

Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

André de Lima Moura

Medida do coeficiente eletro-óptico efetivo e determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado em cristal fotorrefrativo  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  nominalmente puro utilizando uma configuração de incidência oblíqua: modelo e experimento

Maceió – AL  
2013

André de Lima Moura

Medida do coeficiente eletro-óptico efetivo e determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado em cristal fotorrefrativo  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  nominalmente puro utilizando uma configuração de incidência oblíqua: modelo e experimento

*Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.*

ORIENTADOR: Prof. Dr. Pedro Valentim dos Santos

Maceió – AL  
2013

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

M929m    Moura, André de Lima.  
          Medida do coeficiente eletro-óptico efetivo e determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado em cristal fotorrefrativo  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  nominalmente puro / André de Lima Moura. – 2013.  
          110 f. : il., graf.

Orientador: Pedro Valentim dos Santos.  
Tese (Doutorado em Física da Matéria Condensada) –  
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 102-104.  
Apêndices: f. 105-110.

1. Coeficiente eletro-óptico. 2. Efeito eletro-óptico linear.  
3. Campo elétrico aplicado – Coeficiente de blindagem. 4. Silenitas.  
5. Cristais BTO. I. Título.

CDU: 535.56

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos, à  
Célia e Marlene, a minha esposa e a memória  
da minha avó.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente aos meus pais, irmãos, à Célia e Marlene pelo apoio e incentivo incondicional durante toda a minha vida.

À minha esposa pelo apoio e paciência.

Ao Professor Pedro Valentim por toda a contribuição no meu doutorado, inicialmente por ser uma pessoa magnânima, que doou todo o material de trabalho que havia adquirido com projetos ao campus Arapiraca (UFAL) e continuou dando suporte, até a finalização desta tese. Além disso, manteve a sua paciência característica para a realização deste trabalho.

Ao Luciano Ângelo (Zé do Trota) e Carlos Henrique (Chico), amigos pra toda a vida.

Ao Francisco Rego por toda amizade, apoio e incentivo desde o início da minha iniciação científica.

Ao Caio Leite (Borboleta) e Manoel Pereira (Chuck) por toda amizade, incentivo e apoio.

Ao Lucas Maia (Juma Shumba), Rafael Duarte (Tenente Ralph Lapardon) e Leonardo Bruno (Neo) pela amizade, incentivo e colaboração, principalmente no início da minha iniciação científica.

Ao Jorge Luiz (Mac Fly), Elder, Marcelo Felisberto e Aginaldo pelo incentivo e apoio.

À Maria Socorro e Wandearley Dias pela amizade e incentivo.

Ao Elton Malta pela amizade, colaboração e incentivo.

Ao amigo Willamys Soares por ser essa pessoa única no mundo: o cara mais bonito (segundo ele e só ele mesmo!), mais prestativo, ... Um amigo de verdade que contribuiu bastante para a realização deste trabalho!

A uma das pessoas mais inteligentes que já conheci: Askery Canabarro. Um amigo de verdade e que contribuiu muito para a realização desse trabalho.

Aos amigos do peito José Leão (Neto), Lidiane Omena, José Henrique (Galo Cego) e Tamirys Macedo por toda amizade e incentivo.

Ao Prof. Marcos Vermelho pela minha formação até o mestrado, e pelos equipamentos emprestados essenciais para a realização desta tese.

À Profª Maria Tereza pela contribuição na minha formação e pelos equipamentos emprestados essenciais para a realização desta tese.

Aos Professores Carlos Jacinto e Marcelo Lyra que contribuíram significativamente para a minha formação e fizeram comentários relevantes a este trabalho.

À todos os professores que tive no IF, especialmente Evandro, Kléber, Crisógono, Heber, Solange, Cressoni, Dílson, ...

Ao Prof. Francisco Fidélis pelo incentivo.

Ao Prof. Eduardo Fonseca pelo incentivo ao migrar da Engenharia de Agrimensura para a Física.

Aos meus amigos da Engenharia de Agrimensura.

Ao Prof. Ítalo de Oliveira pelo incentivo.

Ao Prof. Emerson de Lima pela amizade, incentivo e ajuda ao estruturar o laboratório.

Aos Professores Samuel Albuquerque, Fábio Zanetti e Gustavo Camelo por todo apoio.

Às pilantras Nuccia Carla e Andrea e ao Seu Arlan pelo incentivo.

Aos 77s Rafael Rocha, Uéslen e Wesley.

À Tatiane dos Santos, Ivan de Oliveira e Jaime Frejlich por discussões importantes.

Ao Prof. Jesiel Carvalho pelo cristal utilizado nesta tese e por discussões importantes.

Ao Jefferson Ferreira e Andrew Fabian pelo suporte no laboratório.

Aos Professores Moreno e Arnaldo por todo incentivo.

Ao Marcicley pela ajuda ao montar o laboratório.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação e as pessoas que esqueci de citar.

## RESUMO

Os cristais fotorrefrativos da família das silenitas são de grande interesse tecnológico devido as suas grandes potencialidades de aplicações no desenvolvimento de dispositivos, como em testes interferométricos não-destrutivos. Dentro dessa família, o  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) se destaca por apresentar tempo de resposta relativamente curto e a menor atividade óptica, sendo promissores para aplicação no processamento de imagens em tempo real. Um parâmetro muito importante para aplicação do BTO é o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ). A dispersão desse coeficiente na região visível do espectro tem atraído discussão considerável. Outro parâmetro importante é o coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado ( $\xi$ ). Esse parâmetro surge devido à resposta do meio a aplicação de campo elétrico. Pelo fato do material ser fotocondutor, o meio responde criando um campo elétrico interno, chamado de campo elétrico de blindagem ( $E_{scr}$ ), por conta da não-uniformidade na iluminação e contatos elétricos.

Neste trabalho, propomos um procedimento alternativo para a determinação de  $r_{ef}$  e  $\xi$ . A determinação desses parâmetros é realizada medindo a variação da intensidade transmitida (VIT) do feixe óptico pelo cristal em incidência oblíqua. Esta variação é provocada pelo campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ) e se deve a birrefringência induzida no cristal que muda as componentes do vetor polarização do feixe. A VIT foi modelada levando em conta os coeficientes de transmissão para polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência, que no caso de incidência oblíqua são diferentes, como também a birrefringência induzida no cristal por  $E_{Ap}$ . Foi investigado um cristal BTO e as medidas foram realizadas em 780 nm. O valor obtido para  $r_{ef}$  foi  $5,5 \pm 0,2$  pm/V o que nos permitiu concluir, com suporte de resultados da literatura, que a região a qual  $r_{ef}$  não apresenta dispersão para os cristais BTO é de 510 nm até pelo menos 780 nm. Verificamos que o parâmetro  $\xi$  é dependente da intensidade do feixe incidente, do ângulo de incidência e do ângulo de polarização. Os resultados obtidos indicam a existência de um limiar de intensidade dentro do cristal para a criação de  $E_{scr}$  significativa. Apesar das medidas terem sido realizadas em apenas um cristal e um comprimento de onda, o procedimento proposto pode ser utilizado em outros comprimentos de onda e outros meios onde a birrefringência é induzida por  $E_{Ap}$ .

**Palavras-chaves:** coeficiente eletro-óptico; coeficiente eletro-óptico efetivo; efeito eletro-óptico linear (Pockels); birrefringência; coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado; silenitas;  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO).



## ABSTRACT

The photorefractive crystals of the sillenite family are very interesting because their large potentiality of applications in devices development, such as non-destructive interferometer tests. Among the crystals of this family, the  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) is more attractive because their relatively fast response time and the lower optical activity, being promising for application in real time image processing. The effective electro-optic coefficient ( $r_{eff}$ ) is a parameter too important for application of the BTO. The wavelength dispersion of this coefficient in the visible spectrum has attracted some discussion in the literature. Another important parameter is the electric screening field coefficient ( $\xi$ ). This parameter is necessary to take into account the material response to the applied electric field. Because the material is photoconductor and due to nonuniform illumination, the material responds creating an electric field, called screening field ( $E_{scr}$ ), that is opposed to the applied ones.

In this work, we present an alternative procedure to determine  $r_{ef}$  and  $\xi$  by measuring the optical intensity variation induced by an applied electric field ( $E_{App}$ ), which is transmitted through an undoped photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) crystal in an oblique incidence setup. The transmitted intensity variation (TIV) was modeled taking into account the transmission coefficients for the polarization plane parallel and perpendicular to the incidence plane, as well as the birefringence induced by the  $E_{App}$ , which changes the components of the polarization vector of the light beam. The measurements were performed with infrared radiation at 780 nm and provided  $r_{eff} = 5.5 \pm 0.2 \text{ pm/V}$ . It allowed us to conclude, with support of results from the literature, that the region without dispersion of the electro-optic coefficient in the BTO crystal ranges from 510 nm to at least 780 nm. The results point to the existence of an intensity threshold inside the crystal to create a significant  $E_{scr}$ . The procedure proposed here can be used for distinct wavelengths and seems to be suitable for other electrically induced birefringent materials.

**Keywords:** electro-optic coefficient; effective electro-optic coefficient; linear electro-optic effect (Pockels); birefringence; electric screening field factor; sillenite;  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO).

## Figuras:

FIGURA 1 – FEIXE DE LUZ POLARIZADO LINEARMENTE PROPAGANDO-SE NA DIREÇÃO $\vec{k}$ . OS VETORES CAMPO ELÉTRICO E MAGNÉTICO VARIAM EM INTENSIDADE E SENTIDO, MAS TÊM SUAS DIREÇÕES FIXAS. ....	27
FIGURA 2 – AMPLITUDE ( $\vec{E}_0$ ) DO VETOR POLARIZAÇÃO ( $\vec{E}$ ) DECOMPOSTO NAS COMPONENTES HORIZONTAL ( $E_{0x}$ ) E VERTICAL ( $E_{0y}$ ). ....	28
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESTADO DE POLARIZAÇÃO ELÍPTICO DADO PELA EQUAÇÃO (2.45). O EIXO PRINCIPAL DA ELIPSE FORMA UM ÂNGULO A COM A DIREÇÃO HORIZONTAL ( $E_{0x}$ ). OS CASOS PARTICULARES SÃO POLARIZAÇÃO LINEAR E CIRCULAR. ....	31
FIGURA 4 – ESTADO DE POLARIZAÇÃO RESULTANTE DA COMBINAÇÃO DE DOIS FEIXES POLARIZADOS LINEARMENTE E SE PROPAGANDO NA MESMA DIREÇÃO. O QUE DIFERE ENTRE OS CASOS É A DIFERENÇA DE FASE RELATIVA $\delta$ .....	32
FIGURA 5 – FEIXE INCIDINDO OBLIQUAMENTE NA INTERFACE QUE SEPARA DOIS MEIOS. O MEIO INICIAL TEM ÍNDICE DE REFRAÇÃO $n_1$ E O OUTRO MEIO ÍNDICE $n_2$ . OS VETORES DE ONDA DOS FEIXES INCIDENTE, REFLETIDO E REFRACTADO SÃO $\vec{k}$ , $\vec{k}'$ E $\vec{k}''$ , RESPECTIVAMENTE. ....	34
FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DO CASO TE, ONDE A DIREÇÃO DO VETOR CAMPO ELÉTRICO DO FEIXE INCIDENTE É PERPENDICULAR AO PLANO DE INCIDÊNCIA. ....	36
FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DO CASO TM, ONDE A DIREÇÃO DO VETOR CAMPO MAGNÉTICO É PERPENDICULAR AO PLANO DE INCIDÊNCIA. ....	37
FIGURA 8 – TRANSMITÂNCIA NUMA INTERFACE ONDE O MEIO DE PROPAGAÇÃO INICIAL TEM ÍNDICE DE REFRAÇÃO 1 E O MEIO SEGUINTE 2,5. NO CASO DE POLARIZAÇÃO P, TEM-SE UM ÂNGULO DE INCIDÊNCIA CHAMADO DE ÂNGULO DE BREWSTER ( $\theta_B$ ) PARA O QUAL TODA A LUZ INCIDENTE É TRANSMITIDA. A CURVA PONTILHADA É A RAÇÃO ENTRE $T_s$ E $T_p$ . ....	39
FIGURA 9 – FEIXE SE PROPAGANDO NA DIREÇÃO $\vec{s}$ DE UM CRISTAL BIRREFRINGENTE. A DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO FORMA UM ÂNGULO $\theta$ COM O EIXO ÓPTICO. O PLANO NORMAL À DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO E QUE PASSA PELA ORIGEM FORMA A ELIPSE SOMBREADA NA FIGURA. ....	42
FIGURA 10 – ILUSTRAÇÃO DA ATIVIDADE ÓPTICA. UM FEIXE DE LUZ POLARIZADO LINEARMENTE INCIDE DA ESQUERDA PARA A DIREITA NUM MEIO QUE APRESENTA ATIVIDADE ÓPTICA. À MEDIDA QUE O FEIXE SE PROPAGA DENTRO DO CRISTAL SUA DIREÇÃO DE POLARIZAÇÃO É ALTERADA. ....	45
FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO DA PLACA BIRREFRINGENTE. O EIXO LENTO FORMA UM ÂNGULO $\psi$ COM A DIREÇÃO X FIXA NO SISTEMA DE REFERÊNCIA DO LABORATÓRIO. ....	49
FIGURA 12 – NÍVEIS DE ENERGIA PARA UM SÓLIDO. ....	52
FIGURA 13 – DIAGRAMA DE ENERGIA DE UM SÓLIDO ISOLANTE. ....	53
FIGURA 14 – DIAGRAMA DE ENERGIA DE UM CONDUTOR DE ELETRICIDADE. ....	54

FIGURA 15 – DIAGRAMA DE ENERGIA DE UM SEMICONDUTOR. A LARGURA DA BANDA PROIBIDA ENTRE A BANDA DE VALÊNCIA E A BANDA DE CONDUÇÃO É PEQUENA O SUFICIENTE PARA QUE ELÉTRONS POSSAM SER EXCITADOS TERMICAMENTE DA BANDA DE VALÊNCIA PARA A BANDA DE CONDUÇÃO.....	55
FIGURA 16 – DIAGRAMA DE ENERGIA PARA SEMICONDUTORES DO TIPO A) N; B) P. ....	56
FIGURA 17 – NÍVEIS DE ENERGIA NA BANDA PROIBIDA DO CRISTAL BTO.....	57
FIGURA 18 – SIMULAÇÃO DE UM FEIXE ÓPTICO COM PERFIL GAUSSIANO (CURVA I) INCIDINDO NUM CRISTAL FOTORREFRATIVO. A CONDUTIVIDADE ELÉTRICA DO MEIO ( $\sigma$ ) SEGUE A DISTRIBUIÇÃO DE INTENSIDADE. ISTO IMPLICA NUM CAMPO ELÉTRICO NÃO-UNIFORME.....	59
FIGURA 19 – APARATO EXPERIMENTAL PROPOSTO POR HENRY E COLABORADORES PARA DETERMINAR O COEFICIENTE ELETRO-ÓPTICO.....	61
FIGURA 20 – COEFICIENTE ELETRO-ÓPTICO EFETIVO EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDA. ....	64
FIGURA 21 – DE INTERESSE NESTA FIGURA O COEFICIENTE ELETRO-ÓPTICO QUE É REPRESENTADO PELA LINDA CHEIA COM CÍRCULOS CHEIOS. ....	65
FIGURA 22 – COEFICIENTE ELETRO-ÓPTICO EFETIVO EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDA PARA O CRISTAL BTO NOMINALMENTE PURO E DOPADO. DE INTERESSE ESPECIAL NESTA TESE É O BTO NOMINALMENTE PURO. ....	65
FIGURA 23 – REPRESENTAÇÃO DE UM MODULADOR DE INTENSIDADE ÓPTICA. UM FEIXE DE LUZ NÃO POLARIZADO INCIDE EM UM POLARIZADOR LINEAR. LOGO APÓS O FEIXE POLARIZADO LINEARMENTE ATRAVESSA O CRISTAL SOB AÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO CONTROLADO. COMO O CRISTAL SE TORNA BIRREFRINGENTE PELA AÇÃO DO CAMPO, O ESTADO DE POLARIZAÇÃO DO FEIXE É ALTERADO. O FEIXE RESULTANTE PASSA POR UM SEGUNDO POLARIZADOR QUE DEPENDENDO DO VALOR DO CAMPO ELÉTRICO APLICADO PODE ABSORVER TOTALMENTE O FEIXE. ....	67
FIGURA 24 – FEIXE POLARIZADO LINEARMENTE INCIDINDO OBLIQUAMENTE NUM CRISTAL FOTORREFRATIVO SUBMETIDO A CAMPO ELÉTRICO APLICADO. OS ÂNGULOS SÃO MEDIDOS COM RELAÇÃO À RETA NORMAL À INTERFACE. OS ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA E REFRAÇÃO NA INTERFACE AR-CRISTAL SÃO $\theta_i$ E $\theta_r$ , RESPECTIVAMENTE. JÁ NA INTERFACE CRISTAL-AR, OS ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA E REFRAÇÃO SÃO $\theta_r$ E $\theta_i$ , RESPECTIVAMENTE. ....	69
FIGURA 25 – FEIXE INCIDENTE NO CRISTAL POLARIZADO LINEARMENTE. ESSE FEIXE FORMA UM ÂNGULO $\theta_p$ COM A DIREÇÃO HORIZONTAL QUE É PARALELA AO PLANO DE INCIDÊNCIA. ....	69
FIGURA 26 – CRISTAL DIVIDO EM N CÉLULAS PARA COMPUTAR O EFEITO DA ATIVIDADE ÓPTICA E DA BIRREFRINGÊNCIA INDUZIDA POR CAMPO ELÉTRICO APLICADO. ....	73
FIGURA 27 – DEPENDÊNCIA DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO COM O COMPRIMENTO DE ONDA. AS LINHAS CHEIA E TRACEJADA REPRESENTAM AS EQUAÇÕES (4.2) E (4.3), RESPECTIVAMENTE. ....	79
FIGURA 28 – REPRESENTAÇÃO DO EXPERIMENTO UTILIZADO NAS MEDIDAS DA VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO PELA APLICAÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO. ....	81

FIGURA 29 – FEIXE INCIDINDO OBLIQUAMENTE NO CRISTAL. EM TODAS AS INTERFACES OCORRE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO. NA INTERFACE CRISTAL-AR, TEM-SE QUE O FEIXE PRINCIPAL APRESENTA UM DESVIO COM RELAÇÃO AOS QUE SURGEM DEVIDO ÀS REFLEXÕES MÚLTIPLAS NAS FACES DO CRISTAL. ISSO PERMITE QUE SEJA MEDIDA APENAS A INTENSIDADE DO FEIXE PRINCIPAL COM O FOTODETECTOR.....	82
FIGURA 30 – REPRESENTAÇÃO DA DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO APLICADA À AMOSTRA PARA REALIZAR AS MEDIDAS DE $VIT$ . A MEDIDA É INICIADA COM $V_{Ap} = 0$ . PASSADO O INTERVALO DE TEMPO $T_{DES,0}$ , A FONTE DE TENSÃO ELÉTRICA É LIGADA APLICANDO UMA DIFERENÇA DE POTENCIAL DE $X$ VOLTS A AMOSTRA. APÓS O INTERVALO DE TEMPO $T_{LIG}$ , A FONTE DE TENSÃO É DESLIGADA E PERMANECE ASSIM ATÉ O FINAL DA MEDIDA...	83
FIGURA 31 – ORIENTAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO APLICADO COM RELAÇÃO ÀS FACES DO CRISTAL E DOS EIXOS CRISTALOGRÁFICOS ( $X_1, X_2$ E $X_3$ ).....	86
FIGURA 32 – REPRESENTAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO APLICADO E DOS EIXOS CRISTALOGRÁFICOS.....	87
FIGURA 33 – SISTEMA DE COORDENADAS ROTACIONADO DE $45^\circ$ NO SENTIDO HORÁRIO EM TORNO DE $X_3$ . CONFIGURAÇÃO VISTA PELA FACE $(\bar{1}\bar{1}0)$ . ....	87
FIGURA 34 – SISTEMA DE COORDENADAS ROTACIONADO DE $45^\circ$ NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO EM TORNO DE $x'_2$ . CONFIGURAÇÃO VISTA PELA FACE $(\bar{1}\bar{1}0)$ QUE É OPOSTA À FACE $(110)$ . ....	88
FIGURA 35 – REPRESENTAÇÃO DOS EIXOS RÁPIDO E LENTO DO CRISTAL QUE SE TORNA BIRREFRINGENTE SOB AÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO APLICADO. ESSES EIXOS FORMAM $45^\circ$ COM A DIREÇÃO HORIZONTAL QUE COINCIDE COM A DIREÇÃO $[\bar{1}\bar{1}0]$ . ....	90
FIGURA 36 – VARIAÇÃO DO ATRASO DE FASE POR UNIDADE DE COMPRIMENTO COM O ÂNGULO DE INCIDÊNCIA. UTILIZOU-SE OS SEGUINTE PARÂMETROS $E_{Ap} = 6,0$ kV/cm , $N_{BTO} = 2,52$ E $R_{EF} = 5,5$ pm/v. ....	92
FIGURA 37 – COMPORTAMENTO DA INTENSIDADE ÓPTICA TRANSMITIDA PELO CRISTAL. NO INSTANTE $T_{LIG}$ A FONTE DE TENSÃO FOI LIGADA APLICANDO UMA DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO DE $5000$ V, E, CONSEQUENTEMENTE, UM CAMPO ELÉTRICO DE APROXIMADAMENTE $6,0$ kV/cm. A FONTE FOI DESLIGADA NO INSTANTE $T_{DES}$ FICANDO A AMOSTRA SUJEITA A UM CAMPO ELÉTRICO APLICADO NULO.....	93
FIGURA 38 – VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO PARA $\theta_1 = 128^\circ$ E $E_{Ap} \sim 6,0$ kV/cm. NESTE CASO, $VIT = 0$ . ....	94
FIGURA 39 – VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO PARA $\theta_1 = 100^\circ$ E $E_{Ap} \sim 6,0$ kV/cm. NESTE CASO, $VIT$ É POSITIVA. ....	94
FIGURA 40 – DEPENDÊNCIA DA VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO COM O ÂNGULO DE INCIDÊNCIA. ....	94
FIGURA 41 – VARIAÇÃO DA INTENSIDADE TRANSMITIDA EM FUNÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO APLICADO. OS PONTOS REPRESENTAM OS DADOS EXPERIMENTAIS E A CURVA MOSTRADA É A OBTIDA AJUSTANDO A TEORIA AO EXPERIMENTO APLICANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	95

FIGURA 42 – CURVA TEÓRICA DA VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO EM FUNÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO APLICADO, EXPLORANDO UM INTERVALO GRANDE DESTES CAMPO. ....	97
FIGURA 43 – VARIAÇÃO DA INTENSIDADE TRANSMITIDA EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE POLARIZAÇÃO. OS CÍRCULOS E QUADRADOS REPRESENTAM OS DADOS EXPERIMENTAIS PARA $E_{Ap}$ IGUAL A 6,0 E 3,6 KV/CM, RESPECTIVAMENTE. AS CURVAS SÃO AS PREDIÇÕES TEÓRICAS OBTIDAS UTILIZANDO O VALOR DETERMINADO DE $R_{EF}$ (5,5 PM/V). ....	98
FIGURA 44 – DEPENDÊNCIA DA VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO COM O CAMPO ELÉTRICO APLICADO E A DIREÇÃO DE POLARIZAÇÃO DO FEIXE INCIDENTE. NESTA SIMULAÇÃO, TIVEMOS $\theta_1 = 34,5^\circ$ E $R_{EF} = 5,5$ PM/V.....	99
FIGURA 45 – DEPENDÊNCIA DE VIT COM O ÂNGULO DE INCIDÊNCIA E O ÂNGULO DE POLARIZAÇÃO. NESTA SIMULAÇÃO, TIVEMOS $E_{Ap} = 6,0$ KV/CM E $R_{EF} = 5,5$ PM/V.....	100
FIGURA 46 – COMPORTAMENTO DA INTENSIDADE TRANSMITIDA EM FUNÇÃO DO TEMPO. NO INSTANTE $T_{LIG}$ A FONTE DE TENSÃO FOI LIGADA APLICANDO UM CAMPO ELÉTRICO DE APROXIMADAMENTE 6,0 KV/CM.....	101
FIGURA 47-A – FEIXE GAUSSIANO INCIDINDO NUM CRISTAL FOTOREFRATIVO. NAS REGIÕES DE MAIOR INTENSIDADE, A DENSIDADE DE ELÉTRONS NA BANDA DE CONDUÇÃO É MAIOR. ....	102
FIGURA 48 – INTENSIDADE DO FEIXE TRANSMITIDO NA INTERFACE AR-CRISTAL EM FUNÇÃO DOS ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA E POLARIZAÇÃO. ....	103
FIGURA 49 – VARIAÇÃO DA INTENSIDADE TRANSMITIDA EM FUNÇÃO DA INTENSIDADE DO FEIXE ÓPTICO INCIDENTE. OS CÍRCULOS FECHADOS REPRESENTAM OS PONTOS EXPERIMENTAIS. A LINHA SÓLIDA É O VALOR MÉDIO DESSES PONTOS. ....	104
FIGURA 50 – CONFIGURAÇÃO DE RODA DE “LEDS” UTILIZADA PARA MEDIR FOTOCONDUTIVIDADE. PRETENDEMOS UTILIZAR CONFIGURAÇÃO SEMELHANTE PARA DESENVOLVER DISPOSITIVO QUE PERMITA DETERMINAR A RELAÇÃO DE DISPERSÃO DE $R_{EF}$ .....	106

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO**

***“Medida do coeficiente eletro-óptico efetivo e determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado em cristal fotorrefrativo Bi<sub>12</sub>TiO<sub>20</sub> nominalmente puro utilizando uma configuração de incidência oblíqua: modelo e experimento”.***

**por**

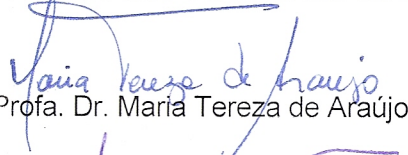
**André de Lima Moura**

A Banca Examinadora composta pelos professores Pedro Valentim dos Santos (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Maria Tereza de Araújo, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Marcos Vinícius Dias Vermelho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Jesiel Freitas Carvalho, do Departamento Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás e Ivan de Oliveira, da Faculdade de Tecnologia da Universidade Estadual de Campinas consideram o candidato aprovado com grau “ A ”.

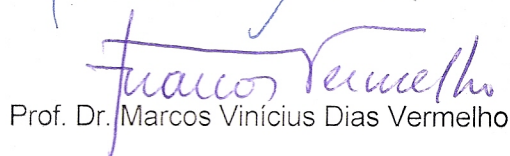
Maceió, 1º de março de 2013



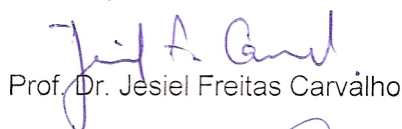
Prof. Dr. Pedro Valentim dos Santos



Profa. Dr. Maria Tereza de Araújo



Prof. Dr. Marcos Vinícius Dias Vermelho



Prof. Dr. Jesiel Freitas Carvalho



Prof. Dr. Ivan de Oliveira

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Ondas eletromagnéticas</b> .....	<b>22</b>
2.1.1	Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas .....	22
2.1.2	Vetor de Poynting.....	25
2.1.3	Cristais anisotrópicos .....	26
2.1.4	Polarização das ondas eletromagnéticas .....	27
<b>2.2</b>	<b>Condições de contorno</b> .....	<b>33</b>
2.2.1	Coefficientes de transmissão.....	34
<b>2.3</b>	<b>Óptica não-linear</b> .....	<b>42</b>
<b>2.4</b>	<b>Elipsoide de índices</b> .....	<b>43</b>
<b>2.5</b>	<b>Efeito eletro-óptico linear (Pockels)</b> .....	<b>46</b>
<b>2.6</b>	<b>Atividade óptica</b> .....	<b>47</b>
<b>2.7</b>	<b>Efeito eletro-giratório</b> .....	<b>48</b>
<b>2.8</b>	<b>Efeito eletro-óptico secundário</b> .....	<b>49</b>
<b>2.9</b>	<b>Formalismo de Jones para a polarização</b> .....	<b>50</b>
<b>2.10</b>	<b>Condução de eletricidade nos sólidos</b> .....	<b>54</b>
2.10.1	Isolantes .....	55
2.10.2	Condutores .....	56
2.10.3	Semicondutores .....	57
2.10.4	Cristais fotorrefrativos .....	59
<b>2.11</b>	<b>Efeito fotocromico</b> .....	<b>63</b>
<b>2.12</b>	<b>Técnicas para determinação do coeficiente eletro-óptico efetivo e do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado das silenitas</b> .....	<b>63</b>

2.13	Revisão bibliográfica relacionada à medida do coeficiente eletro-óptico do BTO .....	67
3	MODELO .....	71
3.1	Introdução .....	71
3.2	Desenvolvimento do modelo.....	72
4	MATERIAIS E MÉTODOS .....	81
4.1	O cristal.....	81
4.2	Parâmetros .....	81
4.3	Arranjo experimental e procedimento.....	83
5	DISPERSÃO DO COEFICIENTE ELETRO-ÓPTICO NO INFRAVERMELHO EM CRISTAIS BTO.....	89
5.1	Orientação dos eixos rápido e lento do cristal .....	89
5.2	Determinação do coeficiente eletro-óptico efetivo.....	96
5.3	Determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado .....	104
6	Conclusões e perspectivas.....	109
	Referências .....	111
	Apêndice A – Determinação da matriz de Jones – atividade óptica e birrefringência.....	114
	Anexo.....	119



# 1 Introdução

Os cristais fotorrefrativos (CF) são fotocondutores e eletro-ópticos. A primeira dessas propriedades implica que o cristal tem a sua condutividade elétrica aumentada com a incidência de luz de comprimento de onda adequado. Já a segunda propriedade está relacionada à mudança no índice de refração linear do cristal com a presença de um campo elétrico. Esses cristais são atraentes do ponto de vista tecnológico por conta do grande número de aplicações provenientes da combinação da fotocondutividade e do efeito fotorrefrativo. Dentre estas, destacam-se as baseadas na holografia que permite gravar e reconstruir frentes de onda no material. Além de ser utilizada para gravar e reconstituir imagens em três dimensões, a holografia pode ser utilizada para processar e armazenar informação [1]. Desta forma, os CF podem ser utilizados para processar informação em sistemas de arquitetura totalmente óptica.

Dentre os cristais fotorrefrativos, os da família das silenitas têm sido estudados extensivamente [2-16]. A família das silenitas consiste dos cristais  $\text{Bi}_{12}\text{MO}_{20}$ , onde os principais são para  $M = \text{Ge}, \text{Si} \text{ e } \text{Ti}$ . Esses são atrativos por apresentarem tempo de resposta relativamente curto [11, 12] e boa sensibilidade para excitação com fótons de energia baixa [5]. São isotrópicos com relação ao índice de refração e, por conta do efeito eletro-óptico linear, se tornam birrefringentes quando submetidos a campo elétrico [17].

Um dos parâmetros mais importantes para aplicação dos cristais fotorrefrativos é a magnitude dos elementos do tensor eletro-óptico. Como será discutido mais adiante, em geral é determinado o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ). Entre os métodos mais utilizados para a determinação de  $r_{ef}$  das silenitas, está o proposto por Henry e colaboradores [18]. A configuração experimental consiste de uma fonte de luz, um polarizador, o cristal sob ação de campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ), um analisador (segundo polarizador) e o detector de radiação. O procedimento experimental consiste em rotacionar o analisador para determinar as intensidades máxima e mínima transmitida através do cristal que se torna birrefringente pela ação de  $E_{Ap}$ ; repetindo esses passos para uma direção de polarização de entrada rotacionada de  $45^\circ$ . Neste experimento, o feixe incidente é perpendicular às faces do cristal, o que pode introduzir erros nas medidas devido à detecção dos múltiplos feixes refletidos internamente no cristal [19, 20]. Outra fonte de erro é a criação do chamado campo elétrico de blindagem ( $E_{scr}$ ) (do inglês "electric screening field"). A origem desse campo está no fato

de que quando um material fotorrefrativo é sujeito a um campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ) responde criando um campo elétrico interno chamado de campo de blindagem devido à iluminação não-homogênea do cristal e resistência de contato que resultam em transporte de carga não-homogêneo [20, 21]. Comparando modelos teóricos com resultados experimentais obtidos com  $E_{Ap}$ , tem-se apresentado a necessidade de introduzir um fator adimensional ( $\xi$ ) multiplicando  $E_{Ap}$  para levar em conta  $E_{scr}$  [22-24]. O parâmetro  $\xi$  varia de 0 a 1 e depende da distribuição da intensidade óptica, do comprimento de onda e de  $E_{Ap}$  [19, 21]. Conforme ref. [20],  $\xi$  pode ser determinado utilizando a configuração experimental de Henry. Porém, sendo  $\xi$  sensível aos parâmetros experimentais, aplicar este parâmetro em experimentos de gravação holográfica realizados em incidência oblíqua pode ser uma fonte de erro. Os mesmos problemas podem surgir no método proposto por Grunnet-Jepsen e colaboradores [23] onde é utilizado campo elétrico alternado na forma de onda quadrada para eliminar  $E_{scr}$  na medida de  $r_{ef}$ , e no método proposto por Papazoglou e colaboradores onde a determinação de  $r_{ef}$  é realizada encontrando o valor de  $E_{Ap}$  para o qual a elipticidade do feixe após passar pelo cristal é nula, já que da mesma forma que no experimento de Henry a direção de propagação do feixe é normal às faces do cristal.

