONSECA E. J. S. and HICKMANN J. M., *Opt. Lett.*, **36** (2011) 3106.
- [27] KIRK J. and JONES A., *J. Opt. Soc. Am. B*, **61** (1971) 1023.
- [28] LEACH J., DENNIS M., COURTIAL J. and PADGETT M., *New J. Phys.*, **7** (2005) 55.
- [29] D'AURIA V., LEE N., AMRI T., FABRE C. and LAURAT J., *Phys. Rev. Lett.*, **107** (2011) 050504.
- [30] UDUDEC C., BARNUM H. and EMERSON J., *Found. Phys.*, **41** (2011) 396.
- [31] ZUREK W., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 120404.