Nesta tese propomos um procedimento simples para a determinação de  $r_{ef}$  e  $\xi$  em materiais nos quais a birrefringência é induzida por  $E_{Ap}$ . A configuração experimental consiste de uma fonte de radiação, o cristal sob  $E_{Ap}$ , um fotodetector, e um polarizador se a fonte de luz não for polarizada. Esse procedimento se baseia na mudança do estado de polarização do feixe pelo cristal que se torna birrefringente sob ação de  $E_{Ap}$  e a diferença nos coeficientes de transmissão para polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência. As medidas são realizadas em incidência oblíqua, o que apresenta algumas vantagens comparadas com os métodos de incidência normal discutidos acima. Estudos relacionados com a mudança na transmissão e reflexão em incidência oblíqua por conta do efeito eletro-óptico já foi realizada em materiais chirais [25] e metamateriais [26]. Em nosso ponto de vista, o procedimento que propomos apresenta algumas vantagens comparado com os comentados acima. Essas são a facilidade de eliminar do detector os feixes refletidos internamente no cristal, e o fato de que a determinação de  $\xi$  pode ser realizada no mesmo aparato que é realizada a gravação holográfica. Além disso, no experimento não é necessário utilizar analisador, o que simplifica a configuração experimental, e a direção de polarização do feixe incidente pode ser fixa. As desvantagens estão nos casos em que o material apresenta índice de refração linear e coeficiente eletro-óptico baixos, pois a variação da intensidade do feixe transmitido induzida por  $E_{Ap}$

pode ser muito pequena para ser detectada. Além do mais, as medidas podem ser complicadas em cristais com menor simetria que os do grupo 23, onde podem existir mais elementos independentes do tensor eletro-óptico. Nesses casos, o método interferométrico apresentado em [27] parece mais adequado.

O procedimento proposto foi aplicado ao cristal BTO e as medidas realizadas em 780 nm porque a dispersão de  $r_{ef}$  desses cristais tem sido fonte de discussão na literatura, e é potencialmente interessante que esses cristais operem na região do infravermelho próximo, onde lasers de diodo são disponíveis comercialmente [16]. Em 1997 Papazoglou e colaboradores [28] mostraram experimentalmente que o coeficiente eletro-óptico do BTO não apresenta dispersão na região do espectro entre 575 e 700 nm, com um valor médio de aproximadamente 5,5 pm/V. Já em 2009, Efremidis e colaboradores [21] mostraram experimentalmente que  $r_{ef}$  do BTO apresenta dispersão na região entre 500 nm e 800 nm, com  $r_{ef}$  variando de 5,75 pm/V a 3,0 pm/V no intervalo de 500 nm a 800 nm. Observa-se então discrepâncias entre os resultados de Efremidis e Papazoglou, pois Efremidis mostrou que  $r_{ef}$  apresenta dispersão na região do espectro estudada por Papazoglou. Resultados recentes de 2011, obtidos por de Oliveira e colaboradores [29], mostram que a região entre 510 nm e 650 nm não apresenta dispersão, e  $r_{ef}$  possui um valor médio de aproximadamente 5,4 pm/V. Obtivemos  $r_{ef} = 5,5 \pm 0,2 \text{ pmV}^{-1}$  em 780 nm corroborando com os resultados de Papazoglou e de Oliveira. Pudemos concluir que a região sem dispersão do coeficiente eletro-óptico no BTO vai de 510 nm até pelo menos 780 nm. Com relação ao parâmetro  $\xi$ , observamos que é fortemente dependente das configurações experimentais. Depende da intensidade do feixe incidente, do ângulo de incidência e da direção de polarização. Além disso, verificamos a existência de um limiar de intensidade óptica dentro do cristal para a criação do campo elétrico de blindagem.

Para a apresentação desta tese, a mesma foi dividida em quatro partes. Na parte I é feita uma breve introdução teórica ao assunto e são discutidos os efeitos ópticos relevantes, o formalismo de Jones para a polarização e no final tem-se a revisão bibliográfica. Na parte II é desenvolvido o modelo teórico proposto. Na parte III apresentamos o cristal utilizado, os parâmetros para o modelo e os procedimentos experimentais. Na parte IV são apresentados e discutidos os resultados experimentais e determinados parâmetros importantes com o modelo desenvolvido na parte II. Finalizando, são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas de trabalhos futuros.

# **Parte I**

## **Fundamentação teórica**

## 2 Fundamentação teórica

A óptica é um dos ramos da Física que está mais presente em nosso cotidiano. Através da luz é que temos a percepção de objetos através dos olhos. Usualmente estamos em contato com os fenômenos lineares, isto é, aqueles em que a resposta do meio depende de forma linear do campo elétrico associado à radiação eletromagnética. Porém, os fenômenos não-lineares estão presentes de forma indissociadas em nossas vidas através, por exemplo, dos sistemas de telecomunicações. Esses sistemas utilizam luz para transmissão de informação utilizando fibras ópticas como guias de luz. Para um funcionamento ótimo desses sistemas, uma série de dispositivos óptico-eletrônicos, ou seja, que operam baseado em óptica e eletrônica é utilizada. Em geral, o funcionamento óptico desses dispositivos está baseado em fenômenos não-lineares. Por exemplo, os chaveadores ópticos cujo funcionamento está baseado nas propriedades não-lineares de segunda ordem do meio ativo. Outra aplicação muito importante e presente em nossa vida é nos sistemas de armazenamento de dados e leitura. Os sistemas de CDs, DVDs, blu-ray utilizam luz para gravar e ler informações. A capacidade de armazenamento de dados nesses sistemas cresce na ordem apresentada. Apesar do blu-ray possuir uma capacidade muito maior que o DVD e o CD, está no limite para armazenar dados porque os dados são gravados em no máximo duas camadas do material de gravação. Pode-se dizer que a informação é gravada em duas dimensões. A capacidade desses sistemas é limitada pelo tamanho físico do material e a natureza ondulatória da luz que limita o tamanho do ponto gravado [1]. Este ponto é pelo menos metade do comprimento de onda da luz utilizada para produzi-lo. A holografia parece promissora para substituir essas tecnologias porque a informação pode ser gravada no meio utilizando dois feixes: um de bombeamento e o outro de prova. Mudando o ângulo de incidência e o comprimento de onda do feixe de prova, hologramas podem ser gravados sobre os outros sem interferência.

Diante das aplicações acima, os cristais fotorrefrativos são de grande interesse porque possibilitam o desenvolvimento de dispositivos fotônicos e a gravação holográfica de informação. Dentre os fotorrefrativos mais utilizados está o niobato de lítio ( $\text{LiNbO}_3$ ) [30] que é aplicado em conversores de frequência, modulação de luz, holografia, etc. [31]. Nesta tese estamos interessados no titanato de bismuto ( $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  - BTO). Esses cristais apresentam tempo de resposta relativamente curto [11, 12], boa sensibilidade espectral na região visível do espectro e infravermelho próximo [11], e coeficiente eletro-óptico relativamente alto [5]. Por isso, são promissores para aplicação no

processamento de informação [32].

Neste capítulo serão abordados os fenômenos lineares de refração e reflexão. Faremos uma breve introdução à óptica não-linear, em especial a modulação do índice de refração linear pela aplicação de campo elétrico. Será tratada a propagação de luz em meios birrefringentes, onde o índice de refração depende tanto da direção de propagação do feixe como também da direção de polarização. São discutidos os efeitos eletro-giratório, eletro-óptico secundário e apresentado o formalismo de Jones para a polarização. Além disso, são discutidas as diferenças entre as propriedades elétricas dos isolantes, condutores e semicondutores. No final falaremos do cristal BTO e é dada uma breve revisão bibliográfica acerca das principais técnicas de medida do coeficiente eletro-óptico das silenitas, e dos valores desse coeficiente para o BTO.

## 2.1 Ondas eletromagnéticas

### 2.1.1 Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

Todos os fenômenos eletromagnéticos em escala macroscópica podem ser compreendidos através das equações de Maxwell. Esse conjunto de equações engloba a lei de Gauss, o divergente do campo magnético ser sempre nulo que implica na não existência de monopolo magnético, a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell, onde a contribuição de Maxwell foi essencial para compreendermos a luz como onda eletromagnética. Na forma diferencial, as equações de Maxwell podem ser escritas como [33]

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

onde  $\vec{D}$  é o vetor deslocamento elétrico,  $\rho_f$  a densidade de carga elétrica livre,  $\vec{B}$  o campo magnético,  $\vec{E}$  o campo elétrico total,  $\vec{H}$  o vetor indução magnética e  $\vec{J}_f$  a densidade de corrente elétrica livre. O vetor deslocamento elétrico está relacionado ao campo elétrico total através da relação

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{P}$  é a polarização do meio. No caso de campo elétrico de intensidade baixa, a relação entre a polarização e o campo elétrico é linear e dada por

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (2.3)$$

Nesta equação  $\chi$  é uma constante adimensional chamada de susceptibilidade elétrica linear e dá a resposta linear do meio à radiação interagente. Neste caso, a relação entre o deslocamento elétrico e o campo elétrico é dada por

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.4)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$  é a permissividade do meio. Já a relação entre o campo magnético e o vetor indução magnética é

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (2.5)$$

onde  $\vec{M}$  é o vetor magnetização que, no caso linear, pode ser expressa como  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . Neste caso, temos

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \quad (2.6)$$

com  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$  sendo a permeabilidade do meio.

Considerando que não existem cargas e nem corrente elétrica livres no meio, assumindo que a sua resposta é linear aos campos elétrico e magnético e que o meio é homogêneo, as equações de Maxwell podem ser reescritas como

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ (ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. . \quad (2.7)$$

Tomando o rotacional de (iii) em (2.7) e usando o fato de que a ordem de diferenciação com relação às coordenadas espaciais independem da temporal, segue

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (iv) de (2.7) na equação (2.8), temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Utilizando a identidade matemática  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  para  $\vec{E}$  e utilizando a equação (i) de (2.7), temos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Esta é a equação da onda para o campo elétrico. Podemos obter equação semelhante para o campo magnético tomando o rotacional da equação (iv) de (2.7). O resultado é dado na equação abaixo.

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

Estas são equações diferenciais parciais de segunda ordem. Foi através dessas equações que Maxwell chegou à conclusão de que a luz tem comportamento de onda – ondas eletromagnéticas. A velocidade de propagação é  $v = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ . No vácuo  $v = c \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ . A solução mais simples destas equações é a solução do tipo onda plana, onde se tem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.12)$$

e

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.13)$$

Entende-se que a parte real é quem representa os respectivos campos. Como exemplo, no caso do campo elétrico, tem-se  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Nestas equações,  $\vec{r}$  é o vetor posição,  $\omega$  a frequência angular,  $t$  o tempo e  $\vec{k}$  o vetor de onda que aponta direção de propagação da onda e tem módulo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}, \quad (2.14)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $n = c/v$  o índice de refração do meio que a onda está se



propagando.  $k$  é chamado de número de onda.

Substituindo as equações (2.12) e (2.13) em (2.7), segue

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{k} \times \vec{B} = -\mu \varepsilon \omega \vec{E} \end{cases} \quad (2.15)$$

Essas relações implicam que os vetores  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são mutuamente perpendiculares. Além disso, utilizando a equação (2.14) temos que os campos elétrico e magnético estão relacionados por

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (2.16)$$

$\hat{k}$  é um vetor unitário na direção de propagação da onda.

## 2.1.2 Vetor de Poynting

A densidade de energia, ou seja, a energia por unidade de volume armazenada nos campos elétrico e magnético é

$$u = \frac{1}{2} \left( \varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right). \quad (2.17)$$

Usando o fato de que o campo magnético está relacionado ao elétrico pela equação (2.16) e a representação real da equação (2.12), temos que a densidade de energia é dada por

$$u = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (2.18)$$

O vetor de Poynting ( $\vec{S}$ ) é a energia por unidade de tempo por unidade de área transportada pelo campo eletromagnético [33]. Em termos dos campos elétrico e magnético,  $\vec{S}$  é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (2.19)$$

Substituindo na equação acima a equação (2.16) e a forma real da equação (2.12), temos

$$\vec{S} = v \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{k}. \quad (2.20)$$

A intensidade ( $I$ ), que é a potência média por unidade de área transportada pela onda

eletromagnética, é a média temporal do módulo do vetor de Poynting ( $\langle S \rangle$ ). Da equação (2.20), segue

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} v \varepsilon E_0^2 = \frac{n}{2Z_0} E_0^2, \quad (2.21)$$

onde  $n$  é o índice de refração do meio (definido pela razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio) e  $Z_0 = 377 \Omega$  a impedância do espaço livre.

### 2.1.3 Cristais anisotrópicos

No caso de materiais isotrópicos com relação às propriedades ópticas, ou seja, materiais em que as propriedades ópticas independem da direção, a relação entre a polarização e o campo elétrico é linear.  $\chi$  na equação (2.3) é apenas uma constante de proporcionalidade. Isto implica que a polarização é sempre paralela ao campo elétrico. Já no caso de materiais anisotrópicos, isto vale apenas para algumas direções particulares [34]. Nesses materiais, a polarização induzida depende da direção do campo elétrico aplicado. Ao invés da equação (2.3), para esses materiais a relação entre o vetor polarização e o campo elétrico é

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^{(1)} E_j, \quad (2.22)$$

onde  $\chi_{ij}^{(1)}$  são os elementos do tensor susceptibilidade linear  $\vec{\chi}^{(1)}$ . Os índices 1, 2 e 3 representam os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. De acordo com esta equação, as relações entre as componentes do vetor polarização e as componentes do vetor campo elétrico são

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z) \\ P_y = \varepsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \\ P_z = \varepsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \end{cases} \quad (2.23)$$

Desta forma, pode-se ver que um campo elétrico aplicado na direção  $x$ , por exemplo, pode induzir polarização nas direções  $y$  e  $z$ . Os valores dos elementos  $\chi_{ij}$  dependem da escolha do sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  com relação à estrutura do cristal. É sempre possível escolher um sistema de coordenadas onde apenas os elementos da diagonal principal ( $\chi_{ij}$ ) do tensor susceptibilidade linear sejam diferentes de zero [35]. Nesta situação, as relações entre as componentes do vetor polarização

e as componentes do vetor campo elétrico são

$$\begin{cases} P_x = \varepsilon_0 \chi_{11} E_x \\ P_y = \varepsilon_0 \chi_{22} E_y \\ P_z = \varepsilon_0 \chi_{33} E_z \end{cases} \quad (2.24)$$

Essas direções que simplificam as relações entre  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  são chamadas de eixos dielétricos principais do cristal. A resposta do material pode ser dada pelo tensor permissividade elétrica do material ou permissividade dielétrica  $\varepsilon_{ij}$  [34], que é definido por

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j \quad (2.25)$$

Ou

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z \\ D_y = \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z \\ D_z = \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z \end{cases} \quad (2.26)$$

Da equação (2.2), temos que a relação entre os elementos do tensor permissividade elétrica e susceptibilidade elétrica é

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{ij}) \quad (2.27)$$

Pode-se mostrar que a conservação da energia eletromagnética implica que este tensor é hermitiano, ou seja,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$ . Desta forma, apenas seis dos nove elementos do tensor permissividade dielétrica são independentes [34].

## 2.1.4 Polarização das ondas eletromagnéticas

### 2.1.4.1 Polarização linear

Considere uma onda eletromagnética cujos campos elétrico e magnético são representados pelas equações (2.12) e (2.13). Nos casos em que os vetores amplitudes  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são constantes e reais, a onda é dita polarizada linearmente ou plano-polarizada [36]. Denominaremos a direção do vetor campo elétrico como a direção de polarização da onda. A Figura 1 ilustra o caso, onde se pode observar que tanto  $\vec{E}$  quanto  $\vec{B}$  variam em intensidade e sentido, mas possuem direções constantes. Nesse caso específico em que o vetor campo elétrico tem direção horizontal ( $x$ ), esse

vetor pode ser escrito, na representação real, como

$$\vec{E}(z,t) = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t + \delta_0), \quad (2.28)$$

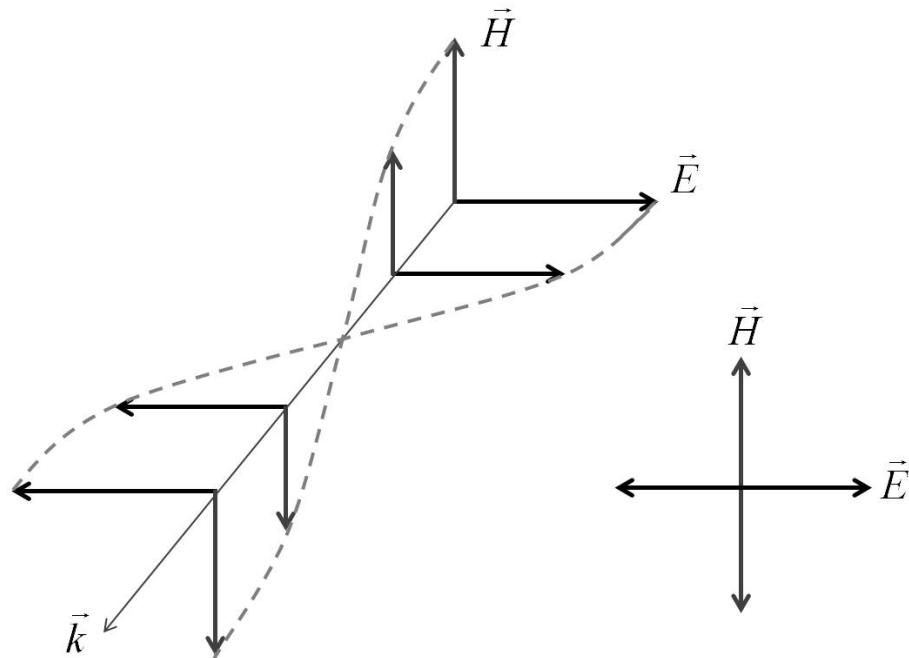
onde  $\hat{i}$  é um vetor unitário na direção  $x$  e  $\delta_0$  é uma constante de fase. A direção do vetor polarização é a mesma do vetor campo elétrico, ou seja,  $x$ . Numa situação geral para polarização linear, podemos decompor o vetor polarização em duas componentes mutuamente perpendiculares. Nesse caso, o vetor campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E}(z,t) = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t + \delta_0), \quad (2.29)$$

onde  $\hat{j}$  é um vetor unitário na direção  $y$ , enquanto  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são as componentes do vetor campo elétrico nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Dessa forma, de acordo com a Figura 2, o ângulo que a direção de polarização forma com o eixo  $x$  é

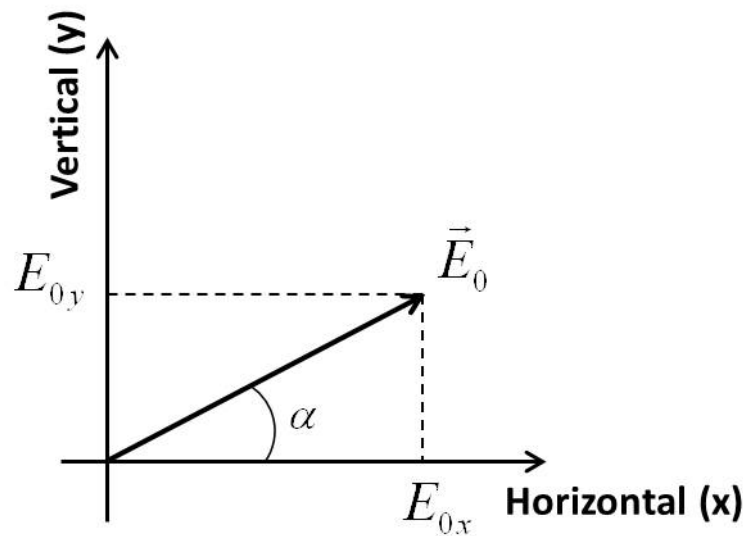
$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right). \quad (2.30)$$

Figura 1 – feixe de luz polarizado linearmente propagando-se na direção  $\vec{k}$ . Os vetores campo elétrico e magnético variam em intensidade e sentido, mas têm suas direções fixas.



Fonte: Fowles, 1989 [36].

Figura 2 – amplitude ( $\vec{E}_0$ ) do vetor polarização ( $\vec{E}$ ) decomposto nas componentes horizontal ( $E_{0x}$ ) e vertical ( $E_{0y}$ ).



Fonte: Autor, 2013.

No caso de luz natural, por exemplo a luz do sol ou de lâmpadas, o vetor campo elétrico não tem uma direção definida. Esta direção varia rápida e aleatoriamente com o tempo. Nesta situação, a luz é dita não polarizada. Uma forma de tornar essa luz polarizada é utilizando polarizadores. Num caso ideal, esses dispositivos absorvem totalmente a componente do vetor campo elétrico (polarização) em uma determinada direção e transmite totalmente a componente na direção perpendicular. Essa segunda direção define o eixo de transmissão do polarizador. Como exemplo, considere que o feixe cujo vetor campo elétrico é dado pela equação (2.29) passe por um polarizador ideal no qual o eixo de transmissão é paralelo à direção  $x$ . Após o polarizador, o vetor campo elétrico é

$$\vec{E}(z,t) = (\hat{i}E_{0x})\cos(kz - \omega t + \delta_0), \quad (2.31)$$

ou seja, possui componente diferente de zero apenas da direção do eixo de transmissão.

#### 2.1.4.2 Polarização circular e elíptica

Considere duas ondas polarizadas linearmente, de mesma frequência ( $\omega$ ), propagando-se na direção ( $z$ ). Vamos assumir que uma onda está polarizada na direção  $x$  ( $\vec{E}_x$ ) e outra na direção  $y$  ( $\vec{E}_y$ ) de um sistema de coordenada  $xy$ . Essas ondas podem ser representadas por

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_x) \quad (2.32)$$

e

$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_y), \quad (2.33)$$

onde  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são as fases dos campos. A quantidade  $\delta = \delta_y - \delta_x$  representa a diferença de fase relativa entre as duas ondas. Na representação complexa,

$$\vec{E}_x(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (2.34)$$

e

$$\vec{E}_y(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{E}_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \right], \quad (2.35)$$

onde  $\vec{E}_{0x} = \hat{i}E_{0x} \exp(i\delta_x)$  e  $\vec{E}_{0y} = \hat{j}E_{0y} \exp(i\delta_y)$  são os vetores amplitudes complexos. As fases dos campos estão nestas amplitudes. Como o que interessa é a diferença de fase ( $\delta$ ), vamos fazer  $\delta_x = 0$  e  $\delta_y = \delta$ . Aplicando o princípio da superposição<sup>1</sup>, temos que o campo resultante é dado por

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t). \quad (2.36)$$

O estado de polarização da onda resultante é determinado pela diferença de fase relativa  $\delta$  [37]. Para  $\delta = n(\pm\pi)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , as duas ondas estão em fase e a onda resultante é polarizada linearmente, pois

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (2.37)$$

e a amplitude do vetor  $\vec{E}(z, t)$  tem direção constante dada por  $\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}$  que é a direção de polarização da onda resultante.

No caso particular de  $\delta = -\pi/2 + 2m\pi$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ , e  $E_0 = E_{0x} = E_{0y}$ , a onda resultante pode ser escrita, na representação real, como

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left[ \hat{i} \cos(kz - \omega t) \pm \hat{j} \sin(kz - \omega t) \right]. \quad (2.38)$$

---

<sup>1</sup> Este princípio é válido no vácuo e em meios lineares, onde as equações de Maxwell são equações diferenciais lineares. Quando o meio responde de forma não-linear, este princípio é apenas uma aproximação.

O vetor campo elétrico dessa onda tem módulo constante,  $|\vec{E}(z,t)| = E_0$ . Porém, não tem uma direção de polarização fixa. Para simplificar, fazendo  $z=0$  nesta equação, temos que no instante  $t=0$  o campo elétrico está na direção  $x$ . Já para  $t = \pi / (2\omega)$  o campo elétrico aponta na direção  $\pm y$ . Este tipo de onda é dita polarizada circularmente [37]. No caso de  $+$  na equação (2.38), o vetor polarização gira no sentido horário com frequência angular  $\omega$  quando observado contra o sentido de propagação da onda. Este caso é chamado de polarização circular à direita [38]. Já no caso de  $-$ , o sentido é anti-horário e é chamado de polarização circular à esquerda. É fácil ver que a representação complexa da onda da equação (2.38) é

$$\vec{E}(z,t) = E_0(\hat{i} \pm \hat{j}i)e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.39)$$

É possível obter uma onda polarizada linearmente a partir de duas polarizadas circularmente. Fazendo a superposição da onda polarizada circularmente à direita com a polarizada à esquerda da equação (2.38) temos

$$\vec{E}(z,t) = 2E_0\hat{i} \cos(kz - \omega t) \quad (2.40)$$

que é de fato uma onda polarizada linearmente.

As polarizações linear e circular podem ser consideradas casos particulares da polarização elíptica. Para descrever essa situação geral, vamos determinar a expressão matemática para a curva traçada pela ponta do vetor  $\vec{E}$  da equação (2.36). Por simplicidade, vamos fazer  $\delta_x = 0$  e  $\delta_y = \delta$ . Escrevendo a equação (2.33) na forma escalar e expandindo o cosseno, temos

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t) \cos \delta - \sin(kz - \omega t) \sin \delta. \quad (2.41)$$

Da equação (2.32) temos

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(kz - \omega t). \quad (2.42)$$

Combinando as equações (2.41) e (2.42), segue

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta = -\sin(kz - \omega t) \sin \delta. \quad (2.43)$$

Mas, de (2.42) temos

$$\text{sen}(kz - \omega t) = \left[ 1 - \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.44)$$

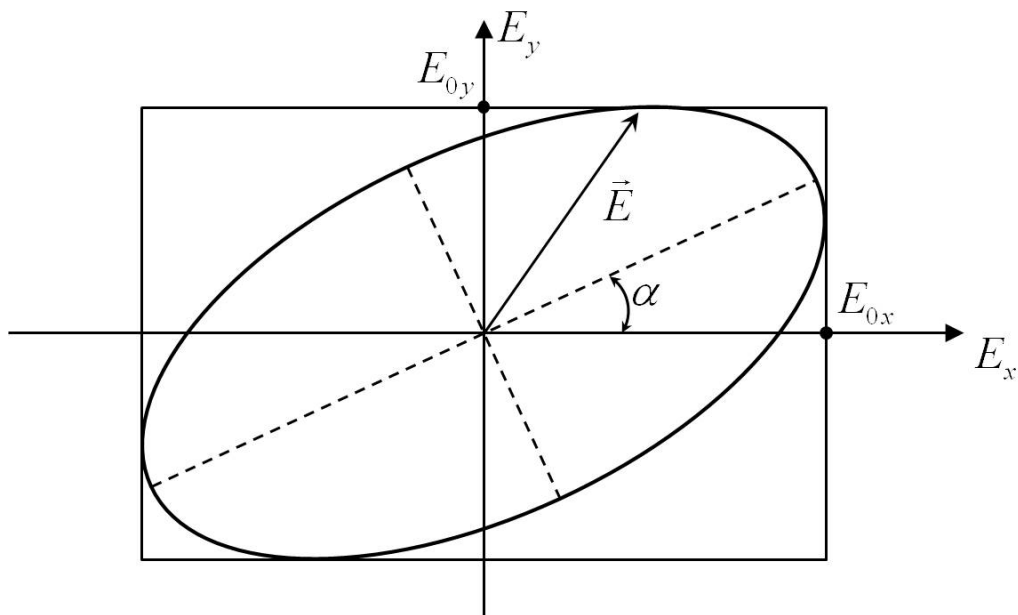
Substituindo (2.44) em (2.43) e após um pouco de álgebra, temos

$$\left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 + \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_y}{E_{0y}} \right) \left( \frac{E_x}{E_{0x}} \right) \cos \delta = \text{sen}^2 \delta. \quad (2.45)$$

Esta expressão descreve a curva traçada pela ponta do vetor  $\vec{E}$  da equação (2.36) [34, 37]. Depende apenas da diferença de fase relativa  $\delta$  e das amplitudes das ondas que se superpõem. Esta é a equação de uma elipse cujo eixo principal forma um ângulo  $\alpha$  com a direção horizontal de um sistema de coordenadas  $(E_x, E_y)$ , conforme Figura 3. O parâmetro  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \right). \quad (2.46)$$

Figura 3 – representação gráfica do estado de polarização elíptico dado pela equação (2.45). O eixo principal da elipse forma um ângulo  $\alpha$  com a direção horizontal ( $E_{0x}$ ). Os casos particulares são polarização linear e circular.



Fonte: Hecht, 2002 [37].

No caso de  $\delta = -\pi/2 + 2n\pi$  e  $E_0 = E_{0x} = E_{0y}$  a equação (2.45) se reduz a

$$E_x^2 + E_y^2 = 1 \quad (2.47)$$



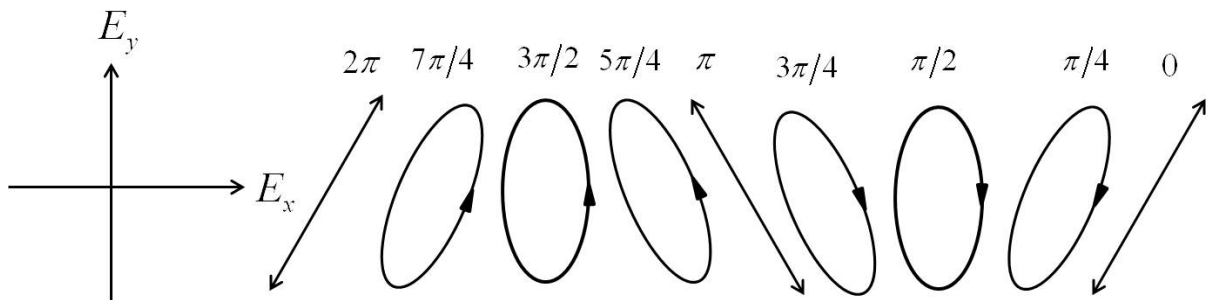
que é o caso de polarização circular discutido acima. Por outro lado, se  $\delta = n(\pm\pi)$ , temos

$$E_y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \quad (2.48)$$

que é o caso particular de polarização linear.

A Figura 4 a seguir ilustra o estado de polarização para diferentes valores de  $\delta$ .

**Figura 4** – estado de polarização resultante da combinação de dois feixes polarizados linearmente e se propagando na mesma direção. O que difere entre os casos é a diferença de fase relativa  $\delta$ .



Fonte: Autor, 2013. Adaptado de [37].

De fato, utilizando a representação complexa do vetor campo elétrico, qualquer estado de polarização para uma onda se propagando na direção  $z$  com frequência angular  $\omega$  pode ser escrito como

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.49)$$

onde  $\vec{E}_0$  é o vetor amplitude complexa definido por

$$\vec{E}_0 = \hat{i}E_0 + \hat{j}E_0'. \quad (2.50)$$

Se  $\vec{E}_0$  é real, tem-se o caso de polarização linear; já se esse vetor for complexo, tem-se o caso de polarização elíptica, onde o caso particular em que as partes real e imaginária desse vetor são iguais é a polarização circular.

## 2.2 Condições de contorno

Na interface entre dois meios, os campos elétrico e magnético devem satisfazer as chamadas condições de contorno. A componente tangencial do campo elétrico é contínua ao cruzar uma

interface, ou seja,

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} . \quad (2.51)$$

Na equação acima,  $\vec{E}_1^{\parallel}$  é a componente tangencial ao campo de um lado da interface, e  $\vec{E}_2^{\parallel}$  do outro lado. Já para o campo magnético, temos que a componente normal à interface é quem é contínua, ou seja,

$$\vec{B}_1^{\perp} = \vec{B}_2^{\perp} . \quad (2.52)$$

A notação empregada nessa equação é similar a da equação (2.51). As componentes normal e tangencial do vetor deslocamento elétrico e do vetor indução magnética sofrem descontinuidades quando existe na interface uma densidade superficial de cargas livres e uma densidade superficial de corrente, respectivamente [33, 39]. Vamos considerar ausência de cargas livres e corrente na interface. Neste caso, as condições de contorno para  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  se tornam

$$D_1^{\perp} = D_2^{\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \quad (2.53)$$

e

$$\vec{H}_1^{\parallel} = \vec{H}_2^{\parallel} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel} , \quad (2.54)$$

respectivamente. Nestas equações,  $\varepsilon_i$  é a permissividade do meio  $i$ , e  $\mu_i$  a permeabilidade do meio  $i$ . A seguir vamos aplicar essas condições de contorno para determinar as amplitudes das ondas transmitida e refletida em termos da incidente.

### 2.2.1 Coeficientes de transmissão

A Figura 5 ilustra o caso de um feixe de luz, do tipo onda plana, incidindo obliquamente na interface que separa dois meios de índices de refração diferentes. O feixe incidente se propaga no meio de índice  $n_1$  e tem vetor de onda  $\vec{k}$  (campos correspondentes  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ). Na interface são produzidos dois feixes, o refletido, que se propaga no meio de índice de refração  $n_1$  e possui vetor de onda  $\vec{k}'$  (campos correspondentes  $\vec{E}'$  e  $\vec{H}'$ ), e o refratado, que se propaga no meio de índice  $n_2$  e possui vetor de onda  $\vec{k}''$  (campos correspondentes  $\vec{E}''$  e  $\vec{H}''$ ). Da equação (2.12), os campos elétricos dessas ondas podem ser representados por

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] & \text{onda incidente} \\ \vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0 \exp[i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)] & \text{onda refletida} \\ \vec{E}''(\vec{r}, t) = \vec{E}''_0 \exp[i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)] & \text{onda refratada} \end{cases} \quad (2.55)$$

De acordo com as equações (2.6) e (2.16), os vetores indução magnética das ondas incidente, refletida e refratada estão relacionados aos respectivos campos elétricos através das seguintes equações

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E}, \quad (2.56)$$

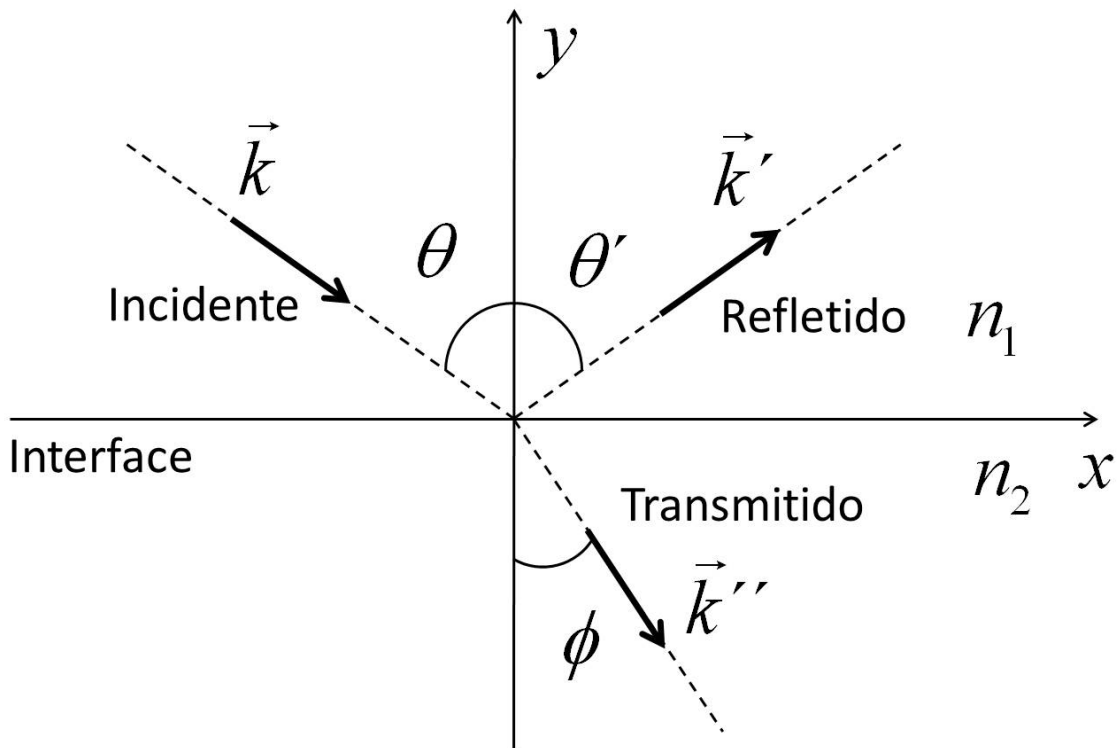
$$\vec{H}' = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k}' \times \vec{E}' \quad (2.57)$$

e

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k}'' \times \vec{E}''. \quad (2.58)$$

Nas equações acima foi assumido que a permeabilidade dos meios são iguais, o que implica em desconsiderar as respostas magnéticas dos meios.

Figura 5 – feixe incidindo obliquamente na interface que separa dois meios. O meio inicial tem índice de refração  $n_1$  e o outro meio índice  $n_2$ . Os vetores de onda dos feixes incidente, refletido e refratado são  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  e  $\vec{k}''$ , respectivamente.



Fonte: Autor, 2013. Adaptado de [36, 40].

Ao aplicar as condições de contorno, tem-se que os campos elétrico e magnético total no meio de índice de refração  $n_1$  são  $\vec{E} + \vec{E}'$  e  $\vec{H} + \vec{H}'$ , respectivamente. Já no meio de índice de refração  $n_2$ ,  $\vec{E}''$  e  $\vec{H}''$ . Na interface, as condições de contorno dadas acima possuem estrutura

$$(\ ) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] + (\ ) \exp[i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)] = (\ ) \exp[i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)]. \quad (2.59)$$

Como as condições de contorno devem ser mantidas para todos os pontos da interface, e em qualquer instante de tempo, os argumentos das exponenciais devem ser iguais [33]. Isto implica que, na interface,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r}. \quad (2.60)$$

Da equação (2.60) segue que os vetores  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  e  $\vec{k}''$  são coplanares. O plano formado por esses vetores é chamado de **plano de incidência**. Denominando os ângulos formado entre a reta normal à interface e os vetores  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  e  $\vec{k}''$  de  $\theta$ ,  $\theta'$  e  $\phi$ , respectivamente, segue

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \phi . \quad (2.61)$$

Como o número de onda (módulo do vetor de onda) depende do meio que a onda está se propagando, pois está relacionado com a velocidade de propagação da onda no meio, segue que  $k = k''$ . Substituindo esse resultado na equação (2.61) temos

$$\theta = \theta' \quad (2.62)$$

que significa dizer que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Utilizando a equação (2.14), temos  $k''/k = n_2 / n_1$ . Substituindo na equação (2.61), segue

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \phi \quad (2.63)$$

que é a Lei de Snell para refração.

Procedendo, queremos determinar os coeficientes de transmissão para calcular a amplitude do campo elétrico da onda ao cruzar a interface. Para isto, vamos seguir a abordagem da referência [36] e definir dois casos: 1) transversal elétrico (TE) e 2) transversal magnético (TM). No primeiro caso, representado na Figura 6, o campo elétrico da onda incidente é perpendicular ao plano de incidência. Já no segundo caso, representado na Figura 7, o campo magnético é perpendicular a este plano e o campo elétrico paralelo. No caso TE, a polarização do feixe é denominada *s* (de “senkrecht”, palavra alemã que significa perpendicular) e no TM, *p* (de paralelo).

Das condições de contorno, segue

### Caso TE

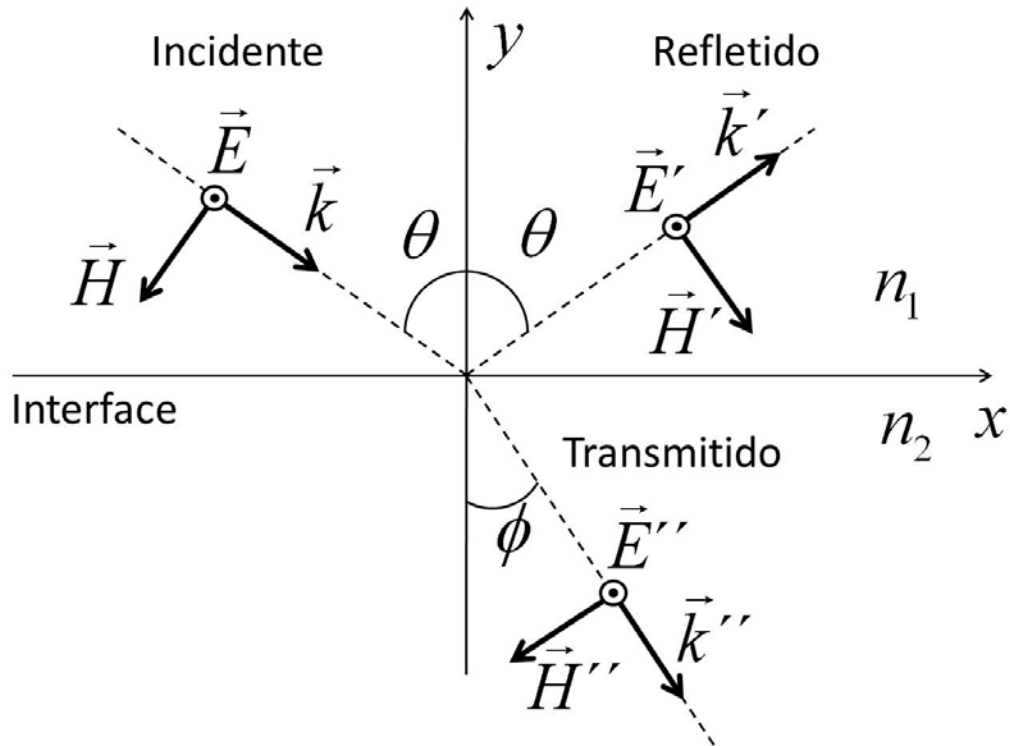
$$E + E' = E'' ; \quad (2.64)$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = -H'' \cos \phi . \quad (2.65)$$

Utilizando as equações (2.56)-(2.58) em (2.65), segue

$$-kE \cos \theta + k'E' \cos \theta = -k''E'' \cos \phi . \quad (2.66)$$

Figura 6 – representação do caso TE, onde a direção do vetor campo elétrico do feixe incidente é perpendicular ao plano de incidência.



Fonte: Autor, 2013. Adaptado de [36, 40].

### Caso TM

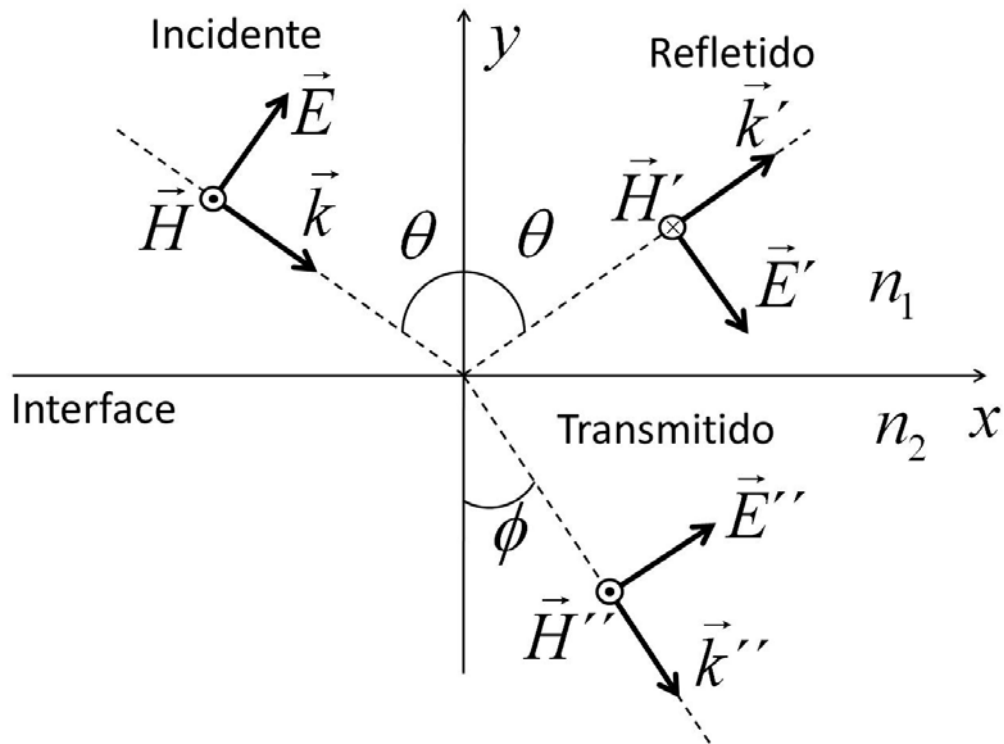
$$H - H' = H''; \quad (2.67)$$

$$kE - k'E' = k''E''. \quad (2.68)$$

Utilizando as equações (2.56)-(2.58) em (2.67), segue

$$E \cos \theta + E' \cos \theta = E'' \cos \phi. \quad (2.69)$$

Figura 7 – representação do caso TM, onde a direção do vetor campo magnético é perpendicular ao plano de incidência.



Fonte: Autor, 2013. Adaptado de [36, 40].

O coeficiente de transmissão é definido como sendo a razão entre a amplitude da onda transmitida com a incidente, e o coeficiente de reflexão como sendo a razão entre a amplitude da onda refletida com a incidente. Em cada caso de polarização temos um coeficiente de transmissão e um de reflexão. No caso TE,  $r_s$  e  $t_s$  representam os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. Já no caso TM, esses coeficientes são representados por  $r_p$  e  $t_p$ . De forma explícita, esses coeficientes são definidos nas equações abaixo.

$$r_s = \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TE} \quad (2.70)$$

$$t_s = \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TE} \quad (2.71)$$

$$r_p = \left[ \frac{E'}{E} \right]_{TM} \quad (2.72)$$

$$t_p = \left[ \frac{E''}{E} \right]_{TM} \quad (2.73)$$

Resolvendo as equações (2.64) e (2.66) para  $E'$  e  $E''$ , temos, usando a lei de Snell (2.63) e  $n = ck / \omega$ ,

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.74)$$

e

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.75)$$

Resolvendo as equações (2.68) e (2.69) temos, para o caso TM:

$$r_p = \frac{n_2^2 \cos \theta - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_2^2 \cos \theta + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.76)$$

e

$$t_p = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta}{n_2^2 \cos \theta + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} \quad (2.77)$$

Os coeficientes de reflexão e transmissão diferem para os casos TE e TM em todos os ângulos de incidência. Exceto para  $\theta = 0$ . Nesta situação, temos

$$r_s = r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (2.78)$$

e

$$t_s = t_p = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad (2.79)$$

A potência por unidade de área, ou seja, a intensidade é definida como sendo o módulo da componente do vetor de Poynting normal à interface [33]. Para o feixe incidente, temos

$$I_I = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta. \quad (2.80)$$

Já para os feixes refletidos e transmitidos temos



$$I_R = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta \quad (2.81)$$

e

$$I_T = \frac{1}{2} \varepsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \phi, \quad (2.82)$$

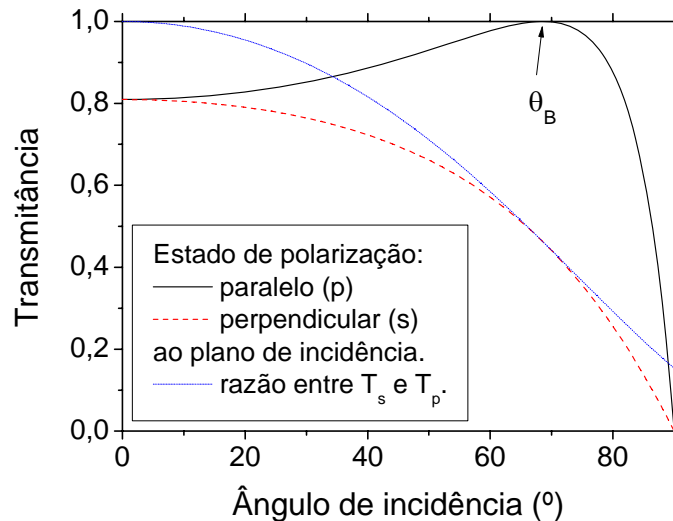
respectivamente.

A reflectância ( $R$ ) é definida pela razão entre a intensidade da onda refletida e a intensidade da onda incidente na interface. Já a transmitância ( $T$ ) é a razão entre a intensidade da onda transmitida e a intensidade da onda incidente. Considerando que não existe perda de energia na interface, a conservação de energia implica que

$$R + T = 1, \quad (2.83)$$

ou seja, a energia por unidade de tempo que incide numa determinada área é igual a energia por unidade de tempo que deixa essa área. A Figura 8 apresenta o comportamento da transmitância em função do ângulo de incidência para polarização paralela ( $p$ ) (linha cheia) e perpendicular ( $s$ ) (curva tracejada) ao plano de incidência. Essa figura mostra também a razão entre a transmitância (curva pontilhada) para polarização  $s$  ( $T_s$ ) e  $p$  ( $T_p$ ). Observa-se no caso de polarização  $p$  a existência de um ângulo de incidência onde toda luz incidente na interface é transmitida. Esse é o ângulo de Brewster ( $\theta_B$ ). Além disso, quanto maior é o ângulo de incidência, maior é a diferença entre  $T_s$  e  $T_p$ .

Figura 8 – transmitância numa interface onde o meio de propagação inicial tem índice de refração 1 e o meio seguinte 2,5. No caso de polarização p, tem-se um ângulo de incidência chamado de ângulo de Brewster ( $\theta_B$ ) para o qual toda a luz incidente é transmitida. A curva pontilhada é a razão entre  $T_s$  e  $T_p$ .



Fonte: Autor, 2012.

## 2.3 Óptica não-linear

A matéria pode responder de formas diferentes à radiação interagente. Por exemplo, um vidro pode responder linearmente ou não ao campo elétrico aplicado. Esta resposta pode ser compreendida com o auxílio do vetor polarização que pode ser expandido em termos dos campos elétricos os quais o meio está sujeito de acordo com a equação abaixo [41]. Este vetor fornece a resposta do meio à radiação interagente.

$$P_i = \varepsilon_0 \left[ \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right]. \quad (2.84)$$

Nesta equação,  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo,  $\chi_{ij}^{(1)}$  os elementos do tensor susceptibilidade linear e  $\chi_{ijk\dots z}^{(n)}$  os elementos do tensor susceptibilidade não-linear de ordem  $n$ . Nesta representação foi utilizada a convenção de soma sobre índices repetidos. A cada um dos tensores estão associados efeitos ópticos. Como exemplo, associado a  $\vec{\chi}^{(1)}$  tem-se absorção linear e índice de refração;  $\vec{\chi}^{(2)}$  geração de segundo harmônico, soma e diferença de frequências e o efeito eletro-óptico linear (Pockels), onde este último consiste na modulação do índice de refração pela aplicação de campo elétrico, e depende linearmente desse campo elétrico;  $\vec{\chi}^{(3)}$  geração de terceiro

harmônico, soma e diferença de frequências e o efeito Kerr, onde este último é uma mudança no índice de refração por aplicação de campo elétrico, e depende do quadrado desse campo.

Conforme maior a ordem do termo não-linear na equação (2.84) mais difícil é de observar os efeitos associados, pois a eficiência do processo é reduzida. Materiais que apresentam simetria de inversão macroscópica<sup>2</sup>, como os vidros, têm todos os tensores não-lineares de ordem par nulos [42]. Nesta tese nos restringiremos ao cristal BTO que não apresenta este tipo de simetria.

As equações da onda (2.10) e (2.11) foram obtidas considerando que o meio responde de forma linear à radiação interagente, pois temos apenas o termo linear da (2.84) na equação (2.3). Considerando agora as respostas não-lineares, a equação da onda para o campo elétrico pode ser escrita como [41]

$$\left[ \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.85)$$

O termo  $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$  leva em conta a resposta não-linear do meio dada pelos termos de ordem maior ou igual a 2 na equação (2.84). Por conta da condição de casamento de fase, muitas vezes observa-se apenas um efeito não-linear de cada vez. Nestes casos, a solução da equação (2.85) fica simplificada, pois se substitui apenas um termo da equação (2.84).

## 2.4 Elipsoide de índices

Em cristais anisotrópicos, o índice de refração linear depende da direção de propagação do feixe e a direção de polarização. A fim de descrever este comportamento vamos utilizar o elipsoide de índices e seguir a abordagem das referências [22, 34, 42]. A equação deste elipsoide é obtida a partir da densidade de energia armazenada no campo elétrico ( $u$ ) em um meio anisotrópico.  $u$  é dada por

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (2.86)$$

Desta equação, segue que as superfícies de densidade de energia constante no espaço do deslocamento elétrico ( $\vec{D}$ ) são dadas por

---

<sup>2</sup> Neste tipo de simetria existem pontos nos quais a substituição de um átomo no vetor posição  $\vec{r}$  com relação a esse ponto por um em  $-\vec{r}$  deixa o cristal invariante.

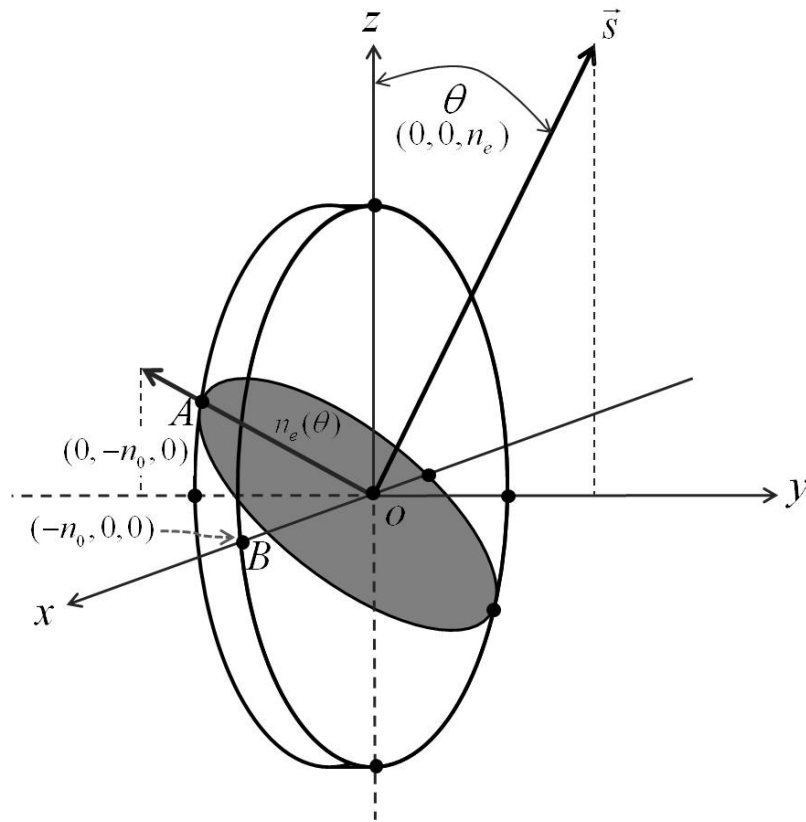
$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 2u, \quad (2.87)$$

onde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  são as permissividades elétricas nas direções dos eixos dielétricos principais do cristal. Vamos substituir  $\vec{D}/\sqrt{2u}$  pelo vetor posição  $\vec{r}$ . Desta forma, temos que a equação (2.87) se torna

$$\frac{x^2}{\varepsilon_{11}/\varepsilon_0} + \frac{y^2}{\varepsilon_{22}/\varepsilon_0} + \frac{z^2}{\varepsilon_{33}/\varepsilon_0} = 1 \quad (2.88)$$

e representa um elipsoide com eixos maiores de comprimentos  $2\sqrt{\varepsilon_{11}/\varepsilon_0}$ ,  $2\sqrt{\varepsilon_{22}/\varepsilon_0}$  e  $2\sqrt{\varepsilon_{33}/\varepsilon_0}$  paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Para determinar as direções de polarização e as velocidades de fase para uma dada direção de propagação, representa-se a elipse formada pela intersecção do elipsoide de índices com um plano que passa pela origem do elipsoide e é normal a direção de propagação do feixe. A direção dos eixos maior e menor dessa elipse são as direções permitidas para as polarizações, sendo os comprimentos desses eixos  $2n_1$  e  $2n_2$ , respectivamente, onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índice de refração para as duas direções.

Figura 9 – feixe se propagando na direção  $\vec{s}$  de um cristal birrefringente. A direção de propagação forma um ângulo  $\theta$  com o eixo óptico. O plano normal à direção de propagação e que passa pela origem forma a elipse sombreada na figura.



Fonte: Autor, 2013. Adaptado de [42].

Como exemplo, tomemos o representado Figura 9, onde o feixe se propaga ao longo de uma direção que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$  e está contido no plano  $zy$ . Neste caso, a equação do elipsoide de índices é

$$\frac{x^2}{n_0^2} + \frac{y^2}{n_0^2} + \frac{z^2}{n_1^2} = 1. \quad (2.89)$$

As direções de polarização permitidas são paralelas aos eixos maiores da elipse. A fim de determinar os respectivos índices de refração vamos utilizar as coordenadas esféricas, onde  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ . Nestas equações,  $\theta$  é o ângulo polar ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ) e  $\phi$  o ângulo azimutal ( $0 \leq \phi \leq 360^\circ$ ) medido no plano  $xy$  com relação ao eixo  $x$ . Substituindo essas equações em (2.89), segue

$$r(\phi, \theta) = \left( \frac{\sin^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.90)$$

Temos que o índice de refração independe de  $\phi$ , devido à simetria do elipsoide em torno do eixo  $z$  e varia com  $\theta$ . Queremos determinar  $r(0, \pi/2)$  e  $r(\pi/2, \pi/2 + \theta)$ . Usando a equação (2.90), tem-se

$$r(0, \pi/2) = n_0 \text{ e}$$

$$r(\pi/2, \pi/2 + \theta) = \left( \frac{\cos^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = n_e(\theta).$$

Segue  $0 \leq n_e(\theta) \leq n_e$ . Logo, para uma onda se propagando em um cristal anisotrópico, o índice de refração depende tanto da direção de propagação quanto da direção de polarização.

## 2.5 Efeito eletro-óptico linear (Pockels)

O índice de refração linear de materiais que não apresentam simetria de inversão macroscópica pode ser modulado pela aplicação de campo elétrico através do efeito Pockels. Esse é um efeito óptico não-linear de segunda ordem e a mudança no índice de refração é diretamente proporcional ao campo elétrico aplicado. Para determinar como os índices de refração mudam, vamos reescrever o elipsoide de índices da equação (2.88) em termos dos índices de refração nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , conforme a equação abaixo.

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (2.91)$$

Na presença de um campo elétrico aplicado, a equação do elipsoide de índices pode ser escrita como

$$\left( \frac{1}{n^2} \right)_1 x^2 + \left( \frac{1}{n^2} \right)_2 y^2 + \left( \frac{1}{n^2} \right)_3 z^2 + 2 \left( \frac{1}{n^2} \right)_4 yz + 2 \left( \frac{1}{n^2} \right)_5 xz + 2 \left( \frac{1}{n^2} \right)_6 xy = 1. \quad (2.92)$$

Com campo elétrico aplicado nulo, as equações (2.92) e (2.91) devem ser equivalentes. Esta condição é satisfeita se

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 \Big|_{E_{Ap}=0} &= \frac{1}{n_x^2}; \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 \Big|_{E_{Ap}=0} = \frac{1}{n_y^2}; \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \Big|_{E_{Ap}=0} = \frac{1}{n_z^2}; \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_4 \Big|_{E_{Ap}=0} &= \left(\frac{1}{n^2}\right)_5 \Big|_{E_{Ap}=0} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_6 \Big|_{E_{Ap}=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Por definição, a mudança linear nos coeficientes  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_i$  devido a um campo elétrico arbitrário

$\vec{E}_{Ap}(E_{Ap,x}, E_{Ap,y}, E_{Ap,z})$  é

$$\begin{bmatrix} \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_2 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_5 \\ \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{Ap,1} \\ E_{Ap,2} \\ E_{Ap,3} \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Ou, de forma compacta,

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_i = \sum_{j=1}^3 r_{ij} E_{Ap,j}. \quad (2.95)$$

Os elementos  $r_{ij}$  constituem o tensor eletro-óptico. Para os cristais que apresentam simetria de inversão macroscópica  $r_{ij} = 0$ . A forma do tensor eletro-óptico, isto é, quais elementos são nulos e quantos são independentes é determinada utilizando as propriedades de simetria do cristal. A forma deste tensor é tabulada para todas as classes de cristais [42].

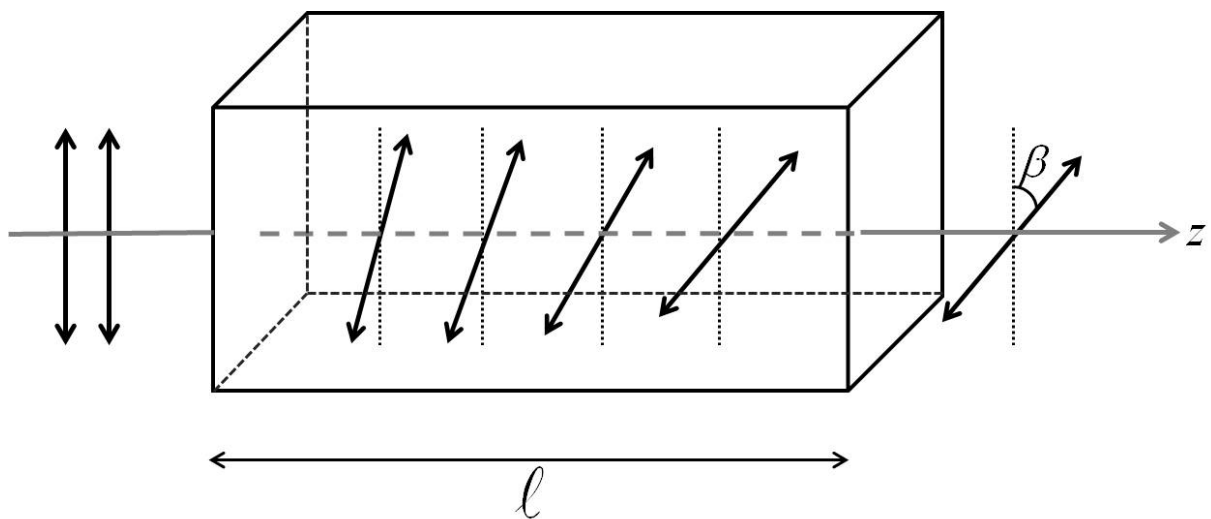
## 2.6 Atividade óptica

Para ilustrar a atividade óptica considere a

Figura 10, onde um feixe de luz polarizado linearmente incide num cristal que apresenta atividade óptica. Conforme se observa, à proporção que o feixe se propaga dentro do cristal, sua direção de polarização é alterada. O plano de polarização após a saída do cristal é girado com relação

ao incidente de um ângulo  $\beta$  que é proporcional ao caminho percorrido pelo feixe no meio ( $l$ ). A rotação por unidade de comprimento é chamada de poder rotatório ( $\rho = \beta/l$ ) [40]. A rotação do plano de polarização pode ser para a direita ou para a esquerda de um observador olhando na direção  $z > 0$ . No primeiro caso, o material é chamado de destro-rotatório, e no segundo, levo-rotatório. Um exemplo comum de materiais que apresentam atividade óptica, ou seja, são opticamente ativos, é o quartzo na fase cristalina.

Figura 10 – ilustração da atividade óptica. Um feixe de luz polarizado linearmente incide da esquerda para a direita num meio que apresenta atividade óptica. À medida que o feixe se propaga dentro do cristal sua direção de polarização é alterada.



Fonte: Adaptado de [40].

A atividade óptica se deve à diferença de índice de refração para luz polarizada circularmente: direita e esquerda. Isto é uma consequência da simetria da estrutura atômica do meio [40], que neste caso é chamado de simetria chiral. O ângulo  $\beta$  é dado por

$$\beta = (n_R - n_L) \frac{\pi l}{c}, \quad (2.96)$$

onde  $n_R$  e  $n_L$  são os índices de refração para polarização circular direita e esquerda, respectivamente.

## 2.7 Efeito eletro-giratório

O efeito eletro-giratório é uma mudança na atividade óptica provocada pela aplicação de campo elétrico. Esse efeito é descrito por um pseudo-tensor de ordem 3 [43]. Esse pseudo-tensor é



representado por

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} \\ \zeta_{41} & \zeta_{42} & \zeta_{43} \\ \zeta_{51} & \zeta_{52} & \zeta_{53} \\ \zeta_{61} & \zeta_{62} & \zeta_{63} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Nos cristais da classe I23, este tensor tem a mesma simetria do tensor eletro-óptico ( $\vec{r}$ ) [43, 44] que será discutido mais adiante. Apenas os elementos  $\zeta_{41}$ ,  $\zeta_{52}$  e  $\zeta_{63}$  são diferentes de zero. Além disso, todos esses elementos são iguais.

A contribuição do efeito eletro-giratório ao poder rotatório é  $-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\lambda n_{BTO}} \zeta_{41} E_{Ap}$ . Desta forma, a atividade óptica por unidade de comprimento incluindo o efeito eletro-giratório é [43, 44]

$$\rho = \rho_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\lambda n_{BTO}} \zeta_{41} E_{Ap}. \quad (2.98)$$

## 2.8 Efeito eletro-óptico secundário

A mudança do índice de refração linear induzida por campo elétrico aplicado foi chamada na seção 2.5 de efeito eletro-óptico linear. Esse efeito é denominado de efeito eletro-óptico primário [21] porque outros efeitos podem mudar o índice de refração linear. Outra forma de mudar o índice de refração linear de um cristal é via efeito piezo-elétrico inverso, onde o campo elétrico aplicado induz deformações no cristal e essas deformações induzem mudança no índice de refração linear via efeito elasto-óptico. Nas silenitas, esses efeitos são caracterizados pelos elementos  $d_{14}$  e  $p_{44}$  dos respectivos tensores [28]. Nas medidas do coeficiente eletro-óptico das silenitas, esses efeitos aparecem e não podem ser separados. Ao invés de medir  $r_{41}$  é medido  $r_{41} + p_{44}d_{14}$ . Desta forma, define-se o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) como sendo

$$r_{ef} = r_{41} + p_{44}d_{14}. \quad (2.99)$$

Nos experimentos com campo elétrico estático,  $r_{ef}$  é quem é medido. A contribuição do termo  $p_{44}d_{14}$  para  $r_{ef}$  em geral é muito menor que  $r_{41}$ . No caso do BTO, estima-se que  $p_{44}d_{14}$  seja da ordem de 0,21 pm/V [45] apud [28].

## 2.9 Formalismo de Jones para a polarização

O formalismo de Jones para a polarização é uma ferramenta importante para descrever matematicamente sistemas onde um feixe de luz polarizado passa por vários elementos ópticos. Dentre esses elementos, têm-se os polarizadores, as placas de meia onda e quarto de onda. Além disso, é possível descrever utilizando este formalismo como mudam as componentes do vetor polarização após o feixe passar por interfaces e cristais birrefringentes.

A fim de introduzir esse formalismo, considere uma onda polarizada propagando-se em uma determinada direção que vamos chamar de  $z$ . O vetor campo elétrico dessa onda pode ser escrito como

$$\vec{E} = \hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y}, \quad (2.100)$$

onde  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são as componentes do vetor polarização na direção dos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ , respectivamente. A princípio as componentes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são complexas o que implica que a equação (2.100) descreve ondas polarizadas elipticamente, sendo casos particulares polarização linear e circular. Escrevendo essas componentes na forma exponencial e o vetor polarização numa forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{i\phi_x} \\ |E_{0y}| e^{i\phi_y} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Essa matriz é chamada de vetor de Jones e descreve o estado de polarização de um feixe óptico. Para determinar o estado de polarização resultante da combinação de dois ou mais feixes polarizados, basta somar os vetores de Jones associados a cada feixe. O estado de polarização de um feixe após passar por um elemento óptico ou uma sequência desses elementos também é determinado usando o formalismo de Jones. Para isso, cada elemento é representado por uma matriz quadrada de ordem 2. Essas matrizes são chamadas de matrizes de Jones. Para exemplificar o uso dessas matrizes,

considere a situação onde um feixe cujo vetor de Jones é  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  passa por um elemento cuja matriz de Jones é  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . O vetor polarização do feixe resultante é

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

No caso em que o feixe passa por uma seqüência de elementos ópticos, o estado de polarização resultante é

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

onde o índice 1 se refere ao primeiro elemento, o 2 ao segundo e assim sucessivamente. Em geral o produto de matrizes não comuta. Isso implica que a ordem dos elementos ópticos é importante e, conseqüentemente, a ordem de multiplicação das matrizes que descrevem os elementos ópticos.

De acordo com as equações (2.100) e (2.101), o vetor de Jones ( $E_0$ ) normalizado de um feixe polarizado linearmente, com a direção de polarização formando um ângulo  $\theta_p$  com a direção horizontal ( $x$ ) é dado por

$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Já no caso de polarização circular, temos

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

onde os sinais + e - se referem a polarizações circulares esquerda e direita, respectivamente.

Como exemplo de matrizes de Jones, tem-se

$$\text{Polarizador linear} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eixo de transmissão na horizontal} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ eixo de transmissão na vertical} \end{array} \right. . \quad (2.106)$$

De interesse especial nessa tese, temos as placas birrefringentes que são caracterizadas por possuírem índices de refração diferentes para direções de polarização diferentes. Para ilustrar, considere a situação representada Figura 11, onde um feixe incide normalmente numa placa birrefringente e se propaga na direção  $z$  [42]. A placa possui índices de refração  $n_s$  e  $n_f$  nas direções  $s$  e  $f$ , respectivamente, sendo  $n_s > n_f$ . Os índices  $s$  e  $f$  se referem a lento ("slow") e

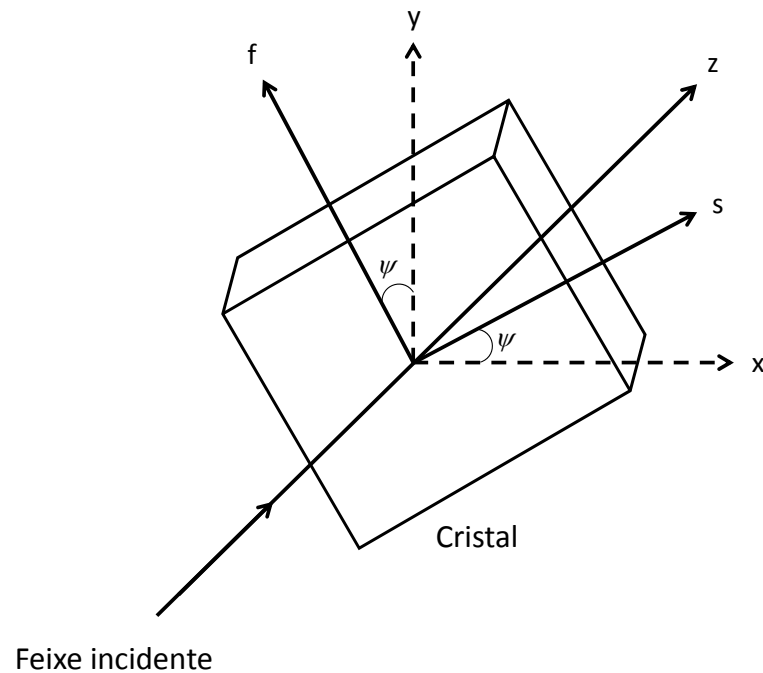
rápido (“fast”), termos que estão relacionados com a velocidade de propagação da luz para polarização paralela ao eixo lento ser menor que para paralela ao eixo rápido, pois  $n_s > n_f$ .  $x$ ,  $y$  e  $z$  são direções fixas no sistema de referência do laboratório. O ângulo formado pelo eixo  $s$  e a direção  $x$  é  $\psi$ . Para determinar o estado de polarização do feixe após passar por essa placa é necessário determinar a diferença de fase entre as duas componentes do vetor polarização introduzida pela placa. Essa diferença de fase está associada à diferença entre os índices  $n_s$  e  $n_f$ . Como resultado final, tem-se a matriz de Jones dada pela equação (2.107), que é função do ângulo  $\psi$  e do parâmetro retardação de fase ( $\Gamma$ ) dado pela equação (2.108) [34, 42].

$$W(\psi, \Gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i(\Gamma/2)} \cos^2 \psi + e^{i(\Gamma/2)} \sin^2 \psi & -i \operatorname{sen} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{sen}(2\psi) \\ -i \operatorname{sen} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{sen}(2\psi) & e^{-i(\Gamma/2)} \sin^2 \psi + e^{i(\Gamma/2)} \cos^2 \psi \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

$$\Gamma = (n_s - n_f) \frac{\omega l}{c} = \frac{2\pi l}{\lambda} (n_s - n_f). \quad (2.108)$$

O parâmetro  $\Gamma$  depende da diferença de índice de refração entre os eixos rápido e lento da placa birrefringente e do comprimento do cristal na direção de propagação do feixe. A frequência angular será fixa em nosso estudo.

Figura 11 – representação da placa birrefringente. O eixo lento forma um ângulo  $\psi$  com a direção x fixa no sistema de referência do laboratório.



Fonte: Autor, 2012. Adaptado de [42].

Além dos elementos ópticos, as matrizes de Jones também são utilizadas para descrever o comportamento do feixe ao passar por interfaces, isto é, para levar em conta a perda na energia do feixe transmitido por conta da reflexão. Estamos interessados aqui no comportamento do feixe transmitido pela interface. Identificando a componente do vetor polarização paralela ao plano de incidência como horizontal e a componente perpendicular a esse plano como vertical, a matriz de transmissão é dada por

$$T = \begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

onde  $t_p$  e  $t_s$  são definidos pelas equações (2.77) e (2.75), respectivamente. Dado um feixe cujo vetor de Jones é  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ , o estado de polarização desse feixe após passar pela interface caracterizada pela matriz (2.109) é

$$\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_p A \\ t_s B \end{bmatrix}. \quad (2.110)$$

No caso de incidência normal, a intensidade transmitida ( $I$ ) é proporcional a  $|\vec{E}|^2$ . Assim, a menos de uma constante de proporcionalidade,

$$I = \vec{E}^* \cdot \vec{E} = |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2. \quad (2.111)$$

Conforme discutido, a atividade óptica ocasiona a rotação do vetor polarização. Vamos descrever esse efeito no formalismo de Jones utilizando a matriz de rotação de um vetor. Temos que a matriz que rotaciona um dado vetor de um ângulo  $\beta$  é [46]

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \mp \text{sen}(\beta) \\ \pm \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

onde os sinais positivo no elemento  $R_{12}$  e negativo no elemento  $R_{21}$  indicam que a rotação é no sentido anti-horário. Caso a rotação seja no sentido horário, os sinais desses elementos são trocados. Desta forma, para um feixe que se propaga num cristal que apresenta atividade óptica, o ângulo de rotação do vetor polarização na saída do cristal é dado pelo produto da atividade óptica por unidade de comprimento incluindo o efeito eletro-giratório, equação (2.98), com a espessura do cristal na direção de propagação, ou seja,

$$\beta = \rho l. \quad (2.113)$$

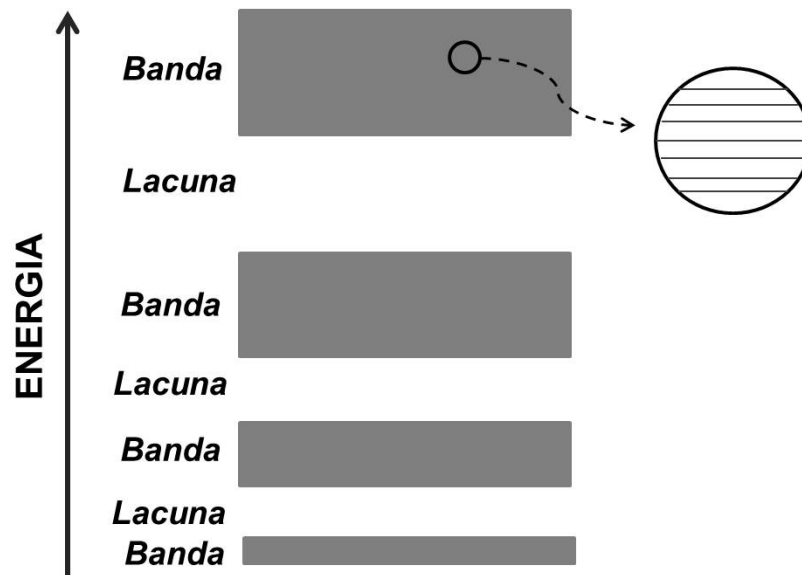
## 2.10 Condução de eletricidade nos sólidos

Os cristais fotorrefrativos são fotocondutores e eletro-ópticos o que significa que podem conduzir eletricidade com incidência de luz e tem seus índices de refração lineares alterados pela presença de um campo elétrico, respectivamente. O efeito fotorrefrativo é a combinação dessas duas propriedades: é a modulação do índice de refração linear do material com a incidência de luz de comprimento de onda adequado [22]. Essa combinação de efeitos está diretamente relacionada com as características do cristal conduzir eletricidade com a incidência de luz e o meio apresentar o efeito Pockels. A fim de compreender essa combinação de efeitos faremos a seguir uma abordagem sucinta aos mecanismos de condução elétrica em sólidos.

Eletricamente falando, os materiais podem ser classificados como condutores, isolantes ou semicondutores. A qual classe um dado material pertence pode ser determinada utilizando a quantização de energia da mecânica quântica e o princípio de exclusão de Pauling. Os átomos isolados apresentam níveis de energia discretos os quais os elétrons podem ocupar. De acordo com o

princípio da exclusão de Pauling, cada estado quântico é ocupado por apenas um elétron. Quando os átomos são reunidos para formar um dado material, as funções de onda dos átomos isolados se superpõem. Nesta configuração, o princípio da exclusão de Pauling ainda exige que cada elétron ocupe um estado quântico diferente. Formam-se, então, bandas de energia. Essas bandas contêm vários níveis individuais de energia muito próximos entre si. A Figura 12 ilustra um caso hipotético de um sólido, onde se observa quatro bandas de energia e dentro dessas bandas vários níveis de energia (detalhe na figura). Entre as bandas, existem lacunas (“gap” no inglês) de energia proibidas, o que significa que um elétron não pode assumir valores de energia nessas lacunas.

Figura 12 – níveis de energia para um sólido.



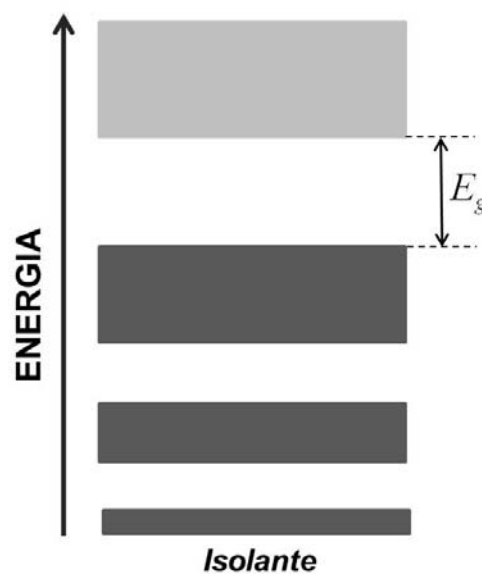
Fonte: Adaptado de [47].

### 2.10.1 Isolantes

O isolante é um material por onde não flui uma corrente elétrica direcionada. Nesses materiais, conforme Figura 13, o nível ocupado de maior energia coincide com o topo de uma banda, chamada de banda de valência por ser ocupada pelos elétrons de valência dos átomos isolados. Essa banda é separada da banda não ocupada acima dela, chamada de banda de condução, por uma lacuna de energia considerável –  $E_g$ .  $E_g$  é muito maior que a energia térmica ( $k_B T$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e T a temperatura) de uma partícula a temperatura ambiente. A razão pela qual esses materiais não conduzem corrente elétrica se deve ao fato de que todos os níveis de energia estão preenchidos até o topo da banda de valência. Ao aplicar um campo elétrico a esse

material, os elétrons ficam sujeitos à ação de uma força elétrica, e a princípio teriam sua energia cinética aumentada. Porém, todos os níveis de energia permitidos até a banda de valência estão ocupados. A banda de condução está separada da de valência por  $E_g$ . O valor de  $E_g$  para isolantes é da ordem de 5 eV. Desta forma, os elétrons da banda de condução não são excitados termicamente ou eletricamente para a banda de condução, e assim não podem ter as suas energias cinéticas aumentada pelo campo elétrico aplicado e dar origem a uma corrente elétrica direcionada. Por isso, esses materiais são chamados de isolantes.

Figura 13 – diagrama de energia de um sólido isolante.



Fonte: Adaptado de [47].

## 2.10.2 Condutores

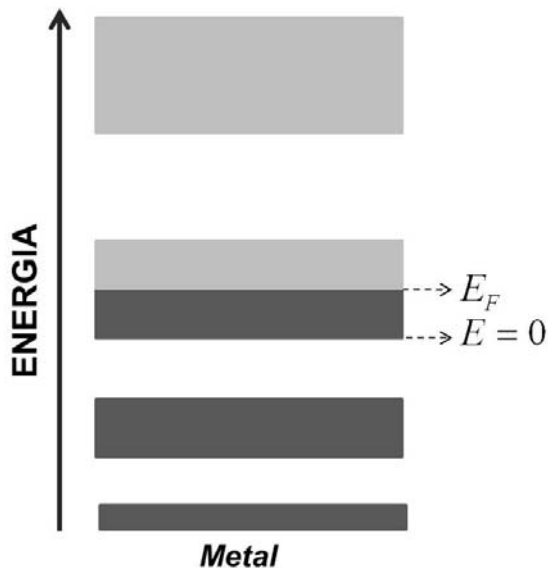
Já nos condutores, conforme Figura 14, o nível de energia mais alto ocupado se encontra no interior de uma banda. Atribuindo o nível de energia mais baixo dessa banda a energia  $E = 0$ , segue que, na temperatura do zero absoluto, a energia do nível mais alto ocupado é a energia de Fermi ( $E_F$ ). Nesta temperatura, todos os estados quânticos permitidos aos elétrons com energia menor que  $E_F$  estão ocupados. Por outro lado, todos os estados com  $E > E_F$  estão vazios. Para  $T > 0$ , a probabilidade de se encontrar um estado de energia  $E$  ocupado é dada por

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}, \quad (2.114)$$



onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Desta forma, como existem muitos estados vazios dentro dessa banda, é possível que os elétrons dessa banda absorvam energia elétrica proveniente de um campo elétrico aplicado e se movimentem, pois os elétrons podem ocupar estados de maior energia dentro dessa banda.

Figura 14 – diagrama de energia de um condutor de eletricidade.

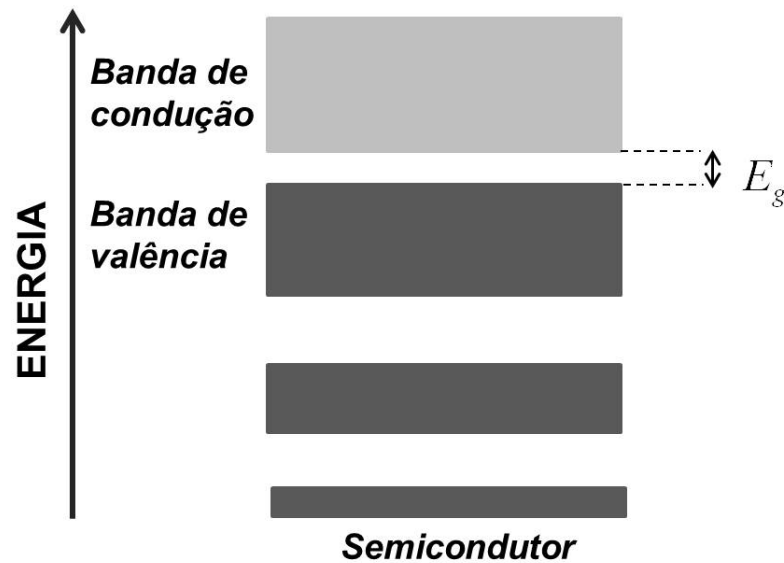


Fonte: Adaptado de [47].

### 2.10.3 Semicondutores

Por outro lado, conforme Figura 15, os semicondutores tem uma estrutura de bandas semelhante a dos isolantes. Porém, a largura da banda proibida é pequena o suficiente para permitir que elétrons da banda de valência sejam excitados termicamente à banda de condução. Uma vez que os elétrons estejam nesta banda podem se movimentar na presença de um campo elétrico aplicado. Como exemplo, nos semicondutores de silício a largura da banda proibida é da ordem de 1,1 eV.

Figura 15 – diagrama de energia de um semicondutor. A largura da banda proibida entre a banda de valência e a banda de condução é pequena o suficiente para que elétrons possam ser excitados termicamente da banda de valência para a banda de condução.

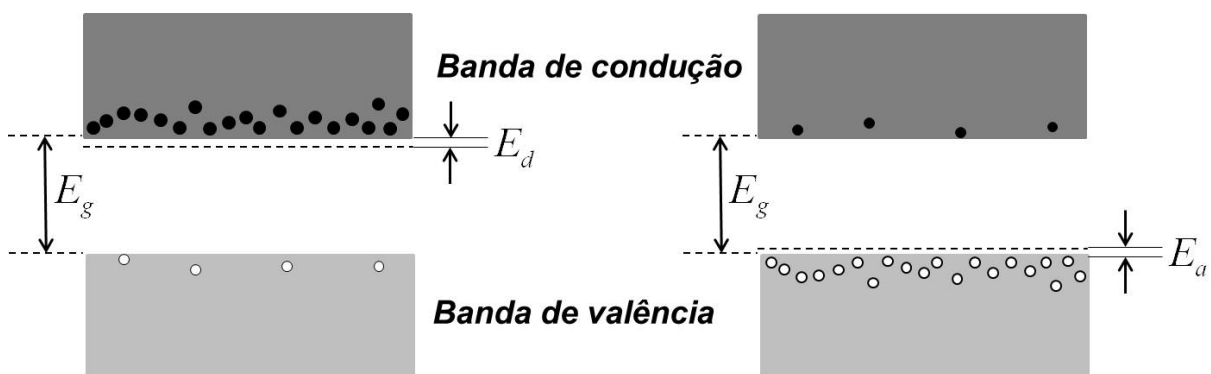


Fonte: Adaptado de [47].

Os mecanismos de condução de eletricidade nos semicondutores são muito interessantes do ponto de vista físico e tecnológico. Num semicondutor nominalmente puro, também chamado de intrínseco, onde não existe dopante, quando um elétron é excitado da banda de valência para a banda de condução, a banda de valência fica com ausência de um elétron. O elétron na banda de condução fica livre para se movimentar. Além disso, o buraco que ficou na banda de valência devido à ausência desse elétron se comporta como uma partícula de carga “+e”. Para descrever a condutividade elétrica desses materiais, o movimento dos buracos deve ser considerado. Um fato muito interessante nos semicondutores é que a sua condutividade elétrica pode ser controlada com a substituição de alguns íons da rede cristalina por outros de tamanhos aproximadamente iguais, mas valência diferente. Esse processo é chamado de dopagem. Isso implica no surgimento de alguns níveis de energia localizados na banda proibida. Esse fato pode facilitar a condução de eletricidade tanto por elétrons quanto por buracos. Quando o novo átomo tem valência maior que os átomos da rede, níveis de energia com elétrons surgem na lacuna, conforme Figura 16 – a, onde este nível tem uma energia  $E_d$  abaixo da banda de valência. Esses elétrons são facilmente excitados termicamente para a banda de condução, onde ficam livres para se movimentar. Esse tipo de semicondutor é chamado de tipo *n*. No caso da dopagem com átomos de valência menor, surgem níveis aceitadores de elétrons na lacuna, conforme Figura 16 – b, onde este nível tem energia  $E_a$  acima do todo da

banda de condução. Elétrons são facilmente excitados da banda de valência para esses níveis, e a banda de valência fica com ausência de elétrons, ou excesso de buracos. Neste caso, o semiconductor é chamado do tipo  $p$ . A condutividade elétrica dos semicondutores também pode ser alterada com a incidência de luz de comprimento de onda adequado, pois elétrons e/ou buracos podem ser excitados ao absorverem a energia de fótons incidentes. Um exemplo de semiconductor do tipo  $n$  é o silício dopado com átomos de fósforo (representado por P na tabela periódica). O silício tem valência 4 e o fósforo 5. No caso de semiconductor do tipo  $p$ , tem-se o silício dopado com átomos de alumínio (representado por Al na tabela periódica). Nesse caso, o átomo de alumínio tem valência 3.

Figura 16 – diagrama de energia para semicondutores do tipo a)  $n$ ; b)  $p$ .



Fonte: Adaptado de [47].

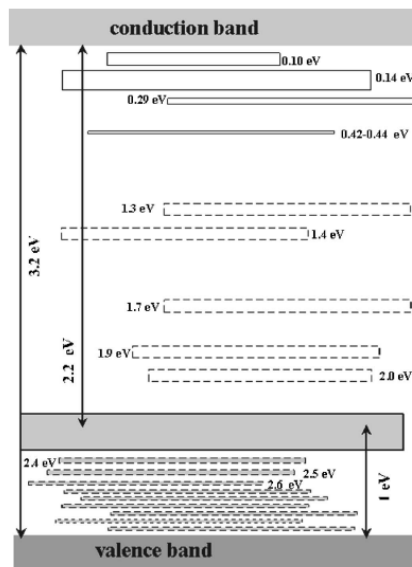
#### 2.10.4 Cristais fotorrefrativos

Os mecanismos de condução elétrica nos semicondutores servem de base para explicar os cristais fotorrefrativos. Esses cristais possuem uma banda de valência separada da banda de condução por uma lacuna típica de materiais isolantes. Porém, possuem defeitos que são intrínsecos ao processo de fabricação do cristal. Tais defeitos podem ser átomos ausentes na rede cristalina ou átomos ocupando a posição de outros na estrutura [22]. Nesse caso, os defeitos são chamados de intrínsecos. Quando os defeitos são criados proposadamente, dopando o cristal, os defeitos são chamados de extrínsecos. Como exemplo, tem-se a dopagem do niobato de lítio ( $\text{LiNbO}_3$ ) com ferro (Fe). Apesar do nome defeito soar estranho, esses defeitos são vitais ao efeito fotorrefrativo. Os defeitos criam estados de energia localizados entre a banda de valência e a banda de condução do cristal de forma semelhante aos condutores dopados discutido acima. Os portadores de carga nesses estados podem ser excitados à banda de condução e/ou valência através de luz de comprimento de onda adequado. Para isso, é necessário que a energia do fóton incidente coincida com a diferença de energia de um estado localizado e a energia do topo da banda de condução, no caso de excitação de

elétrons, ou a energia do topo da banda de valência, no caso de buracos.

Nesta tese estamos particularmente interessados no cristal  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) que pertence à família das silenitas. Esses cristais são fotorrefrativos e têm sido estudados extensivamente. Têm sido estudados para aplicações como processamento de sinais ópticos, processamento de imagens, holografia dinâmica e interferometria para medidas de vibração e deformação [48]. A família das silenitas consiste dos cristais  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ,  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  e  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ . Esses cristais são fotocondutores, apresentam atividade óptica, e os efeitos eletro-óptico, piezo-elétrico, elasto-óptico e eletro-giratório [21]. A Figura 17 mostra o diagrama de níveis de energia do BTO apresentado por Frejlich e colaboradores em 2007 [12]. Conforme se observa, existem vários níveis de energia localizados entre a banda de valência e a banda de condução.

Figura 17 – níveis de energia na banda proibida do cristal BTO.



Fonte: Frejlich e colaboradores, 2007 [12].

Uma vez que os elétrons são excitados para a banda de condução e/ou os buracos para a banda de valência, esses portadores de carga podem se movimentar por difusão e/ou arraste. A difusão é o movimento dos portadores de carga devido à variação da concentração com a posição. Já o arraste é o movimento dos portadores de carga devido ao campo elétrico. O movimento dos portadores de carga por difusão e/ou arraste dá origem à corrente elétrica no material. A corrente de arraste ( $J_a$ ) é dada por

$$J_a = \sigma E, \quad (2.115)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica e  $E$  o campo elétrico total.  $E$  é a soma do campo elétrico aplicado ao cristal com o campo criado por possível distribuição não-homogênea de cargas no meio. Nos materiais em que existe movimento simultâneo de elétrons e buraco, a condutividade é a soma da condutividade devida aos elétrons com a devida aos buracos. Em termos das mobilidades dos portadores de carga, a condutividade total do meio é [49]

$$\sigma = e(n_0\mu_n + p_0\mu_p), \quad (2.116)$$

onde  $e$  é o módulo da carga do elétron,  $n_0$  a densidade de elétrons na banda de condução,  $\mu_n$  a mobilidade dos elétrons,  $p_0$  a densidade de buracos na banda de valência e  $\mu_p$  a mobilidade dos buracos. A corrente de difusão, em uma dimensão, é [49]

$$J_{dif} = -eD_p \frac{dp(x)}{dx} + eD_n \frac{dn(x)}{dx}, \quad (2.117)$$

onde  $D_p$  e  $D_n$  são os coeficientes de difusão para elétrons e buracos, respectivamente, e  $p(x)$  e  $n(x)$  as densidades de buracos e elétrons na posição  $x$ .

Os mecanismos de transportes comentados acima junto com a possibilidade de modular o índice de refração do meio via campo elétrico fazem dos cristais fotorrefrativos meios muito interessantes para aplicações. No caso da holografia [22, 42, 50], um padrão de luz modulado, em geral o resultado da interferência de dois feixes mutuamente coerentes, é incidido no material. As regiões do padrão que apresentam intensidades maiores irão excitar mais elétrons e/ou buracos para as bandas de condução e/ou valência do que as regiões de intensidades menores. Isso origina uma distribuição de cargas não-uniforme no meio. Considerando, por simplicidade, que não existe campo elétrico aplicado, surgirá uma corrente elétrica de difusão no material, pois de acordo com a equação (2.117) os portadores de carga migrarão das regiões de maior concentração para as regiões de menor concentração. Isso implica numa assimetria na distribuição de cargas no meio e origina um campo elétrico modulado espacialmente. Esse campo por sua vez, interage com o meio e via efeito Pockels modula o índice de refração do mesmo. Removendo os feixes ópticos essa modulação espacial do índice de refração pode permanecer gravada no material por períodos de frações de segundos até anos. Ao incidir um feixe óptico no meio, a modulação de índice de refração funciona como uma grade de difração. No caso de o feixe incidente tiver as mesmas características de um dos feixes que foi utilizado para gravar o padrão, a difração desse feixe resulta num feixe com as mesmas características do outro utilizado na gravação. Esse procedimento é utilizado na holografia para a

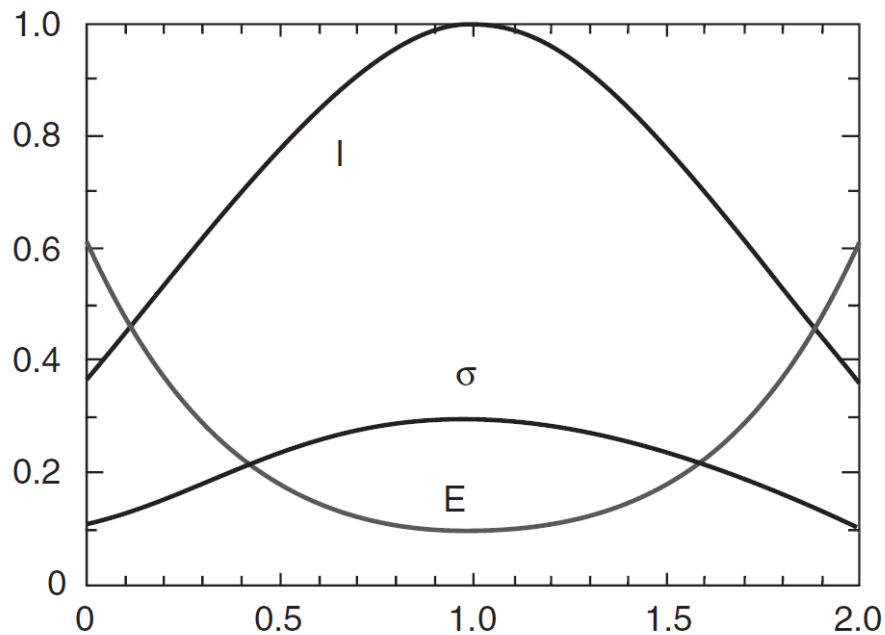
reconstituição de imagens. Uma característica interessante é que a intensidade dos feixes utilizados para gravar o padrão de luz no meio não precisa ser alta. Em alguns materiais, pode ser da ordem de alguns  $\text{mW}/\text{cm}^2$ .

A aplicação de um campo elétrico externo ao meio durante o processo de gravação holográfica pode favorecer o transporte de cargas. Porém, iluminação não-uniforme e resistência nos contatos elétricos entre a amostra e os eletrodos implicam num transporte de cargas não-homogêneo que por sua vez resulta numa distribuição não-homogênea de cargas [20]. O resultado dessa distribuição é a criação de um campo elétrico interno à amostra que tem sentido oposto ao aplicado. Esse campo é chamado de campo elétrico de blindagem (em inglês “electric screening field”) e será representado por  $E_{scr}$ . A consequência desse campo é o enfraquecimento do campo elétrico aplicado. A figura a seguir é o resultado da simulação de Frejlich [22], onde um feixe com perfil gaussiano incide num meio fotorrefrativo. De acordo com a equação (2.116), nas regiões de maior intensidade, a condutividade ( $\sigma$ ) é maior. Assumindo que a densidade corrente é constante ao longo da amostra, temos a relação

$$J(x) = \sigma(x)E(x) = cte. \quad (2.118)$$

Isso implica que nas regiões onde a condutividade é maior, o campo elétrico é menor, conforme representado na Figura 18. Nesta situação, o campo no interior da amostra não é dado simplesmente pela razão entre a diferença de potencial elétrica aplicada aos eletrodos e a distância entre os mesmos. Desta forma, para levar em conta o campo elétrico de blindagem, é introduzido um fator adimensional  $\xi$  que multiplica o campo elétrico aplicado. Esse fator é chamado de fator de blindagem e varia de 0 a 1. Nas regiões da amostra onde o campo elétrico total é próximo do aplicado,  $\xi$  é próximo de 1, e onde o campo de blindagem é intenso,  $\xi$  é próximo de 0. Por ser muito difícil de calcular  $\xi$ , esse parâmetro deve ser determinado experimentalmente o que pode ser feito medindo grandezas conhecidas e comparando com os resultados experimentais, sendo o parâmetro  $\xi$  ajustado para fornecer os resultados conhecidos.

Figura 18 – simulação de um feixe óptico com perfil gaussiano (curva I) incidindo num cristal fotorrefrativo. A condutividade elétrica do meio ( $\sigma$ ) segue a distribuição de intensidade. Isto implica num campo elétrico não-uniforme.



Fonte: Frejlich, 2006 [22].

## 2.11 Efeito fotocrômico

O efeito fotocrômico é a dependência do coeficiente de absorção linear com a intensidade do feixe. Esse efeito se deve a população de níveis de energia vazios mais próximos à banda de valência (níveis rasos). Um estudo detalhado desse efeito nos cristais BTO foi realizado por dos Santos e colaboradores em 2007 [51]. Neste trabalho foi verificado que iluminando o cristal com radiação de comprimento de onda 514,5 nm o cristal fica escuro nas regiões iluminadas. Isso se deve a população de centros vazios mais próximos à banda de condução o que aumenta o coeficiente de absorção nos comprimentos de onda correspondentes. Na ref. [22], tem-se uma fotografia do cristal iluminado com radiação de comprimento de onda de 532 nm.

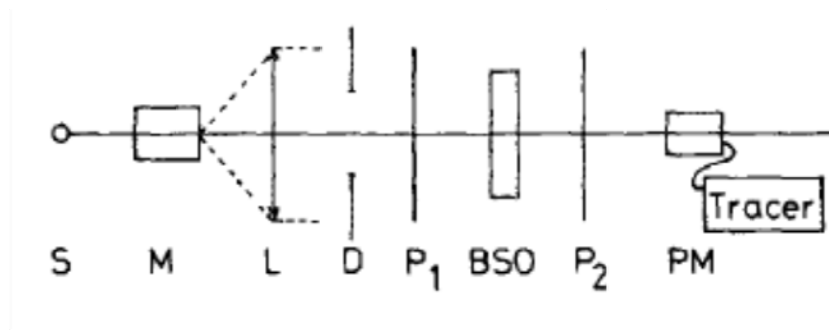
## 2.12 Técnicas para determinação do coeficiente eletro-óptico efetivo e do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado das silenitas

O coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) é um parâmetro fundamental dos cristais silenitas do

ponto de vista de aplicações. Para determinar este parâmetro das silenitas, um dos métodos mais usados é o proposto por Henry e colaboradores [18]. A teoria por trás deste procedimento se baseia na mudança do estado de polarização de um feixe polarizado linearmente incidente no cristal. Essa mudança se deve à atividade óptica e a birrefringência induzida pelo campo elétrico aplicado. Em geral, o estado de polarização do feixe ao sair do cristal é elíptico. Manipulando matematicamente a elipticidade (razão entre o eixo menor e maior da elipse) desse feixe, os autores chegaram numa expressão simples para determinar  $r_{ef}$  descrita abaixo juntamente com o procedimento experimental. Essa configuração também pode ser utilizada para determinar o coeficiente de blindagem ( $\xi$ ) do campo elétrico aplicado. Para isso, é necessário saber o valor de  $r_{ef}$  e ajustar a teoria aos resultados experimentais com  $\xi$  sendo o parâmetro de ajuste. Além disso, os autores obtiveram uma expressão para a intensidade do feixe transmitido pelo cristal colocado entre um polarizador e um analisador. Essa expressão também poderia ser utilizada para determinar  $r_{ef}$ . Porém, o procedimento experimental e a análise dos resultados requerem maiores esforços.

O aparato experimental proposto por Henry e colaboradores [18] é representado na figura a seguir. Este é composto por uma fonte de luz (S), um monocromador (M), uma lente (L), um diafragma (D) para controlar a área iluminada do cristal, um polarizador ( $P_1$ ) para controlar a direção de polarização do feixe incidente, o cristal em estudo sob ação de campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ), um analisador ( $P_2$  - segundo polarizador) e uma fotomultiplicadora conectada a um sistema de registro de dados.

**Figura 19 – aparato experimental proposto por Henry e colaboradores para determinar o coeficiente eletro-óptico.**



Fonte: Henry e colaboradores, 1986 [18].

O procedimento experimental consiste em rotacionar o analisador  $P_2$  para determinar as intensidades máxima e mínima transmitidas, para duas orientações de polarização do feixe incidente no cristal rotacionadas de  $45^\circ$ . Em outras palavras, escolhe-se uma orientação ( $\theta$ ) arbitrária para a



polarização do feixe incidente ( $P_1$ ) e medem-se as intensidades máxima ( $I_{máx}$ ) e mínima ( $I_{mín}$ ) transmitida por  $P_2$ . Com isso, determina-se a visibilidade  $V_\theta$  para esta orientação definida pela equação (2.119). Rotacionando o polarizador  $P_1$  de  $45^\circ$  com relação à orientação anterior ( $\theta$ ), o procedimento é repetido e  $V_{\theta+45^\circ}$  determinado para esta orientação. Apesar de o feixe incidente ser polarizado linearmente, após o cristal o feixe óptico é elipticamente polarizado devido à birrefringência induzida no cristal pelo campo elétrico aplicado.

$$V_\theta = \frac{I_{máx} - I_{mín}}{I_{máx} + I_{mín}}. \quad (2.119)$$

Uma vez determinados  $V_\theta$  e  $V_{\theta+45^\circ}$ , substitui-se esses valores na equação (2.120) para determinar  $\delta$ . Após isso,  $r_{ef}$  é calculado através da equação (2.121).

$$V_\theta^2 + V_{\theta+45^\circ}^2 = 1 + \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \text{sinc}^2 \frac{\phi}{2}\right)^2. \quad (2.120)$$

Na equação acima,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n^3 r_{41} E_y d \quad (2.121)$$

e

$$\phi = \sqrt{\delta^2 + \rho'^2}, \quad (2.122)$$

onde  $\delta$  e  $\rho'$  são as diferenças de fase introduzidas apenas pela birrefringência induzida e atividade óptica, respectivamente.  $\rho'$  é duas vezes o ângulo pelo qual a direção de polarização de um feixe polarizado linearmente é rotacionada.  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe no vácuo,  $n$  o índice de refração sem campo elétrico aplicado,  $r_{41}$  o coeficiente eletro-óptico em questão,  $E_y$  o campo elétrico aplicado e  $d$  a espessura do cristal na direção do campo elétrico aplicado. O produto  $E_y d$  é a diferença de potencial aplicada ao cristal. Apesar de o trabalho de Henry falar da medida de  $r_{41}$ , é o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) quem é medido, conforme discutido na seção 2.8. Nos casos em que  $\phi$  é pequeno,  $\text{sinc}^2(\phi/2) \cong 1$  que implica em

$$V_\theta^2 + V_{\theta+45^\circ}^2 \cong 1 + \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2. \quad (2.123)$$

Nessas situações,  $\rho'$  e, conseqüentemente a atividade óptica, não precisa ser conhecida.

Embora o experimento acima seja relativamente simples, possui alguns inconvenientes. O fato de a direção do feixe óptico ser normal as faces do cristal pode introduzir erros nas medidas, pois as múltiplas reflexões nas faces do cristal serão detectadas [19, 20]. Outro inconveniente está relacionado com o campo elétrico de blindagem (“electric screening field” -  $E_{scr}$ ). Conforme subseção 2.10.4, quando um material fotorrefrativo é submetido a  $E_{Ap}$ , o material responde criando um campo elétrico interno chamado de campo de blindagem. Este campo está relacionado com transporte de carga não-homogêneo [20] que resulta em acumulação de cargas. A origem desse transporte não-homogêneo de cargas está na iluminação não-homogênea do cristal e a resistência nos contatos elétricos entre o cristal e os eletrodos. A existência deste campo elétrico de blindagem fica clara ao comparar modelos teóricos com resultados experimentais obtidos com  $E_{Ap}$ . Tem sido demonstrada a necessidade de introduzir um fator adimensional ( $\xi$ ) multiplicando o campo elétrico aplicado para levar em conta  $E_{scr}$  [22-24]. O parâmetro  $\xi$  varia de 0 a 1 e espera-se que dependa da distribuição da intensidade do feixe óptico, do comprimento de onda e do campo elétrico aplicado [19, 21]. O parâmetro  $\xi$  pode ser determinado utilizando o experimento de Henry. Para esta finalidade, é necessário saber o valor de  $r_{ef}$ . O procedimento de medida de  $r_{ef}$  é realizado, mas o parâmetro de ajuste é  $\xi$ . Tem sido verificado que este parâmetro é sensível às condições experimentais. Desta forma, ao aplicar este parâmetro para descrever resultados experimentais, por exemplo, de gravação holográfica, discrepâncias podem ser observadas nos casos onde os feixes de gravação incidem obliquamente no cristal.

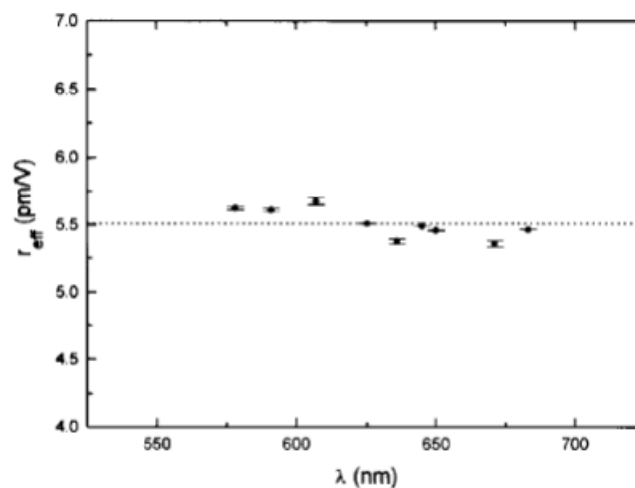
Existem outras técnicas na literatura para a determinação de  $r_{ef}$  e  $\xi$ . Essas são na verdade variações do método proposto por Henry e colaboradores [18]. A configuração experimental básica é a do cristal sob ação de campo elétrico entre um polarizador e um analisador, conforme Figura 19. No método proposto por Grunnet-Jepsen e colaboradores [23], é utilizado um campo elétrico alternado na forma de onda quadrada para eliminar o campo elétrico de blindagem nas medidas de  $r_{ef}$ . A determinação desse parâmetro se dá analisando a intensidade do feixe transmitido pelo sistema polarizador-cristal-analisador, e ajustando a teoria aos resultados. No procedimento de Papazoglou e colaboradores [28] a determinação de  $r_{ef}$  é realizada encontrando o valor de  $E_{Ap}$  para o qual a elipticidade do feixe emergente é nula. Efremidis e colaboradores [21] mediram a intensidade do feixe transmitido pelo sistema em função da direção do analisador.  $r_{ef}$  foi determinado ajustando a teoria aos resultados experimentais. Em todos esses casos, a direção do

feixe óptico é normal às faces do cristal como no experimento de Henry e, dessa forma, apresentam os mesmos inconvenientes ao aplicar o parâmetro  $\xi$  à experimentos de gravação holográfica onde a incidência é oblíqua.

## 2.13 Revisão bibliográfica relacionada à medida do coeficiente eletro-óptico do BTO

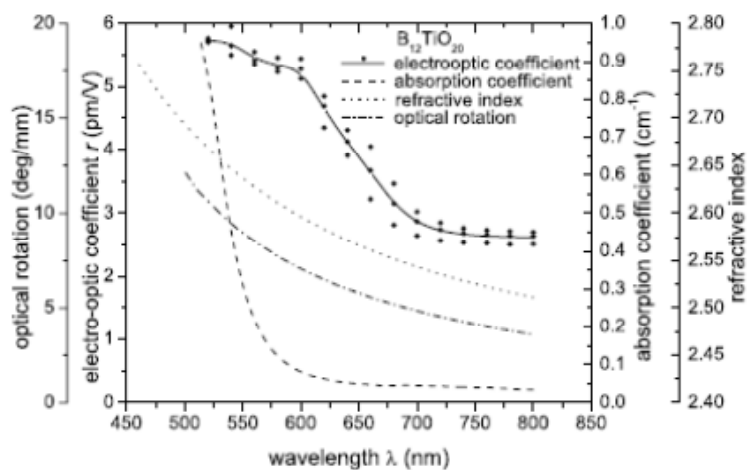
O coeficiente eletro-óptico é um dos parâmetros mais importantes para aplicação das silenitas. Alguns trabalhos reportam a medida do coeficiente  $r_{41}$ . Porém, como o efeito eletro-óptico linear aparece junto com os efeitos eletro-ópticos secundários, é medido o coeficiente eletro-óptico efetivo  $r_{ef}$ . Conforme discutido na seção 2.8, estimativas indicam que a contribuição do efeito eletro-óptico secundário para  $r_{ef}$  no caso do cristal  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) é muito pequena ( $\sim 0,2$  pm/V). Conforme Johnston [52], existe a possibilidade do coeficiente eletro-óptico depender do comprimento de onda. Alguns trabalhos reportam a medida de  $r_{41}$  do cristal BTO em comprimentos de onda específicos [4, 19]. Os valores encontrados diferem significativamente. Recentemente, a dispersão de  $r_{ef}$  no BTO tem gerado discussão na literatura. Conforme Figura 20, Papazoglou e colaboradores [28] mostraram em 1997 que não existe dispersão deste coeficiente na região do espectro compreendida entre 575 nm e 700 nm. Neste trabalho,  $r_{ef}$  apresentou um valor médio de  $\sim 5,5$  pm/V. Em 2006, Chmyrev e colaboradores [53] obtiveram  $r_{ef} = 5,8 \pm 0,4$  pm/V independente do comprimento de onda na região visível do espectro. Já Efremidis e colaboradores [21] apresentaram em 2009 (Figura 21) dispersão considerável de  $r_{ef}$  na região do espectro compreendida entre 500 nm e 800 nm. Neste trabalho,  $r_{ef}$  varia de  $\sim 5,75$  pm/V a 3,0 pm/V neste intervalo de comprimento de onda. Porém, conforme Figura 22, em 2011 de Oliveira e colaboradores [29] mostraram não haver dispersão de  $r_{ef}$  entre  $\sim 500$  nm e  $\sim 650$  nm.  $r_{ef}$  apresentou um valor médio próximo de 5,5 pm/V corroborando com o trabalho de Papazoglou. Os autores sugerem que a dispersão aparente de  $r_{ef}$  nas medidas de Efremidis pode estar relacionada com a possibilidade dos polarizadores não serem adequados para determinada faixa de comprimento de onda, e a intensidade do feixe incidente que pode induzir uma densidade alta de elétrons na banda de condução, e conseqüentemente a criação do campo de carga espacial, que é oposto ao aplicado.

Figura 20 – coeficiente eletro-óptico efetivo em função do comprimento de onda.



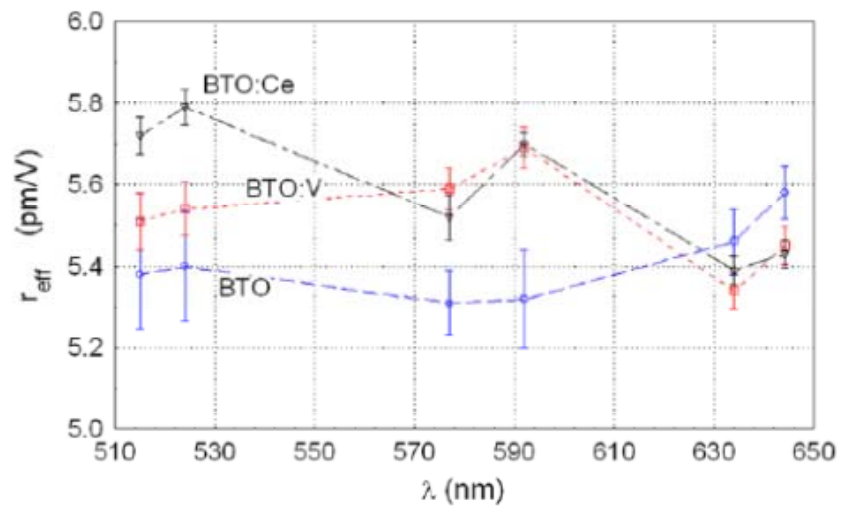
Fonte: Papazoglou e colaboradores, 1997 [28].

Figura 21 – de interesse nesta figura o coeficiente eletro-óptico que é representado pela linha cheia com círculos cheios.



Fonte: Efremidis e colaboradores, 2009 [21].

Figura 22 – coeficiente eletro-óptico efetivo em função do comprimento de onda para o cristal BTO nominalmente puro e dopado. De interesse especial nesta tese é o BTO nominalmente puro.



Fonte: de Oliveira e colaboradores, 2011 [29].

Nesta tese realizamos a medida de  $r_{ef}$  em 780 nm utilizando um procedimento diferente onde o feixe incide obliquamente na amostra. Além da medida de  $r_{ef}$  de forma simples, nosso procedimento permite a determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado. Verificamos que este coeficiente é muito sensível as condições experimentais.

# Parte II

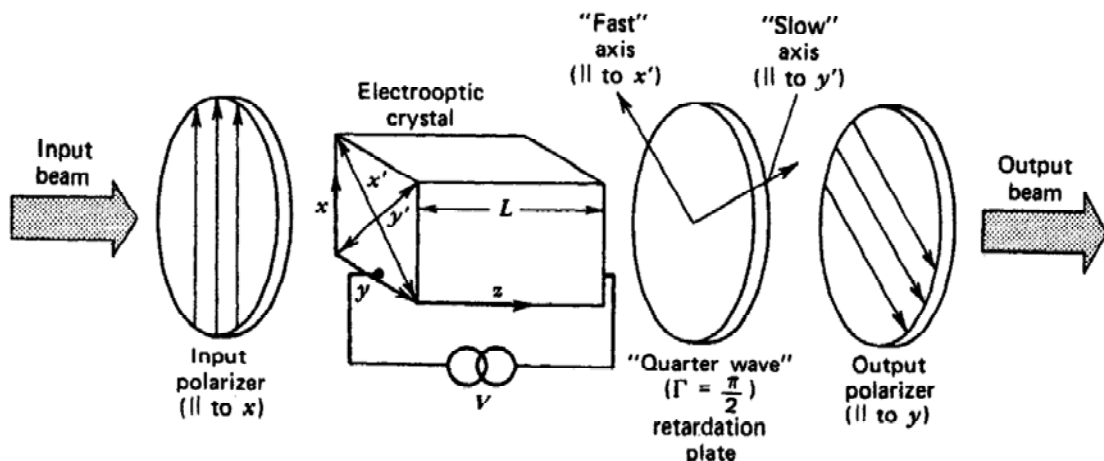
# Modelo

## 3 Modelo

### 3.1 Introdução

O efeito eletro-óptico linear, que implica na dependência linear do índice de refração linear do meio com o campo elétrico aplicado, é amplamente utilizado em sistemas que necessitam modular a intensidade e/ou fase de feixes ópticos. No caso dos moduladores de amplitude, utiliza-se um cristal eletro-óptico sob ação de campo elétrico aplicado entre dois polarizadores, conforme Figura 23 a seguir. Nesta figura, um feixe de luz não polarizado incide em um polarizador linear para tornar o feixe polarizado linearmente. Logo após, o feixe passa pelo cristal eletro-óptico que está conectado a uma fonte de tensão elétrica controlada para submeter o cristal a campo elétrico. Como o cristal é eletro-óptico, se torna birrefringente sob ação desse campo. Na figura é representada a orientação dos eixos rápido e lento em analogia à placa birrefringente. Desta forma, o estado de polarização do feixe é alterado. Um segundo polarizador é utilizado após o cristal. A intensidade do feixe resultante é função do campo elétrico aplicado, uma vez que as componentes do vetor polarização nas direções paralela e perpendicular ao eixo de transmissão desse segundo polarizador são funções desse campo.

Figura 23 – representação de um modulador de intensidade óptica. Um feixe de luz não polarizado incide em um polarizador linear. Logo após o feixe polarizado linearmente atravessa o cristal sob ação de campo elétrico controlado. Como o cristal se torna birrefringente pela ação do campo, o estado de polarização do feixe é alterado. O feixe resultante passa por um segundo polarizador que dependendo do valor do campo elétrico aplicado pode absorver totalmente o feixe.



Fonte: Yariv, 1997 [42].

Neste trabalho, estudamos a modulação da intensidade do feixe numa configuração onde um feixe polarizado linearmente incide obliquamente num cristal eletro-óptico sob ação de campo elétrico aplicado. Como no caso da Figura 23, o cristal muda as componentes do vetor polarização devido à birrefringência induzida. Porém, agora temos que levar em conta os coeficientes de transmissão nas faces do cristal, pois, conforme discutido na seção 2.2.1, em incidência oblíqua os coeficientes de transmissão para polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência são diferentes. Nosso interesse é apresentar um procedimento alternativo para realizar a medida do coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) do cristal e determinar o fator de blindagem ( $\xi$ ) do campo elétrico aplicado. Apesar de neste procedimento realizarmos a modulação da amplitude do feixe, não queremos propor este procedimento como uma forma alternativa de modulação de amplitude, uma vez que essa situação apresentaria várias desvantagens comparada com as técnicas já utilizadas.

### 3.2 Desenvolvimento do modelo

O problema inicial consiste em determinar a intensidade do feixe transmitido pelo cristal submetido a campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ). De acordo com a Figura 24, um feixe, polarizado linearmente, incide obliquamente no cristal formando um ângulo de incidência  $\theta_i$ . Todos os ângulos são medidos com relação a normal à amostra. O ângulo de refração é  $\theta_r$ . Já na interface cristal-ar, conforme pode ser deduzido da figura, o ângulo de incidência é  $\theta_r$ . Conseqüentemente, o ângulo de refração nessa interface é igual ao de incidência na interface ar-cristal, ou seja,  $\theta_i$ .

Da Figura 24, temos que, por conta da incidência oblíqua, a distância percorrida pelo feixe dentro do cristal não é simplesmente a espessura do cristal  $L$ . Para calcular essa distância que vamos chamar de  $l_{ef}$ , temos que levar em conta a refração do feixe na interface ar-cristal. De acordo com a lei de Snell (equação (2.63)), temos que o ângulo interno de propagação está relacionado com o ângulo de incidência  $\theta_i$  por

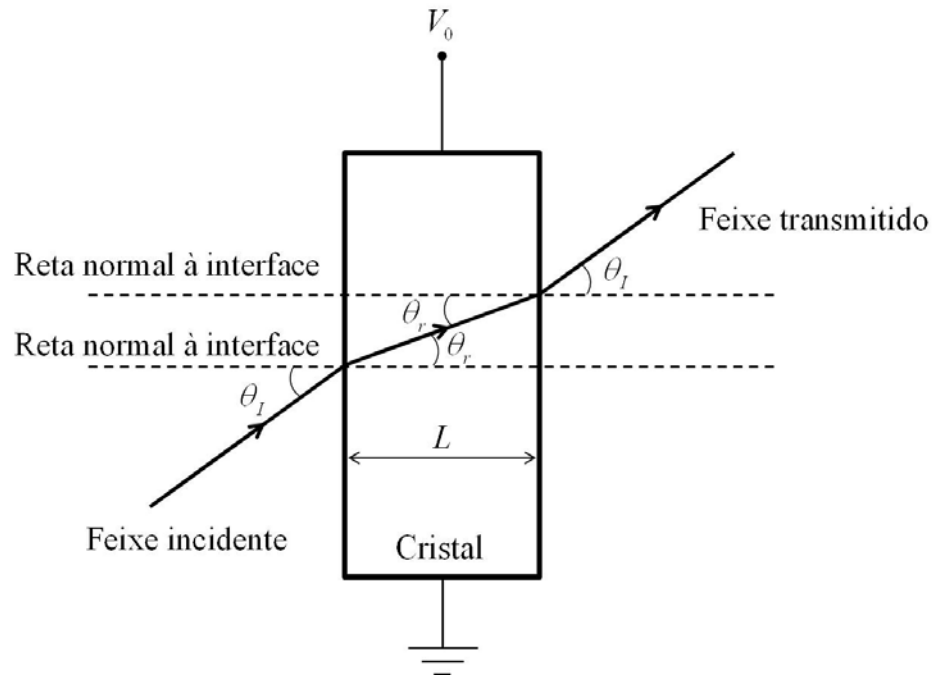
$$\text{sen } \theta_r = \frac{\text{sen } \theta_i}{n_{BTO}}, \quad (3.1)$$

onde foi assumido que o índice de refração do ar é 1. Assim,  $l_{ef}$  é dado por

$$l_{ef} = \frac{L}{\cos \theta_r} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \theta_i}{n_{BTO}^2}}}. \quad (3.2)$$

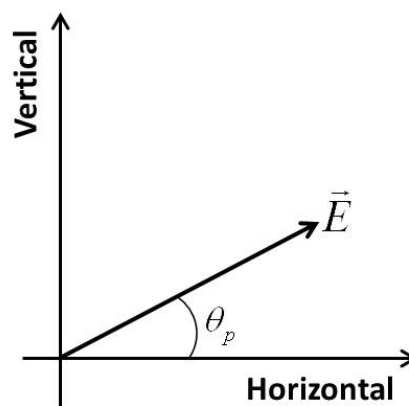


Figura 24 – feixe polarizado linearmente incidindo obliquamente num cristal fotorrefrativo submetido a campo elétrico aplicado. Os ângulos são medidos com relação à reta normal à interface. Os ângulos de incidência e refração na interface ar-cristal são  $\theta_i$  e  $\theta_r$ , respectivamente. Já na interface cristal-ar, os ângulos de incidência e refração são  $\theta_r$  e  $\theta_t$ , respectivamente.



Fonte: Autor, 2013.

Figura 25 – feixe incidente no cristal polarizado linearmente. Esse feixe forma um ângulo  $\theta_p$  com a direção horizontal que é paralela ao plano de incidência.



Fonte: Autor, 2013.

Para descrever o comportamento do feixe óptico ao passar pelo cristal que se torna birrefringente pela aplicação de campo elétrico, vamos utilizar o formalismo de Jones apresentado na seção 2.9. Vamos considerar um feixe polarizado linearmente, cuja direção de polarização forma

um ângulo  $\theta_p$  com a direção horizontal, conforme Figura 25. De acordo com a equação (2.104), o estado inicial de polarização do feixe é

$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_p \\ \sin \theta_p \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Da equação (2.109), a matriz de Jones para a transmissão na interface ar-cristal é dada por

$$T_{a \rightarrow c} = \begin{bmatrix} t_{p,a \rightarrow c} & 0 \\ 0 & t_{s,a \rightarrow c} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

onde o índice  $a \rightarrow c$  implica que estamos utilizando os índices apropriados para esta interface nas equações (2.75) e (2.77). Nessas equações,  $n_1$  e  $n_2$  se referem aos índices de refração do ar ( $n_{ar}$ ) e do cristal ( $n_{BTO}$ ), respectivamente.  $t_{p,a \rightarrow c}$  e  $t_{s,a \rightarrow c}$  são dados a seguir.

$$\begin{cases} t_{p,a \rightarrow c} = \frac{2n_{ar}n_{BTO} \cos \theta_I}{n_{BTO}^2 \cos \theta_I + n_{ar} \sqrt{n_{BTO}^2 - n_{ar}^2 \sin^2 \theta_I}} \\ t_{s,a \rightarrow c} = \frac{2n_{ar} \cos \theta_I}{n_{ar} \cos \theta_I + \sqrt{n_{BTO}^2 - n_{ar}^2 \sin^2 \theta_I}} \end{cases}. \quad (3.5)$$

Seguindo o formalismo de Jones, o estado de polarização do feixe imediatamente após cruzar a interface ar-cristal é o produto da matriz de Jones para interface (equação (3.4)) pelo estado de polarização do feixe imediatamente antes da interface (equação (3.3)), ou seja,

$$E_{ac} = T_{a \rightarrow c} E_0. \quad (3.6)$$

Uma vez que o feixe está se propagando no interior do cristal, sofre ação da atividade óptica e da birrefringência induzida por  $E_{Ap}$ , o que altera o estado de polarização do feixe. De acordo com a equação (2.107), a matriz de Jones para a birrefringência induzida é

$$W(\psi, \Gamma) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2} \cos^2 \psi} + e^{i\frac{\Gamma}{2} \sin^2 \psi} & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi & e^{i\frac{\Gamma}{2} \cos^2 \psi} + e^{-i\frac{\Gamma}{2} \sin^2 \psi} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde, da equação (2.108),  $\Gamma = (n_s - n_f) \frac{\omega d}{c}$ . Da equação (2.112), a matriz de Jones que descreve a atividade óptica ( $R$ ) é a matriz de rotação de um vetor rotacionado de um ângulo  $\beta$ . Esse é o ângulo que o vetor polarização gira devido à atividade óptica. Temos então

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\rho d) & -\text{sen}(\rho d) \\ \text{sen}(\rho d) & \cos(\rho d) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde  $d$  é a distância percorrida pelo feixe e  $\rho$ , dado pela equação (2.98),

$$\rho = \rho_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\lambda n_{BTO}} \zeta_{41} E_{Ap} \quad (3.9)$$

a atividade óptica por unidade de comprimento incluindo o efeito eletro-giratório.  $\rho_0$  é a atividade óptica por unidade de comprimento com  $E_{Ap} = 0$ , e  $\zeta_{41}$  é um elemento do tensor eletro-giratório das silenitas. Conforme descrito anteriormente, no caso das silenitas  $\zeta_{41} = \zeta_{52} = \zeta_{63}$  e todos os outros elementos são nulos.

Para computar os efeitos simultâneos da atividade óptica e da birrefringência induzida, o cristal foi dividido hipoteticamente em  $N$  células infinitesimais, conforme Figura 26. De acordo com o formalismo de Jones, no limite infinitesimal, os efeitos simultâneos da atividade óptica e da birrefringência induzida em cada célula são dados pelo produto das respectivas matrizes de Jones. Na  $i$ -ésima célula temos  $W_i R_i$ . O estado de polarização resultante da primeira célula,  $(W_1 R_1) E_{ac}$ , é o estado de entrada para a segunda célula. O estado resultante da segunda,  $(W_2 R_2) [(W_1 R_1) E_{ac}] = (W_2 R_2) (W_1 R_1) E_{ac}$ , é a entrada da terceira. E assim sucessivamente até a  $N$ -ésima célula. Embora o produto de matrizes, em geral, não comute, a ordem que os efeitos são considerados em cada célula não importa porque no limite de  $N \rightarrow \infty$  essas matrizes se tornam a identidade, já que nesse limite  $d \rightarrow 0$  e das equações (3.7) e (3.8) resulta

$$W(\psi, \Gamma \rightarrow 0) = \begin{bmatrix} 1 \times \cos^2 \psi + 1 \times \text{sen}^2 \psi & -i \times 0 \times \text{sen} 2\psi \\ -i \times 0 \times \text{sen} 2\psi & 1 \times \cos^2 \psi + 1 \times \text{sen}^2 \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e

$$R = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\text{sen}(0) \\ \text{sen}(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

respectivamente. Na resolução numérica do problema, utilizamos  $N=10.000$  e verificamos que aumentando o número de células não altera os resultados. Procedendo, o estado de polarização do feixe imediatamente antes da interface cristal-ar é

$$E'_{ca} = [(W_N R_N) \dots (W_2 R_2) (W_1 R_1)] E_{ac}. \quad (3.12)$$

Como as matrizes  $W_i R_i$  são idênticas, temos que o termo  $(W_N R_N) \dots (W_2 R_2) (W_1 R_1)$  é igual a  $(WR)^N$ , onde  $W$  e  $R$  são as matrizes de Jones para a birrefringência induzida (equação (3.7)) e atividade óptica em qualquer uma das células (equação (3.8)), respectivamente. Desta forma, a equação (3.12) pode ser simplificada para

$$E'_{ca} = (WR)^N E_{ac}. \quad (3.13)$$

Conforme equação (2.109), a matriz de transmissão para a interface cristal-ar é

$$T_{c \rightarrow a} = \begin{bmatrix} t_{p,c \rightarrow a} & 0 \\ 0 & t_{s,c \rightarrow a} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

De forma semelhante à equação (3.4), o índice  $c \rightarrow a$  implica que estamos utilizando os índices apropriados para a interface cristal-ar nas equações (2.75) e (2.77). Neste caso,  $n_1$  e  $n_2$  se referem aos índices de refração do cristal ( $n_{BTO}$ ) e do ar ( $n_{ar}$ ), respectivamente. Conforme discutido acima, o ângulo de incidência na interface cristal-ar é igual ao ângulo de refração ( $\theta_r$ ) na interface ar-cristal determinado pela equação (3.1). Com isso,  $t_{p,c \rightarrow a}$  e  $t_{s,c \rightarrow a}$  são dados a seguir.

$$\begin{cases} t_{p,c \rightarrow a} = \frac{2n_{BTO}n_{ar} \cos \theta_r}{n_{ar}^2 \cos \theta_r + n_{BTO} \sqrt{n_{ar}^2 - n_{BTO}^2 \sin^2 \theta_r}} \\ t_{s,c \rightarrow a} = \frac{2n_{BTO} \cos \theta_r}{n_{BTO} \cos \theta_r + \sqrt{n_{ar}^2 - n_{BTO}^2 \sin^2 \theta_r}} \end{cases}. \quad (3.15)$$

Procedendo, o estado de polarização do feixe ao cruzar o cristal ( $E_{ca}$ ) é obtido multiplicando a matriz de Jones para a interface cristal-ar, equação (3.14), pelo vetor de Jones que descreve o estado de polarização do feixe imediatamente antes desta interface, equação (3.13). Ou seja,

$$E_{ca} = T_{c \rightarrow a} E'_{ca}. \quad (3.16)$$

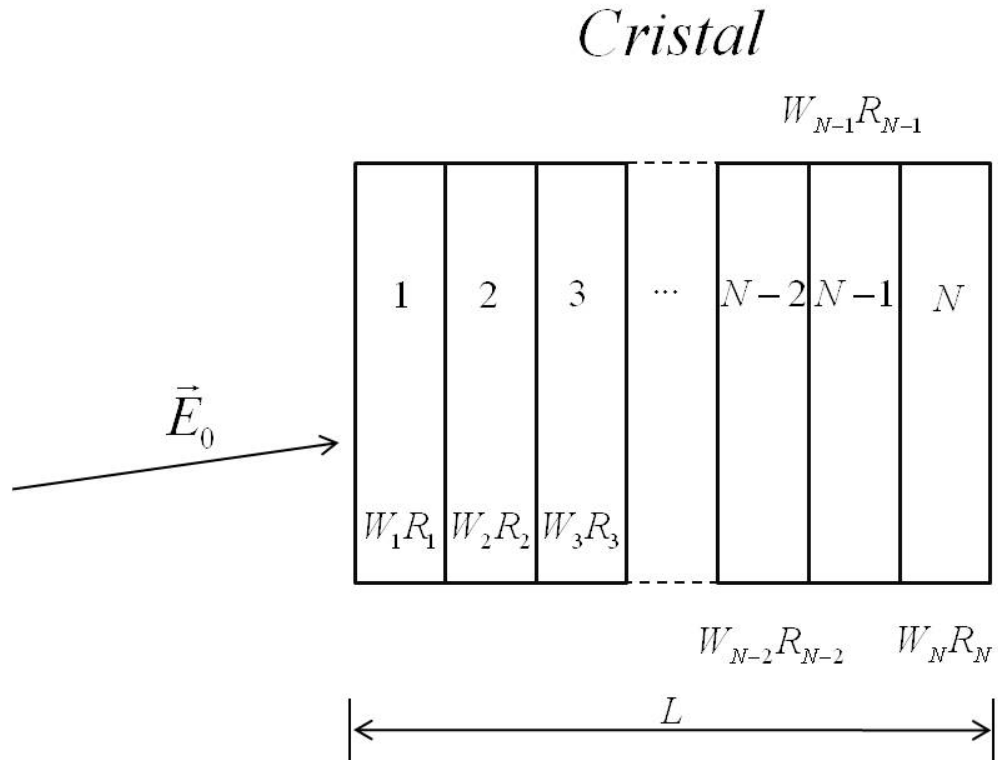
Utilizando  $E'_{ca}$  da equação (3.13), segue

$$E_{ca} = [T_{c \rightarrow a} (WR)^N T_{a \rightarrow c}] E_0. \quad (3.17)$$

Desta forma, a matriz de Jones para o cristal em incidência oblíqua, que é a matriz a qual multiplicada pelo estado de polarização do feixe antes de entrar no cristal fornece o estado de polarização depois do cristal, é dada por

$$M = T_{c \rightarrow a} (WR)^N T_{a \rightarrow c}. \quad (3.18)$$

Figura 26 – cristal dividido em N células para computar o efeito da atividade óptica e da birrefringência induzida por campo elétrico aplicado.



Fonte: Autor, 2012.

A matriz  $(WR)^N$  na equação (3.18) pode ser determinada analiticamente utilizando a identidade de Chebyshev [34], onde se tem

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \frac{A \operatorname{sen}(NK\Lambda) - \operatorname{sen}[(N-1)K\Lambda]}{\operatorname{sen}(K\Lambda)} & B \frac{\operatorname{sen}(NK\Lambda)}{\operatorname{sen}(K\Lambda)} \\ C \frac{\operatorname{sen}(NK\Lambda)}{\operatorname{sen}(K\Lambda)} & \frac{D \operatorname{sen}(NK\Lambda) - \operatorname{sen}[(N-1)K\Lambda]}{\operatorname{sen}(K\Lambda)} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

com

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2}(A+D) \right]. \quad (3.20)$$

Conforme demonstrado no apêndice A, no caso específico de interesse dessa tese,  $\psi = 45^\circ$ . Com isso, temos

$$(WR)^N = \begin{pmatrix} \cos X & -e^{i\theta} \operatorname{sen} X \\ e^{-i\theta} \operatorname{sen} X & \cos X \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde  $X = \sqrt{(\rho l_{ef})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$  e  $\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\rho l_{ef}}\right)$ . Nessas equações,  $\Gamma = (n_s - n_f) \frac{\omega l_{ef}}{c}$ .

Assim, o problema pode ser resolvido tanto de forma numérica quanto de forma analítica. Neste último caso teríamos, substituindo a equação (3.21) na equação (3.18), que a matriz de Jones para o cristal em incidência oblíqua é

$$M = \begin{bmatrix} \cos(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} & -e^{i\Theta}\sin(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{s,a \rightarrow c} \\ e^{-i\Theta}\sin(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} & \cos(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{s,a \rightarrow c} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Substituindo esse resultado na equação (3.17), temos que o estado de polarização do feixe emergente é dado por

$$E_{ca} = \begin{bmatrix} \cos(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c}E_{0,11} - e^{i\Theta}\sin(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{s,a \rightarrow c}E_{0,21} \\ e^{-i\Theta}\sin(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c}E_{0,11} + \cos(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{s,a \rightarrow c}E_{0,21} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

onde, de acordo com a equação (3.3),  $E_{0,11} = \cos\theta_p$  e  $E_{0,21} = \sin\theta_p$ .

Continuando, a intensidade do feixe transmitido medida pelo detector é

$$I_{Trans} = \frac{1}{2} \frac{n_{BTO}}{Z_0} |E_{ca}|^2, \quad (3.24)$$

onde  $n_{BTO}$  é o índice de refração do cristal,  $Z_0 = 377 \Omega$  é a impedância do espaço livre e  $\theta_r$  é o ângulo de incidência na interface cristal-ar que, conforme discutido, é igual ao ângulo de refração na interface ar-cristal.

Como será apresentada no capítulo 5, a intensidade do feixe transmitido pelo cristal varia com a aplicação de campo elétrico. Tal variação se deve à birrefringência induzida pelo campo elétrico aplicado e à diferença nos coeficientes de transmissão em incidência oblíqua. Para computar esta variação, definimos a variação na intensidade transmitida ( $VIT$ ) pelo cristal como sendo a razão entre a intensidade do feixe com campo elétrico aplicado diferente de zero [ $I_{Trans}(E_{Ap} \neq 0)$ ] e a transmitida com campo aplicado nulo [ $I_{Trans}(E_{Ap} = 0)$ ]. Em porcentagem, tem-se

$$VIT = \left[ \frac{I_{Trans}(E_{Ap} \neq 0)}{I_{Trans}(E_{Ap} = 0)} - 1 \right] \times 100, \quad (3.25)$$

que, de acordo com a equação (3.24), pode ser escrita, em termos do estado de polarização após o

cristal, como

$$VIT = \left[ \frac{|E_{ca}(E_{Ap} \neq 0)|^2}{|E_{ca}(E_{Ap} = 0)|^2} - 1 \right] \times 100. \quad (3.26)$$

No modelo não foi considerada a mudança dos coeficientes de transmissão devido ao campo elétrico aplicado porque a variação no índice de refração linear do cristal BTO é da ordem de  $10^{-5}$  o que resulta numa contribuição praticamente nula para  $VIT$ . Este fato foi verificado na resolução numérica do problema, e por isso não colocaremos aqui.

$VIT$  depende tanto dos parâmetros intrínsecos do cristal, como dos parâmetros controlados experimentalmente. A dependência com os parâmetros intrínsecos se deve ao fato que está relacionada aos coeficientes de transmissão nas interfaces do cristal, a atividade óptica e a birrefringência induzida por campo elétrico. Tais parâmetros são o índice de refração linear, a atividade óptica por unidade de comprimento e o coeficiente eletro-óptico efetivo. Os parâmetros controlados experimentalmente são o comprimento do cristal, o campo elétrico aplicado, o ângulo de incidência, a direção de polarização do feixe de entrada e a orientação do cristal com relação ao feixe incidente e ao campo aplicado. Em incidência normal, de acordo com a equação (2.79)  $t_p = t_s$  e consequentemente  $VIT$  é nula. Por outro lado, o valor absoluto de  $VIT$  cresce monotonicamente com o aumento do ângulo de incidência o que é atribuído à dependência angular da razão  $T_s/T_p$ , representada na Figura 8.

No capítulo seguinte é detalhada a configuração experimental utilizada para a detecção da  $VIT$  e os parâmetros utilizados no modelo para descrição dos resultados experimentais. A determinação de  $r_{ef}$  e  $\xi$  será feita no capítulo 5 através da medida de  $VIT$ , onde serão comparadas as previsões teóricas desta variação utilizando o modelo desenvolvido acima com os resultados experimentais.

# **Parte III**

## **Experimento**



## 4 Materiais e métodos

A família das silenitas consiste dos cristais  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ,  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  e  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ . Esses cristais são fotocondutores, apresentam atividade óptica, e os efeitos eletro-óptico, piezo-elétrico, elasto-óptico e eletro-giratório. Tem-se grande interesse tecnológico nesses cristais por conta da grande potencialidade de aplicação. Dentre esses cristais, o  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) se destaca por apresentar tempo de resposta relativamente curto e a menor atividade óptica entre as silenitas, sendo este último fato muito importante em aplicações holográficas, pois esse efeito reduz a eficiência de difração [54].

### 4.1 O cristal

O cristal BTO utilizado nesta tese foi crescido na Universidade Federal de Goiás. As dimensões do cristal são  $3,6 \times 8,4 \times 8,7 \text{ mm}^3$  ao longo das direções  $[\bar{1}\bar{1}0]$ ,  $[\bar{1}10]$  e  $[001]$ , respectivamente.

### 4.2 Parâmetros

As silenitas pertencem ao grupo espacial I23, onde somente os elementos  $r_{41}$ ,  $r_{52}$  e  $r_{63}$  do tensor eletro-óptico são diferentes de zero. Além disso, temos a seguinte relação entre esses coeficientes:  $r_{41} = r_{52} = r_{63}$ . Ou seja, os elementos não nulos do tensor são iguais e, desta forma, o tensor possui apenas um elemento independente. O tensor eletro-óptico das silenitas é representado a seguir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

De acordo com o que foi exposto, na medida de  $r_{41}$  estão embutidos o efeito piezo-elétrico inverso e o efeito elasto-óptico. Desta forma, vamos determinar experimentalmente o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) definido pela equação (2.99). No final do capítulo 2 foi realizada uma revisão bibliográfica acerca do coeficiente eletro-óptico das silenitas. Dos trabalhos da literatura, apenas um explorou as medidas em 780 nm [21]. O valor obtido foi, aproximadamente, 2,7 pm/V. No

capítulo seguinte apresentamos o resultados que obtivemos para  $r_{ef}$  em 780 nm.

Resultados experimentais de dos Santos e colaboradores [11] mostram que a atividade ótica por unidade de comprimento do cristal BTO em 780 nm é 4,3 °/mm. Por completeza, medimos esse parâmetro determinando o giro que a direção de polarização de um feixe polarizado linearmente sofre ao passar pelo cristal. Encontramos valor equivalente ( $\sim 4,3$  °/mm).

Apesar de os primeiros trabalhos acerca do coeficiente eletro-giratório do BTO, parâmetro  $|n_{41}|$ , apresentarem valores muito grandes e discrepantes, variando de 13 a cerca de 60 pm/V em 633 nm [4], os trabalhos mais recentes mostram que o valor desse parâmetro é menor que 0,5 pm/V [19, 43]. Mesmo pequeno este efeito foi levado em conta no nosso modelo.

A relação de dispersão do índice de refração linear do BTO já foi determinada experimentalmente. De acordo com Riehemann [55], o índice de refração ( $n$ ) em função do comprimento de onda ( $\lambda$ ) é dado por

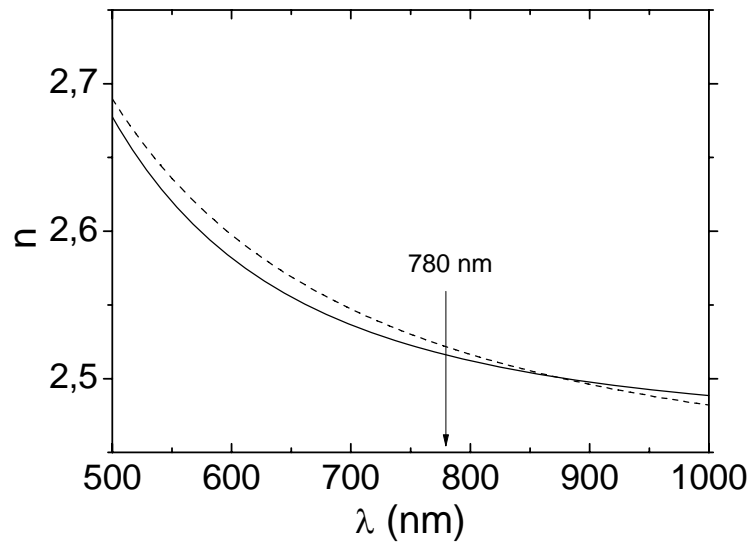
$$n(\lambda) = \frac{0,00863}{\lambda^4} + \frac{0,0199}{\lambda^2} + 2,46, \quad (4.2)$$

onde  $\lambda$  está em  $\mu\text{m}$ . Da referência [28], temos a relação de dispersão de Sellmeier para o BTO que é representada na equação a seguir com  $\lambda$  em nm.

$$n^2(\lambda) - 1 = \frac{4,8805811}{1 - \left(\frac{233}{\lambda}\right)^2} \quad (4.3)$$

As equações (4.2) e (4.3) estão representadas na Figura 27, de onde temos que o índice de refração do BTO em 780 nm são 2,516 e 2,522, respectivamente. Do ponto de vista prático, esses valores são equivalentes. Assim, vamos utilizar 2,52 como sendo o índice de refração do BTO ( $n_{BTO}$ ) em 780 nm.

Figura 27 – dependência do índice de refração com o comprimento de onda. As linhas cheia e tracejada representam as equações (4.2) e (4.3), respectivamente.



Fonte: Autor, 2013.

Resumindo, os parâmetros do BTO utilizados no modelo estão descritos na tabela a seguir com as respectivas fontes.

Tabela 1 – parâmetros do BTO utilizados no modelo.

Parâmetro	Símbolo	Valor do parâmetro	Referência
Coefficiente eletro-óptico efetivo	$r_{ef}$	$\sim 2,7$ pm/V (será determinado experimentalmente)	[21]
Atividade óptica	$\rho_0$	$4,3$ °/mm	[11]
Coefficiente eletro-giratório	$\eta_{A1}$	Menor que $0,5$ pm/V	[19, 43]
Índice de refração @ 780 nm	$n_{BTO}$	$2,52$	[28, 56]

A seguir descrevemos o arranjo experimental adotado bem como o procedimento para realizar as medidas da variação da intensidade do feixe transmitido.

### 4.3 Arranjo experimental e procedimento

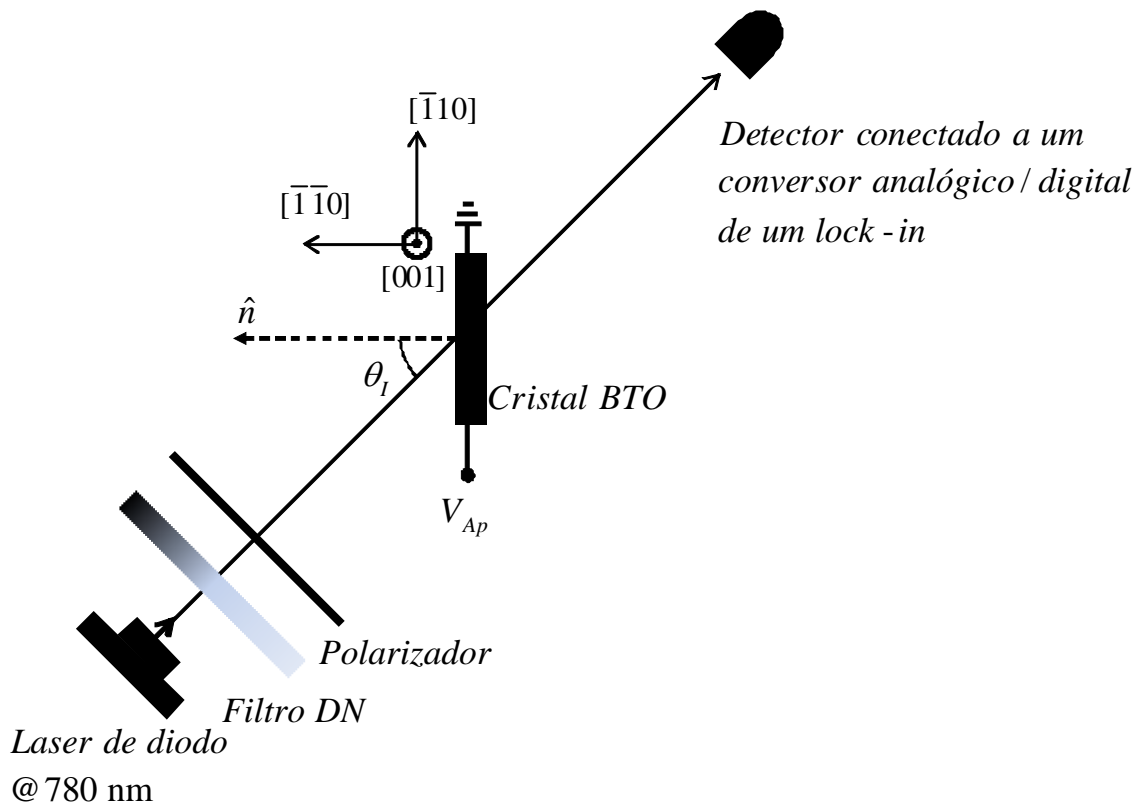
Para a determinação de  $r_{ef}$  utilizamos o aparato experimental representado na Figura 28. A fonte de luz é um laser de diodo operando em 780 nm do fabricante *laserline*. Apesar do laser ser polarizado linearmente, utilizamos um polarizador para controlar a direção de polarização do feixe

incidente. FDN é um filtro de densidade neutra usado para controlar a intensidade do feixe incidente. A diferença de potencial elétrico foi aplicada ao cristal utilizando uma fonte de tensão de alta voltagem *Glassman High Voltage* modelo H5P20L ( $0 \leq V_{Ap} \leq 5000$  V) controlada por computador através de uma das saídas analógicas (0-10 V) do *lock-in Signal Recovery* modelo 7265. Os terminais da fonte de tensão foram conectados a amostra utilizando uma mistura condutora de eletricidade constituída de esmalte de unha e grafite em pó descrita da referência [57]. As medidas foram realizadas com tinta condutiva de prata e os resultados foram os mesmos da mistura. Para detectar a radiação transmitida pela amostra foi usado um detector de silício *Silonex* modelo SLSD-71N2 (área  $5,08 \times 5,08$  mm<sup>2</sup>) alimentado por uma fonte de tensão contínua de 12 V. Este detector foi conectado a um dos conversores analógico/digital do *lock-in*, onde o sinal foi digitalizado e armazenado em arquivos de texto para futuro processamento. A evolução temporal do sinal era monitorada em tempo real na tela do computador. A taxa de aquisição de dados foi de um ponto a cada 76 ms.

O ângulo de incidência  $\theta_i$  foi determinado por geometria traçando na mesa óptica o caminho do feixe incidente e refletido na primeira face do cristal. Essa marcação foi realizada com o auxílio de um esquadro para desenho. Uma vez marcado os caminhos dos feixes incidentes e refletidos na mesa, foi medido o ângulo entre esses dois feixes, que é  $2\theta_i$ , utilizando um transferidor profissional *Desetec*. Estimamos que a precisão na determinação de  $\theta_i$  é menor que  $0,5^\circ$ .

Na Figura 28 é mostrada a orientação dos eixos cristalográficos com relação ao campo elétrico aplicado e ao feixe incidente. O campo elétrico é aplicado na direção  $[\bar{1}10]$  e a direção  $[\bar{1}\bar{1}0]$  coincide com a direção perpendicular à face do cristal que o feixe é incidido. A direção  $[001]$  é perpendicular ao plano de incidência.

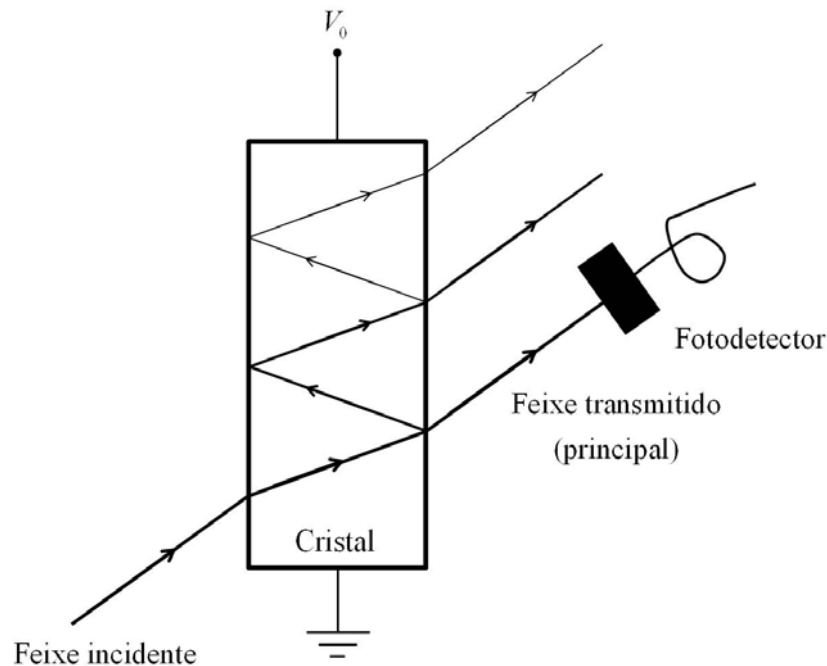
Figura 28 – representação do experimento utilizado nas medidas da variação da intensidade do feixe transmitido pela aplicação de campo elétrico.



Fonte: Autor, 2012.

Na configuração experimental proposta, é possível eliminar a detecção dos feixes refletidos internamente do cristal porque, como a incidência é oblíqua, o feixe principal tem um desvio com relação aos outros, conforme Figura 29. Assim, o detector foi posicionado para medir apenas o feixe principal. Em incidência normal, todos esses feixes se propagam na mesma direção, e, desta forma, não é possível eliminar os feixes refletidos internamente do detector.

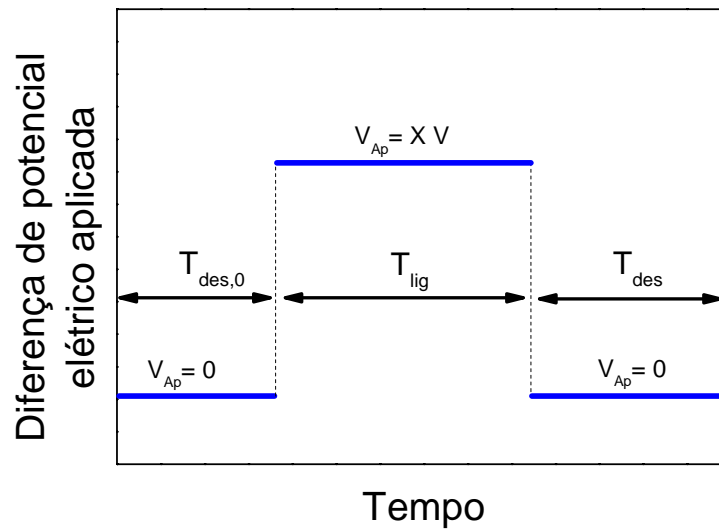
Figura 29 – feixe incidindo obliquamente no cristal. Em todas as interfaces ocorre reflexão e transmissão. Na interface cristal-ar, tem-se que o feixe principal apresenta um desvio com relação aos que surgem devido às reflexões múltiplas nas faces do cristal. Isso permite que seja medida apenas a intensidade do feixe principal com o fotodetector.



Fonte: Autor, 2013.

O procedimento experimental consistiu em monitorar a intensidade do feixe transmitido em função do tempo. Durante a medida desta intensidade, a fonte de tensão elétrica era ligada e desligada com uma determinada diferença de potencial aplicada para observar a variação da intensidade do feixe transmitido definida pela equação (3.25). A diferença de potencial aplicada em função do tempo é representada na Figura 30. A medida é iniciada com a fonte de tensão desligada, ou seja, com  $V_{Ap} = 0$  e permanece assim durante o intervalo de tempo  $T_{des,0}$ . A duração desse intervalo é o suficiente para que a intensidade do feixe transmitido não varie mais devido ao efeito fotocromico comentado na seção 2.11. Passado esse intervalo de tempo, a fonte de tensão é ligada aplicando uma diferença de potencial controlada via computador de X volts durante o intervalo de tempo  $T_{lig}$ . Esse intervalo deve ser o suficiente para que a intensidade do feixe transmitido atinja a condição de estado estacionário, pois pode variar por conta do campo elétrico de carga espacial criado com a excitação de portadores de carga. Após esse intervalo de tempo, a fonte de tensão é desligada e permanece assim até o final da medida, que ocorre quando a intensidade do feixe transmitido se torna igual a do início da medida.

Figura 30 – representação da diferença de potencial elétrico aplicada à amostra para realizar as medidas de *VIT*. A medida é iniciada com  $V_{Ap} = 0$ . Passado o intervalo de tempo  $T_{des,0}$ , a fonte de tensão elétrica é ligada aplicando uma diferença de potencial de  $X$  volts a amostra. Após o intervalo de tempo  $T_{lig}$ , a fonte de tensão é desligada e permanece assim até o final da medida.



Fonte: Autor, 2012.

O campo elétrico aplicado é dado por

$$E_{Ap} = \frac{V_{Ap}}{d}, \quad (4.4)$$

onde  $d$  é a distância entre os eletrodos, que, pela Figura 28 e a seção 4.1, é 8,4 mm.

# **Parte IV**

# **Resultados**



## 5 Dispersão do coeficiente eletro-óptico no infravermelho em cristais BTO

Conforme mencionado na seção 2.13, a dispersão do coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) dos cristais  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) na região visível do espectro e infravermelho próximo tem gerado discussão na literatura. Alguns trabalhos mostram que esse parâmetro não apresenta dispersão na região do espectro de 500 nm a 700 nm [28, 29], apresentando um valor médio de 5,5 pm/V. Porém, Efremidis e colaboradores [21] mostraram dispersão considerável, com  $r_{ef}$  variando de  $\sim 5,75$  pm/V a 3,0 pm/V no intervalo de 500 nm a 800 nm. Outro parâmetro pertinente relacionado aos cristais fotorrefrativos é o coeficiente de blindagem ( $\xi$ ) do campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ). Este coeficiente surge devido à resposta do meio a  $E_{Ap}$ . Essa resposta é a criação de um campo elétrico no meio ocasionado pela distribuição não-homogênea de carga, sendo esse campo chamado de campo de blindagem ( $E_{scr}$ ). De acordo com a literatura,  $\xi$  depende da intensidade do feixe incidente, do comprimento de onda e de  $E_{Ap}$  [19, 21].

Neste capítulo são realizadas medidas experimentais, as quais, através do modelo teórico desenvolvido no capítulo 3, permitem determinar  $r_{ef}$  e o coeficiente  $\xi$ . O procedimento consiste em medir a variação da intensidade do feixe transmitido pelo cristal em incidência oblíqua. A variação é provocada por  $E_{Ap}$  que altera as componentes do vetor polarização do feixe ao passar pelo cristal, e a diferença nos coeficientes de transmissão para polarização paralela ( $p$ ) e perpendicular ( $s$ ) ao plano de incidência. O procedimento foi aplicado a um cristal BTO em 780 nm.

### 5.1 Orientação dos eixos rápido e lento do cristal

A fim de utilizar o modelo desenvolvido, temos inicialmente que determinar o atraso de fase  $\Gamma$  que, de acordo com a equação (2.108), está relacionado com a orientação dos eixos rápido e lento do cristal com birrefringência induzida. A orientação desses eixos está relacionada com a orientação dos eixos cristalográficos com relação ao campo elétrico aplicado e a direção de propagação do feixe. Para isso, vamos utilizar a abordagem do elipsoide de índices desenvolvida no capítulo 2.

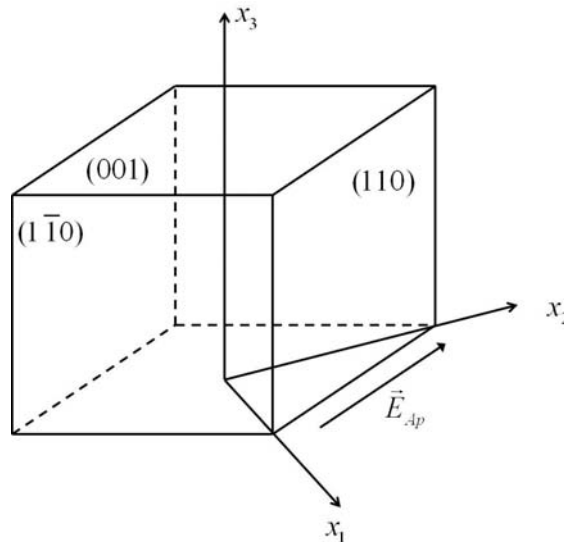
Com campo elétrico aplicado nulo ( $\vec{E}_{Ap} = 0$ ), o cristal é isotrópico, o que significa dizer que

apresenta o mesmo índice de refração para qualquer direção de propagação e polarização. Nesta situação, o elipsoide de índices é uma esfera cuja equação é

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_{BTO}^2} = 1, \quad (5.1)$$

onde  $n_{BTO}$  é o índice de refração do cristal com  $\vec{E}_{Ap} = 0$ . Com campo elétrico diferente de zero ( $\vec{E}_{Ap} \neq 0$ ), o cristal se torna anisotrópico apresentando birrefringência. Na configuração adotada neste trabalho, a orientação de  $\vec{E}_{Ap}$  com relação às faces do cristal ( $(1\bar{1}0)$ ,  $(001)$  e  $(110)$ ) e aos eixos cristalográficos ( $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ) é representada na Figura 31.  $\vec{E}_{Ap}$  está no plano  $x_1x_2$  e forma  $135^\circ$  e  $45^\circ$  com os eixos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. O feixe incide na face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  que é oposta à face  $(110)$ .

**Figura 31** – orientação do campo elétrico aplicado com relação às faces do cristal e dos eixos cristalográficos ( $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ).



Fonte: Adaptado de Garcia [58].

Nesta configuração,  $\vec{E}_{Ap}$  pode ser expresso como

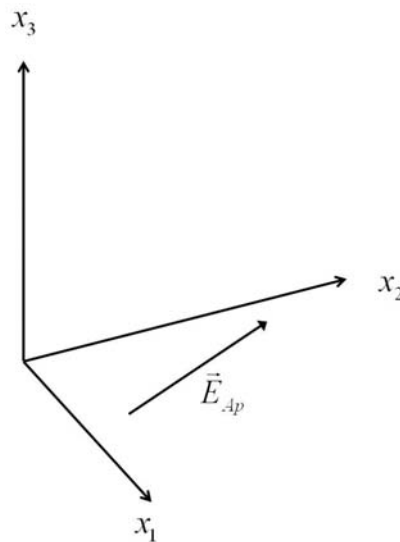
$$\vec{E}_{Ap} = \frac{E_{Ap}}{\sqrt{2}} (-\hat{x}_1 + \hat{x}_2). \quad (5.2)$$

Para determinar a orientação dos eixos rápido e lento desse cristal com birrefringência induzida, vamos partir da equação (2.92). Utilizando o tensor eletro-óptico do cristal BTO dado pela equação (4.1), tem-se que o elipsoide de índices na presença de  $\vec{E}_{Ap}$  pode ser escrito como

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_{BTO}^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} r_{41} E_{Ap} yz + \frac{2}{\sqrt{2}} r_{41} E_{Ap} xy = 1. \quad (5.3)$$

A fim de escrever esta equação numa forma onde não existem termos cruzados ( $yz$  e  $xy$ ), vamos representar o sistema de coordenadas da Figura 31 conforme Figura 32.

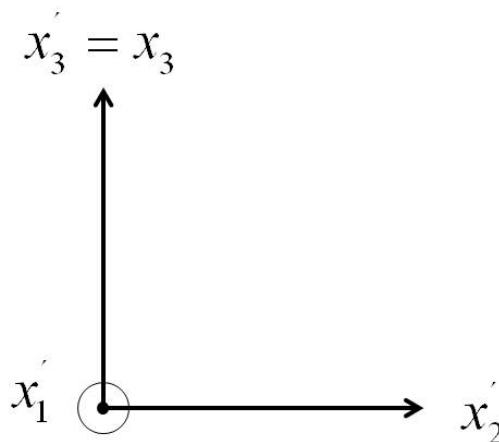
Figura 32 – representação do campo elétrico aplicado e dos eixos cristalográficos.



Fonte: Autor, 2012.

Rotacionando o sistema de coordenadas da Figura 32 de  $45^\circ$  no sentido horário em torno do eixo  $x_3$ , temos a nova orientação representada na Figura 33 vista pela face  $(1\bar{1}0)$ .

Figura 33 – sistema de coordenadas rotacionado de  $45^\circ$  no sentido horário em torno de  $x_3$ . Configuração vista pela face  $(1\bar{1}0)$ .



Fonte: Autor, 2012.

Desta forma, a relação entre as coordenadas no sistema de coordenadas antigo e no novo é

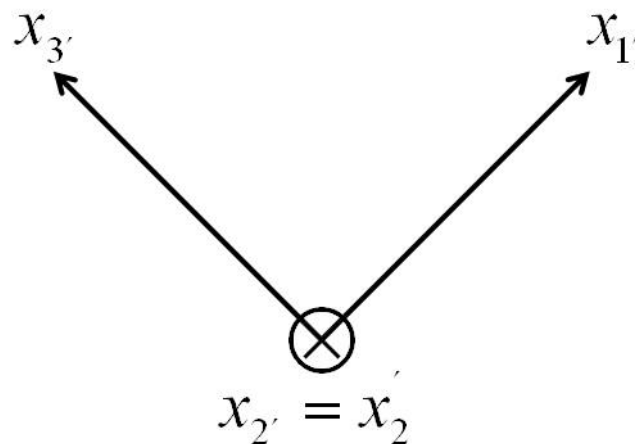
$$\begin{cases} x_3 = x_3' \\ x_1 = x_1' \cos 45^\circ + x_2' \sin 45^\circ \\ x_2 = -x_1' \sin 45^\circ + x_2' \cos 45^\circ \end{cases} \quad (5.4)$$

Substituindo as equações de (5.4) em (5.3), temos

$$\frac{x_1'^2 + z_1'^2}{n_{BTO}^2} + \frac{y_1'^2}{n_{BTO}^2} + 2r_{41} E_{Ap} z_1' x_1' = 1. \quad (5.5)$$

Realizamos agora uma rotação no sentido anti-horário de  $45^\circ$  em torno de  $x_2'$  (sistema de coordenadas mostrado na Figura 33). A nova configuração, vista pela face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  que é oposta a face  $(110)$ , é mostrada na Figura 34.

Figura 34 – sistema de coordenadas rotacionado de  $45^\circ$  no sentido anti-horário em torno de  $x_2'$ . Configuração vista pela face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  que é oposta à face  $(110)$ .



Fonte: Autor, 2012.

A relação entre as coordenadas do sistema anterior com relação ao novo é

$$\begin{cases} x_2 = x_2' \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3' + x_1') \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' - x_3') \end{cases} \quad (5.6)$$

Com isso, a equação do elipsoide de índices sem termos cruzados é obtida substituindo a equação

(5.6) em (5.5). Após um pouco de álgebra, temos

$$\left(\frac{1}{n_{BTO}^2} + r_{41}E_{Ap}\right)x_1^2 + \frac{x_2^2}{n_{BTO}^2} + \left(\frac{1}{n_{BTO}^2} - r_{41}E_{Ap}\right)x_3^2 = 1. \quad (5.7)$$

Comparando esta equação com a equação (2.91),

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

tem-se que os índices de refração para polarização na direção dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  estão relacionados com o campo elétrico aplicado por

$$\begin{cases} \frac{1}{n_{x_1}^2} = \frac{1}{n_{BTO}^2} + r_{41}E_{Ap} \\ \frac{1}{n_{x_2}^2} = \frac{1}{n_{BTO}^2} \\ \frac{1}{n_{x_3}^2} = \frac{1}{n_{BTO}^2} - r_{41}E_{Ap} \end{cases}. \quad (5.8)$$

Dessas relações, têm-se

$$\begin{cases} n_{x_1} = n_{BTO} \left(1 + n_{BTO}^2 r_{41} E_{Ap}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ n_{x_2} = n_{BTO} \\ n_{x_3} = n_{BTO} \left(1 - n_{BTO}^2 r_{41} E_{Ap}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}. \quad (5.9)$$

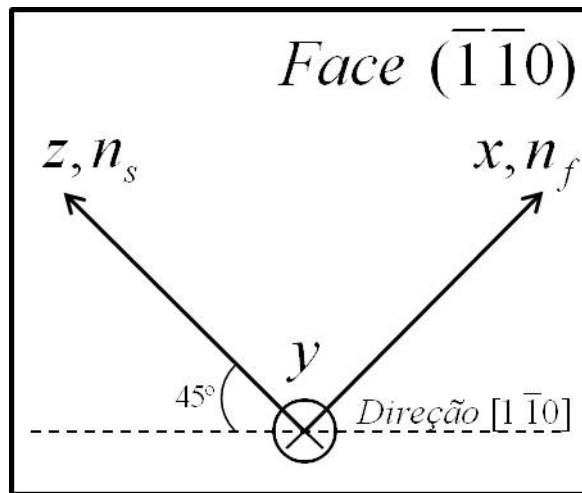
Em nossos experimentos, o termo  $n_{BTO}^2 r_{41} E_{Ap}$  é da ordem de  $10^{-5}$ , e, conseqüentemente, muito menor que 1. Expandindo os termos entre parênteses da equação (5.9) até primeira ordem, segue que os índices de refração na direção dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são

$$\begin{cases} n_{x_1} = n_{BTO} - \frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{Ap} \\ n_{x_2} = n_{BTO} \\ n_{x_3} = n_{BTO} + \frac{1}{2} n_{BTO}^3 r_{41} E_{Ap} \end{cases}. \quad (5.10)$$

Redefinindo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  como sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, vamos representar o sistema mostrado na Figura 34 de acordo com a Figura 35. Nessa figura, é representada a face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  que é paralela aos eixos  $x$  e  $z$ . Para um feixe incidente perpendicularmente a essa face, o índice de refração depende da direção de polarização. Nestas circunstâncias, o cristal se comporta como a

placa birrefringente discutida na seção 2.9. Utilizando os termos daquela seção, temos, de acordo com (5.10), que o eixo  $x$  possui índice de refração menor que o eixo  $z$ . Desta forma, vamos chamar  $n_{x_1}$  de  $n_f$  e  $n_{x_2}$  de  $n_s$  em referência a rápido e lento, respectivamente. Na Figura 35, é mostrado ainda que as direções  $x$  e  $z$  formam  $45^\circ$  com a direção horizontal que coincide com a direção  $[1\bar{1}0]$ .

Figura 35 – representação dos eixos rápido e lento do cristal que se torna birrefringente sob ação de campo elétrico aplicado. Esses eixos formam  $45^\circ$  com a direção horizontal que coincide com a direção  $[1\bar{1}0]$ .



Fonte: Autor, 2012.

De acordo com a equação (5.10), a diferença  $n_s - n_f$  é dada por  $n_{x_2} - n_{x_1} = 2\Delta n$ , onde  $\Delta n = 0,5n_{BTO}^3 r_{41} E_{Ap}$ . No caso de incidência normal, onde o feixe se propaga na direção  $[1\bar{1}0]$ , o atraso de fase definido na equação (2.108) é dado por

$$\Gamma = 4\pi \frac{l}{\lambda} \Delta n. \quad (5.11)$$

A orientação escolhida do cristal para propagação do feixe fornece o maior valor possível para  $\Gamma$ . Isto implica numa maior birrefringência induzida e, conseqüentemente, maior facilidade para a detecção da variação da intensidade do feixe transmitido. No caso de incidência oblíqua, que é o de interesse nesse trabalho, a determinação da quantidade  $n_s - n_f$  da equação (2.108) deve ser realizada utilizando o elipsoide de índices (5.7). Redefinindo o sistema de coordenadas da Figura 35, com as direções  $z = x_3$ ,  $x = x_1$  e  $y = x_2$ , sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e usando a definição de  $\Delta n$  acima, temos que a equação do elipsoide de índices do BTO dada pela equação (5.7), se torna

$$\frac{x^2}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{y^2}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{z^2}{n_{BTO}^2} = 1. \quad (5.12)$$

Vamos seguir o procedimento realizado na seção 2.3. Substituindo as coordenadas esféricas  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$  na equação (5.12), temos

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{n_{BTO}^2} = 1. \quad (5.13)$$

Nesta equação,  $\theta$  é o ângulo polar ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ) e  $\phi$  o ângulo azimutal ( $0 \leq \phi \leq 360^\circ$ ).  $r$  representa a distância do centro ao ponto do elipsoide de coordenadas  $\theta$  e  $\phi$ . Isolando  $r$ ,

$$r(\theta, \phi) = \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_{BTO}^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

Da geometria do problema, a direção de propagação do feixe é satisfeita para  $\phi = 135^\circ$  ou  $\phi = 315^\circ$ . Por simplicidade, vamos trabalhar apenas com  $\phi = 135^\circ$ . Nesta representação,  $\theta$  é o ângulo de refração ( $\theta_r$ ) na interface ar-cristal determinado pela equação (3.1), que é o ângulo de propagação no interior do cristal.

A fim de determinar o atraso de fase para qualquer ângulo de incidência  $\theta_i$  com a direção de propagação do feixe paralela à face  $(00\bar{1})$  ( $\phi = 135^\circ$  na equação (5.14)) da Figura 31, é necessário determinar os índices de refração para direções de polarização paralelas aos eixos lento e rápido do cristal birrefringente, cuja birrefringência foi induzida pelo campo elétrico aplicado. Nesta situação, o atraso de fase da equação (5.11) é dado por

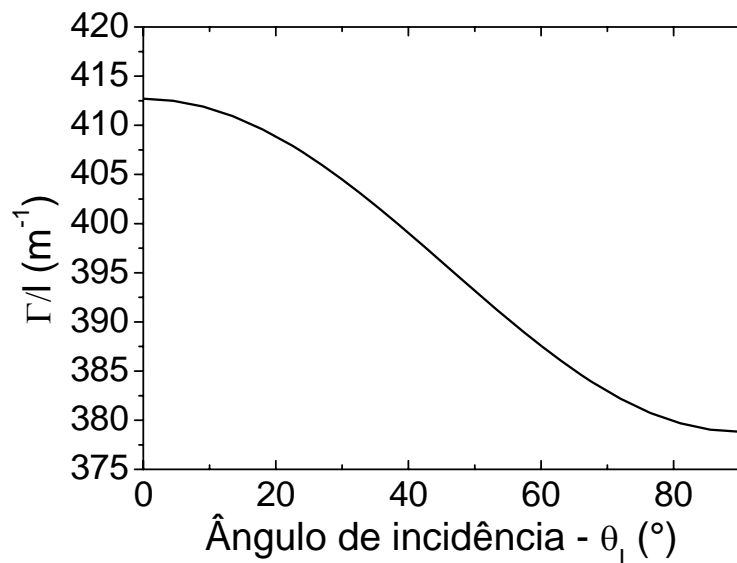
$$\Gamma = \left[ r(\theta = 90^\circ - \theta_r, \phi = 0) - r(\theta = 90^\circ + \theta_r, \phi = 90^\circ) \right] \frac{\omega l}{c}, \quad (5.15)$$

No caso da resolução numérica do problema,  $l$  é igual ao comprimento de uma célula ( $d$ ) na Figura 26. Já na resolução analítica do problema,  $l$  é o comprimento efetivo percorrido pelo feixe dentro do cristal ( $l_{ef}$ ), definido pela equação (3.2). Utilizando a equação (5.15), temos que o atraso de fase para uma dada direção de propagação do feixe ( $\theta_r$ ) é

$$\Gamma = \left\{ \left[ \frac{\cos^2 \theta_r}{(n_{BTO} + \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta_r}{n_{BTO}^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{\cos^2 \theta_r}{(n_{BTO} - \Delta n)^2} + \frac{\sin^2 \theta_r}{n_{BTO}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{\omega l}{c}. \quad (5.16)$$

A Figura 36 a seguir mostra a variação do atraso de fase por unidade de comprimento ( $\Gamma/l$ ) com o ângulo de incidência, para  $E_{Ap} = 6,0$  kV/cm,  $n_{BTO} = 2,52$  e  $r_{ef} = 5,5$  pm/V. Observa-se redução de cerca de 9 % de  $\Gamma/l$  com o aumento do ângulo de incidência. Essa redução é por causa da diminuição da diferença entre os índices de refração para os eixos rápido e lento do cristal à medida que  $\theta_i$  aumenta.

Figura 36 – variação do atraso de fase por unidade de comprimento com o ângulo de incidência. Utilizou-se os seguintes parâmetros  $E_{Ap} = 6,0$  kV/cm,  $n_{BTO} = 2,52$  e  $r_{ef} = 5,5$  pm/V.



Fonte: Autor, 2012.

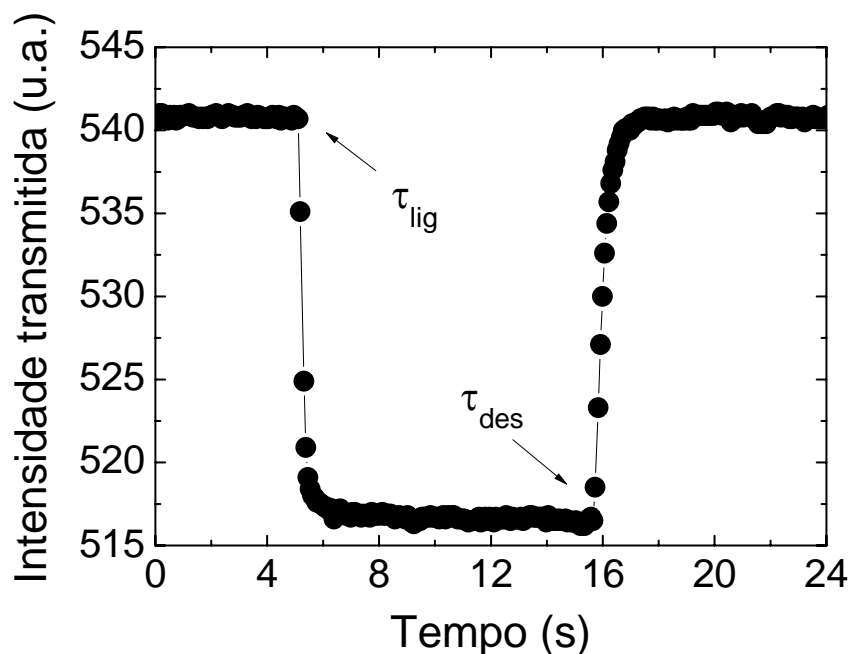
## 5.2 Determinação do coeficiente eletro-óptico efetivo

Iniciamos aqui os passos que levam à determinação do coeficiente eletro-óptico do BTO seguindo o procedimento descrito na Figura 30. A Figura 37 a seguir apresenta o comportamento da intensidade do feixe transmitido em função do tempo para o cristal BTO. A direção do vetor polarização foi paralela ao plano de incidência,  $\theta_p = 0^\circ$ , o ângulo de incidência,  $\theta_i$ , igual a  $34,5^\circ$  e a intensidade do feixe incidente foi de  $2,8$  mWcm<sup>-2</sup>. Para iniciar esta medida foi esperado que a intensidade do feixe transmitido se estabilizasse devido ao clareamento (*bleaching*) que, ao contrário do efeito fotocromico descrito na seção 2.11, é a população de níveis de energia mais próximos da banda de valência com a incidência de luz. No instante de tempo  $\tau_{lig}$  a fonte de tensão elétrica foi ligada aplicando uma diferença de potencial elétrico de 5000 V e, conseqüentemente, um campo elétrico de aproximadamente 6,0 kV/cm. Conforme se observa na Figura 37, a intensidade do feixe



transmitido reduziu-se e ficou constante num valor menor que o inicial. No instante  $\tau_{des}$  a fonte de tensão foi desligada. De acordo com a figura, a intensidade do feixe transmitido retornou ao valor inicial. A mudança da intensidade do feixe transmitido se deve a birrefringência induzida por  $E_{Ap}$ , por conta da mudança das componentes do vetor polarização e o fato de a incidência ser oblíqua, já que os coeficientes de transmissão para polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência são diferentes. Neste caso particular, tem-se, de acordo com a equação (3.25), que a variação da intensidade transmitida,  $VIT$ , é  $-4,7\%$ .

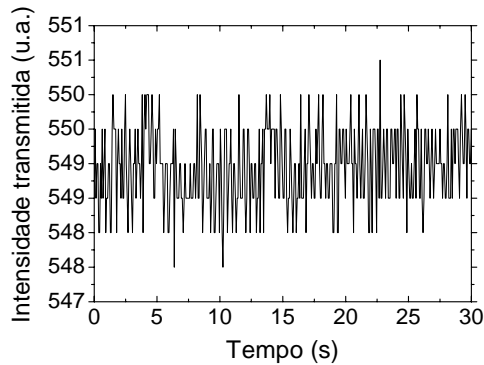
Figura 37 – comportamento da intensidade óptica transmitida pelo cristal. No instante  $\tau_{lig}$  a fonte de tensão foi ligada aplicando uma diferença de potencial elétrico de 5000 V, e, conseqüentemente, um campo elétrico de aproximadamente 6,0 kV/cm. A fonte foi desligada no instante  $\tau_{des}$  ficando a amostra sujeita a um campo elétrico aplicado nulo.



Fonte: Autor, 2012.

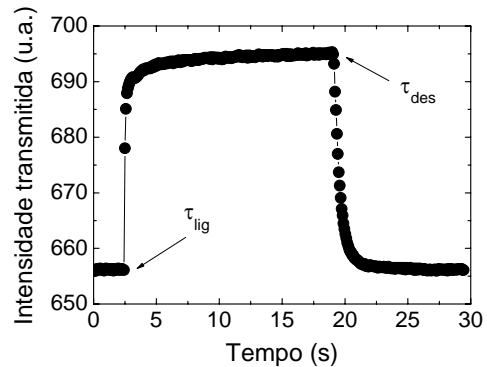
O procedimento realizado na figura anterior foi aplicado a outras configurações. Verificamos que  $VIT$  é fortemente dependente dos parâmetros experimentais. Por exemplo, mantendo o ângulo de incidência, a intensidade do feixe incidente, o valor de  $E_{Ap} \neq 0$  ( $\sim 6,0$  kV/cm), e mudando apenas a direção de polarização do feixe incidente,  $VIT$  pode ser positiva, negativa e nula. A Figura 38 e a Figura 39 ilustram a situação de  $VIT$  nula e positiva, respectivamente. Os ângulos de polarização nessas figuras foram  $128^\circ$  e  $100^\circ$ , respectivamente. Esse comportamento com a direção de polarização será discutido mais adiante.

Figura 38 – variação da intensidade do feixe transmitido para  $\theta_i = 128^\circ$  e  $E_{Ap} \sim 6,0$  kV/cm. Neste caso,  $VIT = 0$ .



Fonte: Autor, 2012.

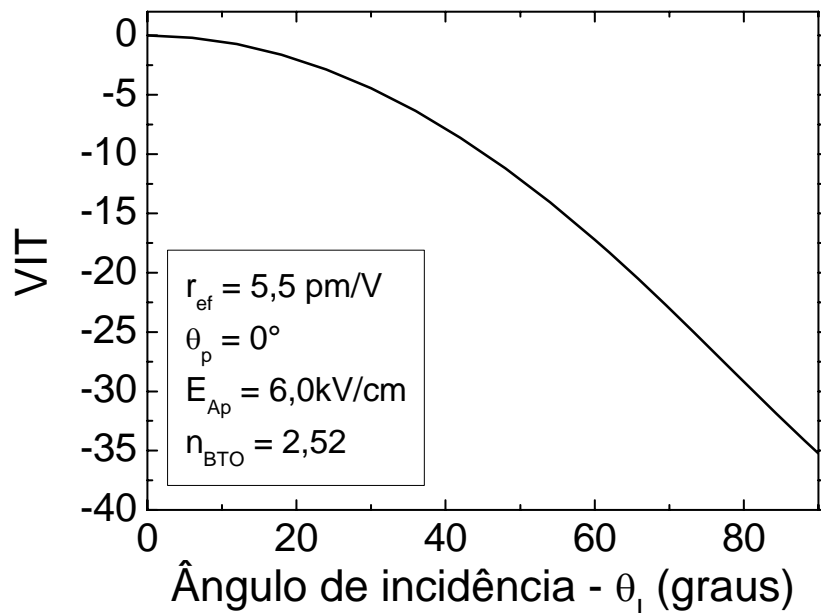
Figura 39 – variação da intensidade do feixe transmitido para  $\theta_i = 100^\circ$  e  $E_{Ap} \sim 6,0$  kV/cm. Neste caso,  $VIT$  é positiva.



Fonte: Autor, 2012.

Como era de se esperar,  $VIT$  depende do ângulo de incidência  $\theta_i$ , uma vez que os coeficientes de transmissão na interface cristal-ar dependem fortemente desse ângulo. A Figura 40 ilustra a dependência teórica da  $VIT$  com este ângulo para um ângulo de polarização  $\theta_p$  igual a  $0^\circ$ ,  $E_{Ap} \cong 6,0$  kV/cm e  $r_{ef} = 5,5$  pmV $^{-1}$ .

Figura 40 – dependência da variação da intensidade do feixe transmitido com o ângulo de incidência.

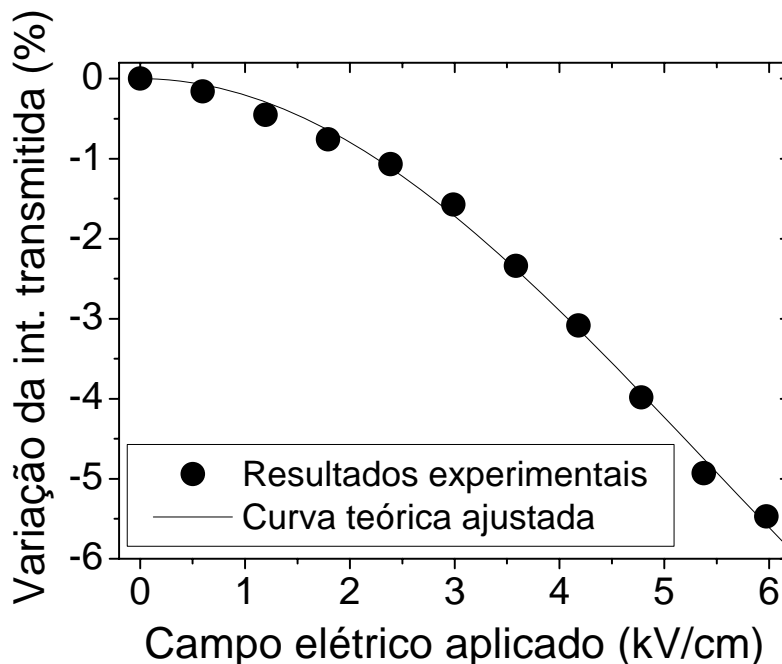


Fonte: Autor, 2012.

A fim de determinar o comportamento da  $VIT$  com o campo elétrico aplicado, realizamos uma série de medidas semelhante à descrita na Figura 37, ou seja, monitorando a intensidade do

feixe transmitido pelo cristal enquanto a fonte de tensão era ligada e desligada. Em cada medida foi usado um valor diferente de  $E_{Ap} \neq 0$ . A intensidade óptica foi fixada em 4,2 mW/cm. A Figura 41 apresenta o comportamento de  $VIT$  em função de  $E_{Ap} \neq 0$ . Os pontos representam os resultados experimentais (as barras de erro são menores ou iguais aos pontos), enquanto que a curva mostrada é a teórica obtida ajustando a equação (3.25) aos dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados [59] com o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) como único parâmetro de ajuste. Conforme se observa, para esta configuração particular,  $VIT$  aumenta em módulo com o campo, variando de 0 a 6% na faixa de campo elétrico trabalhada (0 – 6,0 kV/cm). O parâmetro chi-quadrado foi muito próximo de um (0,99), indicando qualidade excelente do ajuste. O valor obtido de  $r_{ef}$  foi  $5,5 \pm 0,2$  pm/V. A incerteza na determinação de  $r_{ef}$  se deve, principalmente, a imprecisões na medida do ângulo de incidência do feixe no cristal. O procedimento foi realizado para outros dados experimentais e foram obtidos valores equivalentes para  $r_{ef}$ .

Figura 41 – variação da intensidade transmitida em função do campo elétrico aplicado. Os pontos representam os dados experimentais e a curva mostrada é a obtida ajustando a teoria ao experimento aplicando o método dos mínimos quadrados.



Fonte: Autor, 2012.

Conforme seção 2.13, os resultados publicados recentemente por de Oliveira e colaboradores [29] e os resultados de Papazoglou e colaboradores [28], em contraste com os resultados de Efremidis e colaboradores [21], mostram que não existe dispersão (variação

significativa) de  $r_{ef}$  na região do espectro entre 510 nm e 700 nm.  $r_{ef}$  apresenta um valor médio de 5,5 pm/V. Desta forma, como o valor que obtivemos em 780 nm para esse parâmetro foi equivalente, ou seja, aproximadamente 5,5 pm/V, concluímos que a região que  $r_{ef}$  não apresenta dispersão é de 510 nm até, pelo menos, 780 nm. Pode-se notar a praticidade do procedimento desenvolvido para determinar  $r_{ef}$  de materiais cuja birrefringência é induzida por campo elétrico aplicado.

Com o valor determinado de  $r_{ef}$ , temos que o parâmetro  $\Delta n = 0,5n_{BTO}^3 r_{ef} E_{Ap}$  da equação (5.11) é igual a  $2,63 \times 10^{-5}$  e, portanto, da ordem de  $10^{-5}$ , conforme comentado no final da seção 3.2. Isso justifica não termos considerado a variação dos coeficientes de transmissão com  $E_{Ap}$ .

Na Figura 41 o campo elétrico aplicado foi limitado a 6,0 kV/cm por conta do limite de diferença de potencial elétrica de 5000 V que a fonte permite aplicar. Porém, podemos inferir o comportamento para valores maiores desse campo através das previsões teóricas. A Figura 42 ilustra o comportamento para polarização paralela ao plano de incidência ( $\theta_p = 0^\circ$ ) e ângulo de incidência,  $\theta_i$ , de  $34,5^\circ$ . Conforme se pode observar,  $VIT$  apresenta uma dependência periódica com o campo elétrico aplicado. Nesse caso, onde  $\theta_p = 0^\circ$ , segue da equação (3.23) que o estado de polarização do feixe na saída do cristal é

$$E_{ca} = \begin{bmatrix} \cos(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} \\ e^{-i\Theta} \text{sen}(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

$\Theta$  e  $X$  estão relacionados com o atraso de fase por

$$\begin{cases} \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma}{\rho l_{ef}}\right) \\ X = \sqrt{\left(\rho l_{ef}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \end{cases}. \quad (5.18)$$

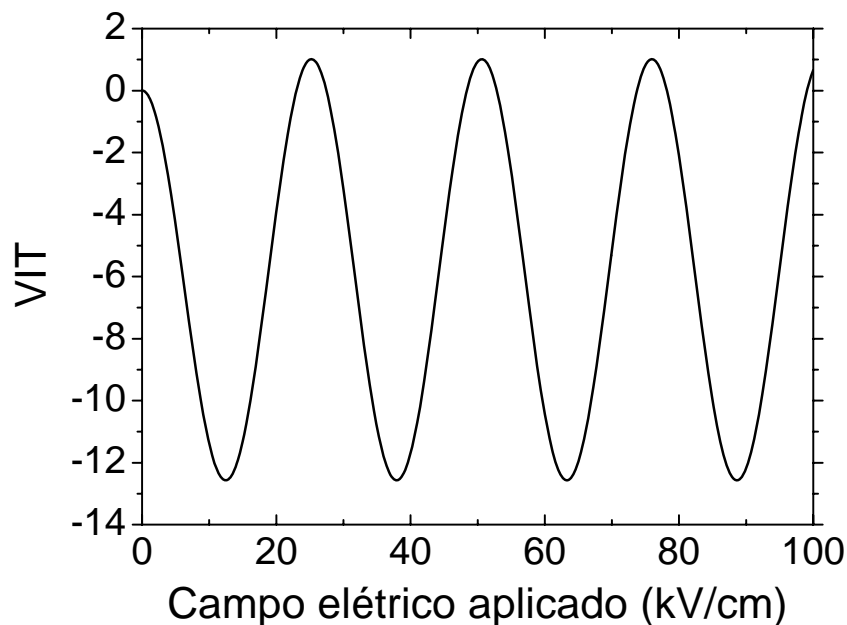
Da equação (5.11),  $\Gamma = 4\pi \frac{l}{\lambda} \Delta n = \frac{2\pi l_{ef}}{\lambda} n_{BTO}^3 r_{41} E_{Ap}$ . À medida que o campo aumenta,  $\Theta \rightarrow \pi/2$  e o estado de polarização passa a ser escrito como

$$E_{ca} = \begin{bmatrix} \cos(X)t_{p,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{sen}(X)t_{s,c \rightarrow a}t_{p,a \rightarrow c} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Assim, o estado de polarização do feixe é elíptico, pois as componentes do vetor polarização estão

defasadas de  $\frac{\pi}{2}$ . As componentes desse vetor apresentam dependência periódica com  $E_{Ap}$  por conta da dependência de  $X$  com esse campo. Por isso a dependência periódica de  $VIT$  com  $E_{Ap}$  mostrada na Figura 42. O estado de polarização é linear, apenas quando  $X = (n + 0,5)\pi$  ou  $X = (n)\pi$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Figura 42 – curva teórica da variação da intensidade do feixe transmitido em função do campo elétrico aplicado, explorando um intervalo grande deste campo.

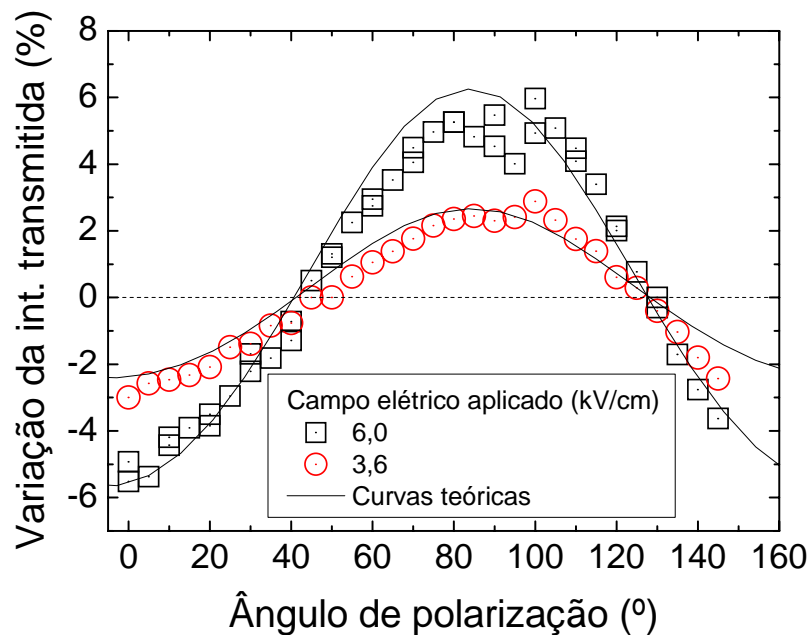


Fonte: Autor, 2012.

Para explorar a dependência de  $VIT$  com os parâmetros controlados experimentalmente, realizamos duas seqüências de medidas semelhantes a da Figura 37. Em cada medida foi utilizado um ângulo de polarização diferente. A intensidade média do feixe foi  $2,8 \pm 0,7 \text{ mWcm}^{-2}$  e o ângulo de incidência igual a  $34,5^\circ$ . Para uma seqüência  $E_{Ap} = 6,0 \text{ kV/cm}$  e na outra  $E_{Ap} = 3,6 \text{ kV/cm}$ . A Figura 43 apresenta os resultados experimentais (as barras de erro são menores ou iguais aos pontos), quadrados e círculos, como também as curvas teóricas correspondentes obtidas com o valor de  $r_{ef}$  determinado acima ( $5,5 \text{ pm/V}$ ). Observa-se boa concordância entre os resultados experimentais e as predições teóricas. As maiores discrepâncias são atribuídas à intensidade relativamente alta do feixe óptico que implica numa densidade alta de elétrons na banda de condução e, conseqüentemente, na blindagem do campo elétrico aplicado, conforme será discutido mais adiante. Observa-se na figura que  $VIT$  depende fortemente da direção de polarização do feixe incidente, variando de -6% a 6%.

Este comportamento é atribuído à mudança no estado de polarização que é dependente da orientação da direção de polarização do feixe incidente com relação aos eixos rápido e lento do cristal cuja birrefringência foi induzida por  $E_{Ap}$ . Para uma determinação precisa de  $r_{ef}$  utilizando o procedimento proposto, a direção de polarização do feixe incidente deve ser escolhida, de acordo com a Figura 43, para que se tenha grandes valores de  $VIT$ .

Figura 43 – variação da intensidade transmitida em função do ângulo de polarização. Os círculos e quadrados representam os dados experimentais para  $E_{Ap}$  igual a 6,0 e 3,6 kV/cm, respectivamente. As curvas são as previsões teóricas obtidas utilizando o valor determinado de  $r_{ef}$  (5,5 pm/V).

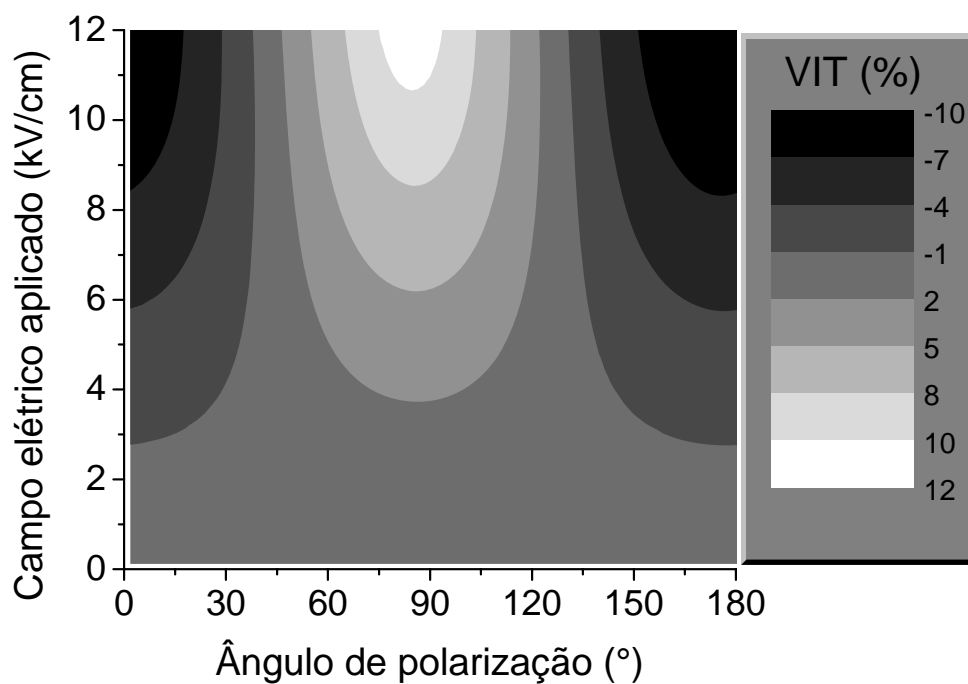


Fonte: Autor, 2012.

Os resultados experimentais da Figura 43 indicam que o efeito eletro-giratório é praticamente desprezível nas silenitas, uma vez que a direção de polarização do feixe incidente em que  $VIT$  é nula é praticamente independente da intensidade do campo elétrico aplicado.

Conforme discutido, além de  $VIT$  depender fortemente do ângulo de incidência, é função da direção de polarização do feixe incidente e da intensidade do campo elétrico aplicado. A Figura 44 são resultados teóricos da dependência de  $VIT$  com esses dois últimos parâmetros para  $\theta_i = 34,5^\circ$  e  $r_{ef} = 5,5 \text{ pm/V}$ .

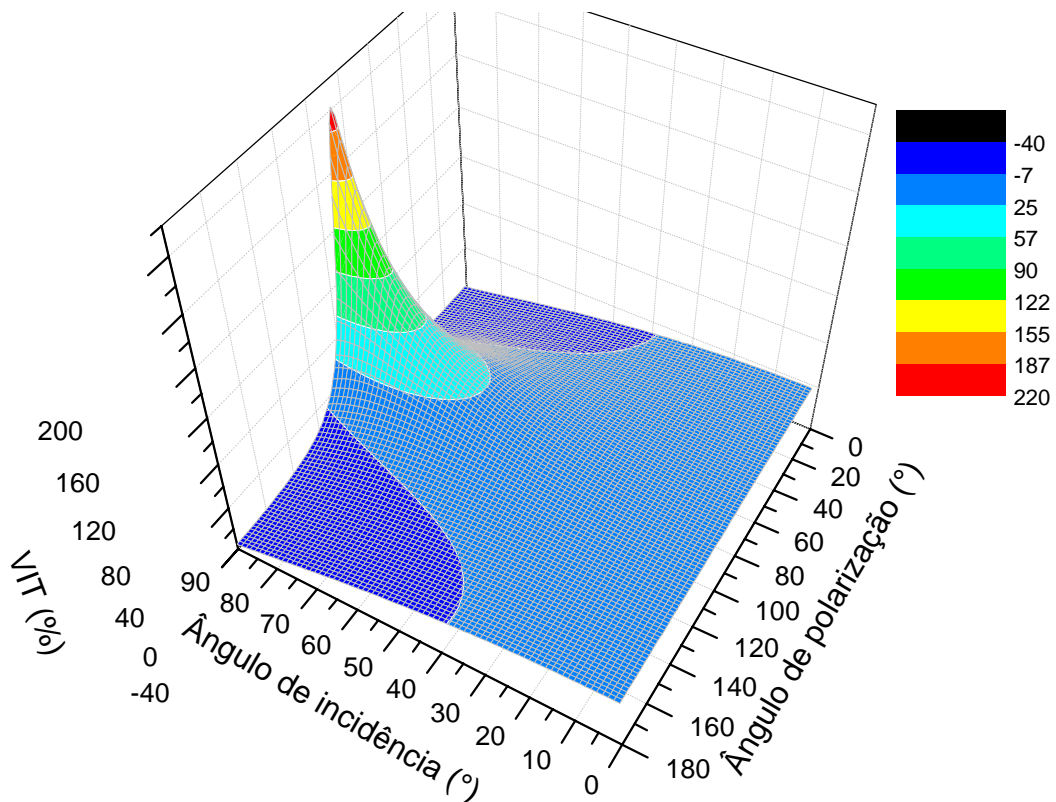
Figura 44 – dependência da variação da intensidade do feixe transmitido com o campo elétrico aplicado e a direção de polarização do feixe incidente. Nesta simulação, tivemos  $\theta_1 = 34,5^\circ$  e  $r_{ef} = 5,5 \text{ pm/V}$ .



Fonte: Autor, 2012.

Para finalizar esta seção, apresentamos na Figura 45 a dependência de  $VIT$  com o ângulo de polarização e o ângulo de incidência para  $E_{Ap} = 6,0 \text{ kV/cm}$  e  $r_{ef} = 5,5 \text{ pm/V}$ .

Figura 45 – dependência de VIT com o ângulo de incidência e o ângulo de polarização. Nesta simulação, tivemos  $E_{Ap} = 6,0$  kV/cm e  $r_{ef} = 5,5$  pm/V.



Fonte: Autor, 2012.

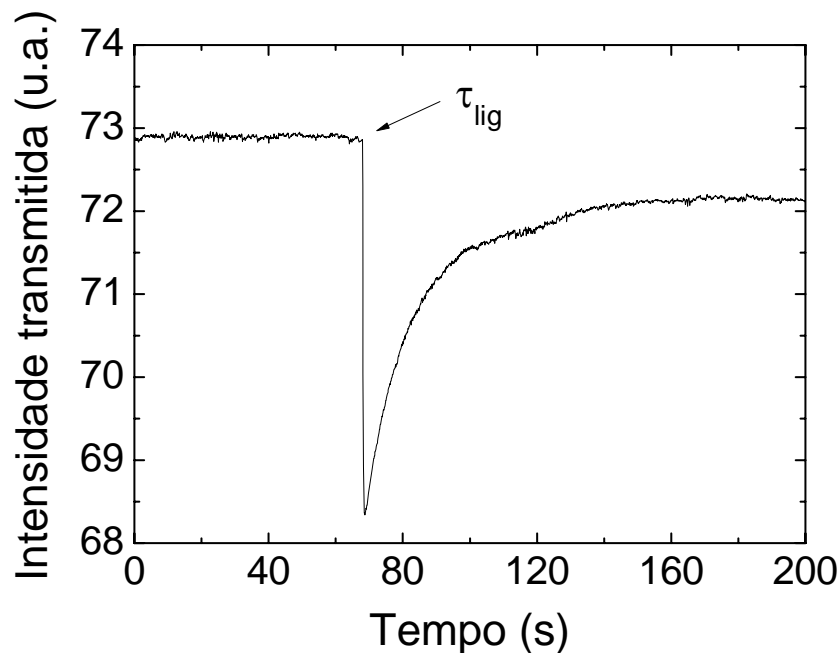
### 5.3 Determinação do coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado

Utilizando feixe óptico com intensidade relativamente alta, o comportamento da intensidade transmitida em função do tempo quando a fonte de tensão é ligada é diferente do observado na Figura 37. A Figura 46 mostra um caso particular, onde  $I = 94,0 \text{ mWcm}^{-2}$  e  $E_{Ap} = 6,0$  kV/cm. No instante  $\tau_{lig}$ , quando a fonte de tensão é ligada aplicando uma diferença de potencial elétrico de 5000 V, o comportamento é semelhante ao mostrado na Figura 37, ou seja, observa-se uma redução rápida na intensidade do feixe transmitido. Porém, conforme o tempo passa, observa-se um aumento na intensidade do feixe transmitido. O valor estacionário desta intensidade é menor que aquele para  $E_{Ap} = 0$ . Esse comportamento pode ser explicado levando em conta o fato de o cristal ser fotocondutor. Desta propriedade tem-se que iluminação não-homogênea implica em transporte de carga não-homogêneo, e as resistências de contato entre o cristal e os eletrodos implicam em acumulação de cargas. A Figura 47-a ilustra o caso de um feixe gaussiano incidindo num cristal



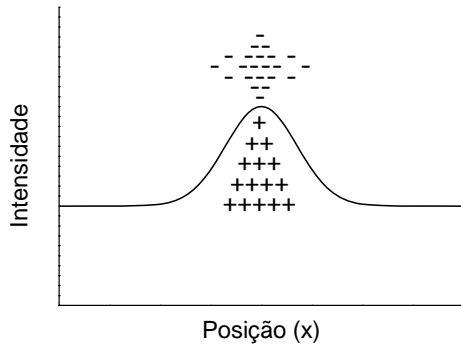
fotorrefrativo. Nas regiões de intensidade maior, a densidade de elétrons na banda de condução é maior. Se não houvesse campo elétrico aplicado, os elétrons se movimentariam na BC por difusão, e se recombinariam com centros aceitadores, apresentando uma distribuição de cargas semelhante à apresentada na Figura 47-b. No nosso caso, existe campo elétrico aplicado (Figura 47-c). A força elétrica faz com que os elétrons se desloquem no sentido contrário ao do campo, e os elétrons, por sua vez, são capturados por centros aceitadores, conforme Figura 47-d. Desta forma, tem-se a criação do campo elétrico de cargas chamado campo elétrico de blindagem ( $E_{scr}$ ) (“electric screening field”) [20]. Na região iluminada do cristal este campo tem sentido contrário ao aplicado ( $E_{Ap}$ ) [20]. Como o cristal sente o campo efetivo ( $E_{ef}$ ), que é a soma vetorial do aplicado e  $E_{scr}$  (que cresce com o tempo), o módulo de  $E_{ef}$  diminui com o tempo, e conseqüentemente a birrefringência induzida que é medida pelo parâmetro  $\Gamma$  na equação (5.11). Desta forma, nós atribuímos o aumento na intensidade transmitida observada na Figura 46 a formação de  $E_{scr}$ . Quando  $E_{scr}$  atinge seu valor estacionário, a intensidade do feixe transmitido não muda mais, o que corresponde aos instantes finais na Figura 46. Este comportamento não foi observado na Figura 37 porque a densidade de elétrons na banda de condução, e conseqüentemente o valor absoluto de  $E_{scr}$  são dependentes da intensidade do feixe incidente, que nesse caso foi relativamente baixa.

Figura 46 – comportamento da intensidade transmitida em função do tempo. No instante  $\tau_{lig}$  a fonte de tensão foi ligada aplicando um campo elétrico de aproximadamente 6,0 kV/cm.



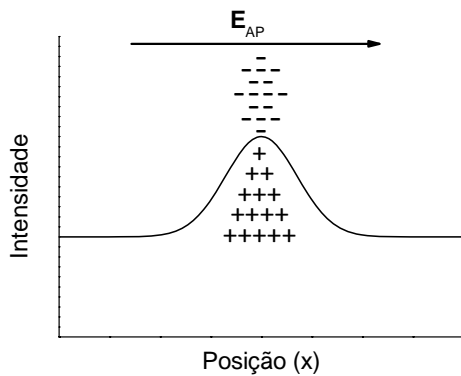
Fonte: Autor, 2012.

Figura 47-a – feixe gaussiano incidindo num cristal fotorrefrativo. Nas regiões de maior intensidade, a densidade de elétrons na banda de condução é maior.



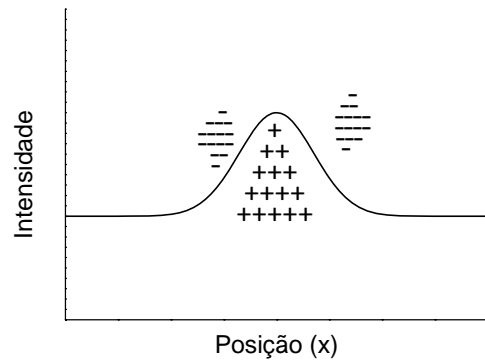
Fonte: Autor, 2013.

Figura 47-c – ilustração da situação da Figura 47-a com aplicação de campo elétrico.



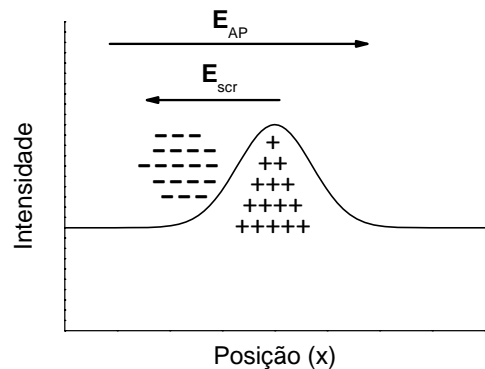
Fonte: Autor, 2013.

Figura 47-b – sem campo elétrico aplicado, os elétrons na banda de condução se movem por difusão e são capturados por centros aceitadores.



Fonte: Autor, 2013.

Figura 47-d – com campo elétrico aplicado, os elétrons são forçados a se movimentar no sentido contrário ao deste campo. Esses elétrons são capturados por centros aceitadores e é formado o campo elétrico de blindagem que tem sentido contrário ao aplicado.

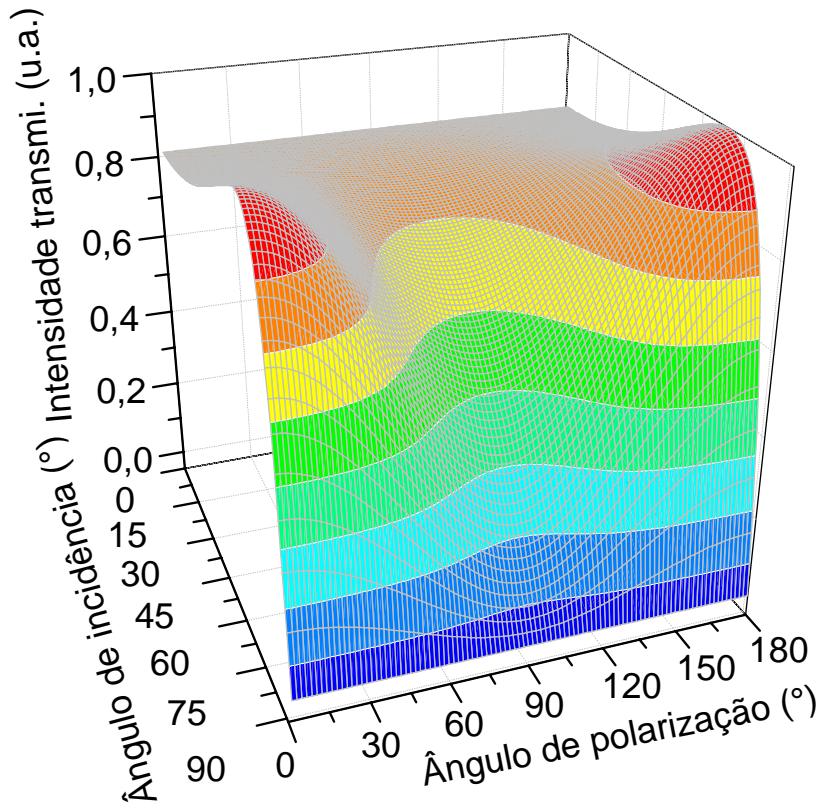


Fonte: Autor, 2013.

Do resultado mostrado na Figura 46 é possível determinar o coeficiente de blindagem do campo elétrico aplicado ( $\xi$ ) comparando o valor de  $VIT$  previsto teoricamente e o calculado usando o valor estacionário da intensidade transmitida, com  $\xi$  como o único parâmetro de ajuste. Neste passo  $r_{ef}$  deve ter sido calculado conforme descrito na seção 5.2. Este procedimento para determinar  $\xi$  pode ser muito prático em experimentos de gravação holográfica, onde é utilizada a condição de baixa visibilidade, na qual um feixe é muito mais intenso que o outro. Nestes casos  $E_{scr}$ , e consequentemente  $\xi$ , pode ser atribuído ao feixe mais intenso. Este procedimento é interessante porque a configuração experimental para determinar  $\xi$  pode ser a mesma utilizada na gravação holográfica, o que minimiza erros ao aplicar  $\xi$ . Conforme discutido no próximo parágrafo,  $\xi$  é sensível as condições experimentais. Desta forma, não achamos interessante determinar  $\xi$  apenas para os casos particulares mostrados na Figura 43 e Figura 46. Uma investigação detalhada deste

parâmetro será realizada num trabalho futuro.

Figura 48 – intensidade do feixe transmitido na interface ar-cristal em função dos ângulos de incidência e polarização.

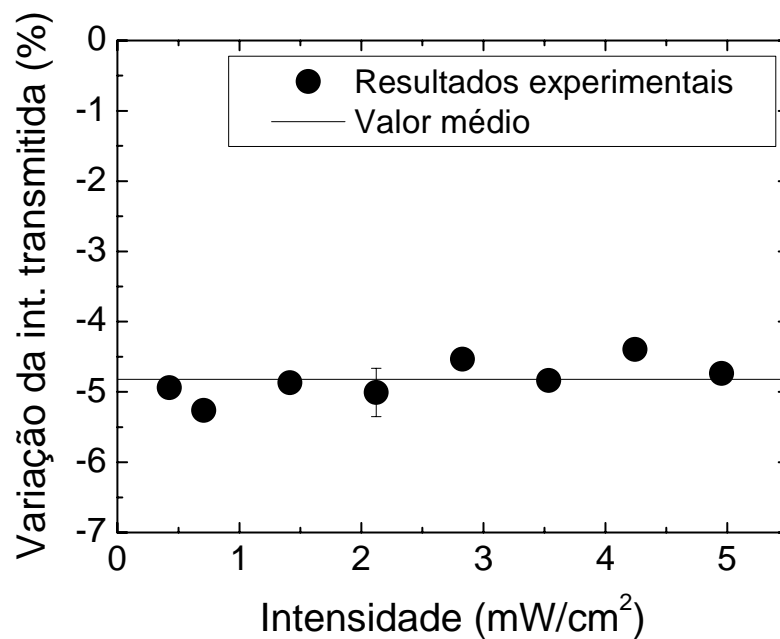


Fonte: Autor, 2013.

Observamos que a criação de  $E_{scr}$  depende da intensidade do feixe incidente conforme referência [29]. Além disso, depende do ângulo de incidência e da direção de polarização do feixe incidente. A dependência com a intensidade se deve à densidade de elétrons excitada para a banda de condução, conforme discutido acima. A dependência com o ângulo de incidência tem origem na dependência com a intensidade do feixe incidente, pois para incidência oblíqua os coeficientes de transmissão dependem do ângulo de incidência, conforme Figura 8, onde se tem a razão entre as transmitâncias. Já a dependência com o ângulo de polarização está relacionada à dependência da intensidade do feixe transmitido na interface ar-cristal com o ângulo de polarização, pois o vetor polarização possui uma componente paralela e outra perpendicular ao plano de incidência e, desta forma, depende dos coeficientes de transmissão. A Figura 48 mostra a dependência da intensidade transmitida (em unidades arbitrárias) na interface ar-cristal com os ângulos  $\theta_i$  e  $\theta_p$ . Segue desta figura que, para uma intensidade fixa do feixe incidente, a intensidade do feixe dentro do cristal depende fortemente de  $\theta_i$  e  $\theta_p$ . As observações indicam a existência de um limiar de intensidade do feixe óptico dentro do cristal para a criação de um campo elétrico de blindagem significativa ( $E_{scr}$ ).

). A Figura 49 mostra, para uma configuração particular, uma faixa de intensidade do feixe incidente para a qual  $VIT$  é praticamente a mesma, indicando a não existência de  $E_{scr}$  apreciável. Nesta figura, os círculos fechados representam os dados experimentais (a maioria das barras de erro são menores que os pontos), enquanto a linha sólida é o valor médio dos dados experimentais. Aumentando a intensidade além do máximo mostrado, o valor absoluto de  $VIT$  é menor que o exibido e a blindagem é observada nos resultados de intensidade versus tempo, conforme Figura 46.

Figura 49 – variação da intensidade transmitida em função da intensidade do feixe óptico incidente. Os círculos fechados representam os pontos experimentais. A linha sólida é o valor médio desses pontos.



Fonte: Autor, 2012.

Finalizamos aqui a discussão dos resultados obtidos e apresentamos no capítulo seguinte as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

## 6 Conclusões e perspectivas

Levando em conta a diferença nos coeficientes de transmissão para polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência e a birrefringência induzida por campo elétrico aplicado ( $E_{Ap}$ ), nós desenvolvemos um procedimento que permite determinar o coeficiente eletro-óptico efetivo ( $r_{ef}$ ) e o coeficiente de blindagem ( $\xi$ ) do campo elétrico aplicado em cristais fotorrefrativos. O procedimento consiste em medir a variação da intensidade transmitida ( $VIT$ ) causada pelo campo elétrico aplicado. Esse procedimento pode ser aplicado a outros materiais onde a birrefringência é induzida por campo elétrico aplicado. É interessante que esses materiais tenham índice de refração e coeficiente eletro-óptico relativamente altos, a fim de detectar a  $VIT$  facilmente. Em experimentos de gravação holográfica, onde é utilizada a condição de visibilidade baixa,  $\xi$  pode ser determinado facilmente, proporcionando mais um parâmetro para comparar teoria e experimento. Porém, em cristais menos simétricos, onde existe mais de um elemento independente do tensor eletro-óptico, o uso desse procedimento pode ser complicado.

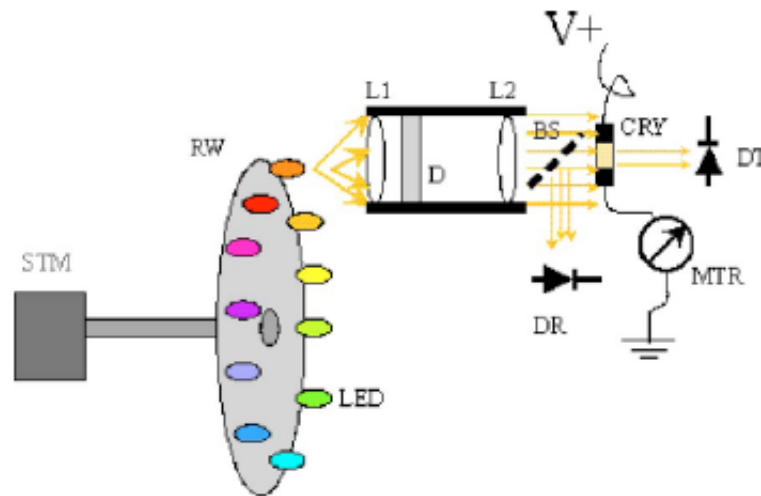
O procedimento proposto foi aplicado ao cristal BTO utilizando radiação de comprimento de onda de 780 nm. Concluímos, com suporte de resultados da literatura, que a região a qual  $r_{ef}$  não apresenta dispersão é de 510 nm até pelo menos 780 nm. Nesta região,  $r_{ef}$  apresenta um valor médio de 5,5 pm/V. Apesar de termos proposto um procedimento para determinar  $\xi$ , não determinamos esse parâmetro, pois os resultados indicam que é muito sensível as condições experimentais, e por isso não é de utilidade prática determiná-lo para algumas configurações específicas. Os resultados indicam a existência de um limiar de intensidade óptica dentro do cristal para a criação de campo elétrico de blindagem ( $E_{scr}$ ) significativa.

Como trabalhos futuros, pretendemos investigar teórica e experimentalmente o limiar de intensidade óptica dentro do cristal para a criação de  $E_{scr}$  significativa e, conseqüentemente,  $\xi$ . Utilizando uma câmera ccd (“charge-coupled device”), pretendemos desenvolver um procedimento para mapear a distribuição espacial do campo elétrico de blindagem. O procedimento consistirá em monitorar a variação da intensidade do feixe transmitido com a câmera e fazer a correspondência entre os pontos da imagem e a posição no cristal.

No procedimento que apresentamos, não é necessário utilizar radiação coerente para

determinar  $r_{ef}$ . Desta forma, pretendemos desenvolver um dispositivo compacto para a determinação desse parâmetro. Possivelmente utilizaremos uma configuração de roda de “leds” semelhante à desenvolvida por Montenegro e colaboradores [60] para medir fotocondutividade. Essa roda é representada na Figura 50 a seguir. Conforme se observa, a configuração permite selecionar facilmente o comprimento de onda a ser medida a grandeza de interesse. É necessário apenas introduzir um polarizador antes da amostra para tornar o feixe de luz polarizado linearmente.

**Figura 50 – configuração de roda de “leds” utilizada para medir fotocondutividade. Pretendemos utilizar configuração semelhante para desenvolver dispositivo que permita determinar a relação de dispersão de  $r_{ef}$ .**



Fonte: Montenegro e colaboradores, 2006 [60].

Com o desenvolvimento do dispositivo proposto, a relação de dispersão de  $r_{ef}$  poderá ser determinada facilmente. Inicialmente pretendemos aplicar no cristal BTO, pois a região do infravermelho, até onde nós sabemos, ainda não foi explorada.

## Referências

1. Boffi, P., D. Piccinin, e M.C. Ubaldi, *Infrared holography for optical communications*. 2003: Springer, Berlin, Heidelberg
2. Lenzo, P.V., E.G. Spencer, e A.A. Ballman, *Photoactivity in Bismuth Germanium Oxide*. Physical Review Letters, 1967. **19**(11): p. 641.
3. Aldrich, R.E., S.L. Hou, e M.L. Harvill, *Electrical and Optical Properties of  $Bi_{12}SiO_{20}$* . Journal of Applied Physics, 1971. **42**(1): p. 493.
4. Fox, A.J. e T.M. Bruton, *Electro-Optic Effects in Optically-Active Compounds  $Bi_{12}TiO_{20}$  and  $Bi_{40}Ga_2O_{63}$* . Applied Physics Letters, 1975. **27**(6): p. 360-362.
5. Huignard, J.P. e F. Micheron, *High-Sensitivity Read-Write Volume Holographic Storage in  $Bi_{12}SiO_{20}$  and  $Bi_{12}GeO_{20}$  Crystals*. Applied Physics Letters, 1976. **29**(9): p. 591-593.
6. Herriau, J.P. e J.P. Huignard, *Hologram Fixing Process at Room-Temperature in Photorefractive  $Bi_{12}SiO_{20}$  Crystals*. Applied Physics Letters, 1986. **49**(18): p. 1140-1142.
7. Rickermann, F., et al., *Diffraction efficiency enhancement of holographic gratings in  $Bi_{12}TiO_{0.76}VO_{0.24}O_{20}$  crystals after recording*. Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics, 1996. **13**(10): p. 2299-2305.
8. Shamonina, E., et al., *Optical activity in photorefractive  $Bi_{12}TiO_{20}$* . Optics Communications, 1998. **146**(1-6): p. 62-68.
9. Marinova, V., *Optical properties of  $Bi_{12}TiO_{20}$  doped with Al, P, Ag, Cu, Co and co-doped with Al+P single crystals*. Optical Materials, 2000. **15**(2): p. 149-158.
10. Raita, E., et al., *Fast photorefractive response in  $Bi_{12}SiO_{20}$  in the near infrared*. Optics Letters, 2000. **25**(17): p. 1261-1263.
11. dos Santos, P.V., J. Frejlich, e J.F. Carvalho, *Direct near infrared photorefractive recording and pre-exposure controlled hole-electron competition with enhanced recording in undoped  $Bi_{12}TiO_{20}$* . Applied Physics B-Lasers and Optics, 2005. **81**(5): p. 651-655.
12. Frejlich, J., et al., *Phenomenological characterization of photoactive centers in  $Bi_{12}TiO_{20}$  crystals*. Journal of Applied Physics, 2007. **101**(4).
13. Frejlich, J., C. Longeaud, e J.F. Carvalho, *Photoinduced Schottky Barrier in Photorefractive Materials*. Physical Review Letters, 2010. **104**(11).
14. Romashko, R.V., et al., *Fast photogalvanic response of a  $Bi_{12}SiO_{20}$  crystal*. Optics Express, 2010. **18**(26): p. 27142-27154.
15. Jerez, V., I. de Oliveira, e J. Frejlich, *Optical recording mechanisms in undoped titanosillenite crystals*. Journal of Applied Physics, 2011. **109**(2).
16. Marinova, V., et al., *Real-time holography in ruthenium-doped bismuth sillenite crystals at 1064 nm*. Optics Letters, 2011. **36**(11): p. 1981-1983.
17. Petrov, M.P. e V.V. Bryksin, *Space-charge waves in sillenites: rectification and second-harmonic generation*, in *Photorefractive materials and applications 2*, P. Günter e J.-P. Huignard, Editors. 2006, Srpinger.
18. Henry, M., et al., *Propagation of Light in an Optically-Active Electrooptic Crystal of  $Bi_{12}SiO_{20}$  - Measurement of the Electrooptic Coefficient*. Journal of Applied Physics, 1986. **59**(8): p. 2650-2654.
19. Wilde, J.P., et al., *Measurement of Electrooptic and Electrogyratory Effects in  $Bi_{12}TiO_{20}$* . Journal of Applied Physics, 1990. **67**(5): p. 2245-2252.
20. Cedilnik, G., et al., *Measurement of the electric screening field in  $Bi_{12}TiO_{20}$* . Journal of Applied Physics, 1999. **85**(3): p. 1317-1321.
21. Efremidis, A.T., et al., *Dispersion of electro-optic coefficients in sillenite crystals*. Applied

- Physics B-Lasers and Optics, 2009. **95**(3): p. 467-473.
22. Frejlich, J., *Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording, and Materials Characterization*. 2006: Wiley, New York.
  23. Grunnetjepsen, A., I. Aubrecht, e L. Solymar, *Investigation of the Internal Field in Photorefractive Materials and Measurement of the Effective Electrooptic Coefficient*. Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics, 1995. **12**(5): p. 921-929.
  24. de Oliveira, I., R. Montenegro, e J. Frejlich, *Hole-electron electrical coupling in photorefractive materials*. Applied Physics Letters, 2009. **95**(24).
  25. Reyes, J.A. e A. Lakhtakia, *Electrically controlled reflection and transmission of obliquely incident light by structurally chiral materials*. Optics Communications, 2006. **266**: p. 565-573.
  26. Schurig, D., *Off-normal incidence simulations of metamaterials using FDTD*. Int. J. Numer. Model., 2006. **19**: p. 215-228.
  27. Sigelle, M. e R. Hierle, *Determination of the electrooptic coefficients of 3methyl 4nitropyridine 1 oxide by an interferometric phase modulation technique*. Journal of Applied Physics, 1981. **52**: p. 4199-4204.
  28. Papazoglou, D.G., A.G. Apostolidis, e E.D. Vanidhis, *Index of refraction, optical activity and electro-optic coefficient of bismuth titanium oxide ( $Bi_{12}TiO_{20}$ )*. Applied Physics B-Lasers and Optics, 1997. **65**(4-5): p. 499-503.
  29. de Oliveira, I., et al., *Electro-optic coefficient and wavelength dispersion in sillenite crystals*. Applied Physics B-Lasers and Optics, 2011. **105**(2): p. 301-304.
  30. de Oliveira, I., *Fixação de Hologramas em Niobato de Lítio*, in IFGW. 2005, Universidade Estadual de Campinas: Campinas-SP.
  31. Volk, T., M. Wöhlecke, e N. Rubinina, *Optical dama resistance in lithium niobate*, in *Photorefractive materials and applications 2*, P. Günter e J.-P. Huignard, Editors. 2006, Springer.
  32. Odoulov, S.G., K.V. Shcherbin, e A.N. Shumeljuk, *Photorefractive recording in BTO in the near-infrared*. Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics, 1994. **11**(9): p. 1780-1785.
  33. Griffiths, D.J., *Introduction to electrodynamics*. 3rd ed. ed. 1999: Prentice Hall.
  34. Yariv, A. e P. Yeh, *Optical waves in crystals*, New York, 1984: Wiley.
  35. Yariv, A., *Optical electronics, 5ª edição*. 1997: Oxford.
  36. Fowles, G.R., *Introduction to modern optics*. 1975: Dover.
  37. Hecht, E., *Optics*. 2002: Pearson.
  38. Reitz, J.R., F.J. Milford, e R.W. Christy, *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 1982, Rio de Janeiro: Campus.
  39. Jackson, J.D., *Classical electrodynamics*, ed. T. edition. 1999: John Wiley & Sons.
  40. Zilio, S.C., *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. 2009: Compacta.
  41. Butcher, P.N. e D. Cotter, *The elements of nonlinear optics*. 1990: Cambridge University Press.
  42. Yariv, A., *Optical electronics in modern communications*. Fifth ed. 1997: Oxford.
  43. Deliolanis, N.C., E.D. Vanidhis, e N.A. Vainos, *Dispersion of electrogyration in sillenite crystals*. Applied Physics B-Lasers and Optics, 2006. **85**(4): p. 591-596.
  44. Deliolanis, N.C., et al., *Direct measurement of the dispersion of the electrogyration coefficient of photorefractive  $Bi_{12}GeO_{20}$  crystals*. Journal of Applied Physics, 2005. **97**(2).
  45. Stepanov, S.I., S.M. Shandarov, e N.D. Khatkov, *Sov. Phys. Solid State*, 1987. **29**: p. 1754.
  46. Dennery, P. e A. Krzywicki, *Mathematics for physicists*. 1996: Dover.
  47. Halliday, D., R. Resnick, e J. Walker, *Fundamentos de Física - Óptica e Física Moderna*. Vol. 4. 1996: Livros técnicos e científicos editora S.A.
  48. Frejlich, J. e P.M. Garcia, *Advances in real-time holographic interferometry for the measurement of vibrations and deformations*. Optics and Lasers in Engineering, 2000. **32**(6): p. 515-527.
  49. Rezende, S.M., *Materiais e dispositivos eletrônicos*. 2004, São Paulo: Editora Livraria da Física.



50. Boyd, R.W., *Nonlinear optics*. Terceira edição ed. 2007: Academic Press.
51. dos Santos, P.V., J.F. Carvalho, e J. Frejlich, *Photochromism, bleaching and photorefractive recording in undoped  $Bi_{12}TiO_{20}$  crystals in the visible and near infrared wavelength range*. *Optical Materials*, 2007. **29**(5): p. 462-467.
52. Johnston, A.R., *Dispersion of electrooptic effect in  $BaTiO_3$* . *Journal of Applied Physics*, 1971. **42**: p. 3501-3507.
53. Chmyrev, V.I., V.M. Skorikov, e E.V. Larina, *Doping Effect on the Optical, Electro-optic, and Photoconductive Properties of  $Bi_{12}MO_{20}$  ( $M = Ge, Si, Ti$ )*. *Inorganic Materials*, 2006. **42**: p. 381-392.
54. Sturman, B.I., et al., *Exact Solution of the Bragg-Diffraction Problem in Sillenites*. *Journal of the Optical Society of America B-Optical Physics*, 1994. **11**(9): p. 1813-1819.
55. Riehemann, S., et al., *Optical and photorefractive characterization of BTO crystals doped with Cd, Ca, Ga, e V*. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, 1997. **6**(2): p. 235-249.
56. Pereira, R.M., *Caracterização óptica e elétrica de materiais fotocondutores e fotorrefrativos*. 2006.
57. <http://comunidade.bemsimples.com/tecnologia/w/tecnologia/TINTA-CONDUTIVA.aspx.07/02/2013>].
58. Garcia, P.M.d.P., *Registo holográfico em cristais fotorrefrativos do tipo  $Bi_{12}SiO_{20}$* . 1990.
59. Barroso, L.C., et al., *Cálculo Numérico - Com Aplicações*. 2ª ed. 1987: Harbra.
60. Montenegro, R., N.R. Inocente Junior, e J. Frejlich, *New possibilities for the measurement of wavelength-resolved photoconductivity*. *Review of Scientific Instruments*, 2006. **77**(4).

## Apêndice A – Determinação da matriz de Jones – atividade óptica e birrefringência

Conforme Yariv [35], a matriz birrefringência é dada por

$$W = \begin{bmatrix} e^{-i(\Gamma/2)} \cos^2 \psi + e^{i(\Gamma/2)} \sen^2 \psi & -i \sen \frac{\Gamma}{2} \sen(2\psi) \\ -i \sen \frac{\Gamma}{2} \sen(2\psi) & e^{i(\Gamma/2)} \cos^2 \psi + e^{-i(\Gamma/2)} \sen^2 \psi \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

No caso específico de  $\psi = 45^\circ$ , segue

$$W = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) & -i \sen \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sen \frac{\Gamma}{2} & \cos\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

A matriz da atividade óptica é

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\rho l_{\text{eff}}) & -\sen(\rho l_{\text{eff}}) \\ \sen(\rho l_{\text{eff}}) & \cos(\rho l_{\text{eff}}) \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Dividindo o cristal em  $N \rightarrow \infty$  células, tem-se que as matrizes da birrefringência e atividade óptica podem ser escritas como

$$W_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) & -i \sen \frac{\Gamma}{2N} \\ -i \sen \frac{\Gamma}{2N} & \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

e

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\rho l_{\text{ef}}}{N}\right) & -\sen\left(\frac{\rho l_{\text{ef}}}{N}\right) \\ \sen\left(\frac{\rho l_{\text{ef}}}{N}\right) & \cos\left(\frac{\rho l_{\text{ef}}}{N}\right) \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Dessa forma, a matriz que leva em conta atividade óptica e birrefringência no meio é

$$M' = (W_N R_N) \dots (W_2 R_2) (W_1 R_1) = (W_i R_i)^N. \quad (1.6)$$

Segue

$$M' = \left[ \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) & -i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \\ -i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) & \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{array} \right]^N. \quad (1.7)$$

Ou

$$M' = \left[ \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & -\cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) & \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{array} \right]^N. \quad (1.8)$$

Aplicando a identidade de Chebyshev [34]

$$M' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{pmatrix} \frac{A \operatorname{sen} NK\Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K\Lambda}{\operatorname{sen} K\Lambda} & B \frac{\operatorname{sen} NK\Lambda}{\operatorname{sen} K\Lambda} \\ C \frac{\operatorname{sen} NK\Lambda}{\operatorname{sen} K\Lambda} & \frac{D \operatorname{sen} NK\Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K\Lambda}{\operatorname{sen} K\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

tem-se

$$\begin{cases} A = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ B = -\cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ C = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \\ D = \cos\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \cos\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\Gamma}{2N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho l_{ef}}{N}\right) \end{cases} \quad (1.10)$$

e

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2}(A+D) \right]. \quad (1.11)$$

Como os argumentos  $\frac{\Gamma}{2N}$  e  $\frac{\rho l_{ef}}{N}$  são muito menores que um, pois foi assumido  $N \rightarrow \infty$ , segue, realizando aproximações até primeira ordem em  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  de (1.10),

$$A = D = 1, \quad (1.12)$$

$$B \cong -\frac{X}{N} \left[ \frac{\rho l_{eff}}{X} + i \frac{\Gamma}{2X} \right] = -\frac{X}{N} e^{i\Theta} \quad (1.13)$$

e

$$C = \frac{X}{N} e^{-i\Theta}. \quad (1.14)$$

Nas equações (1.13) e (1.14),

$$\Theta = \tan^{-1} \left( \frac{\Gamma}{\rho l_{eff}} \right). \quad (1.15)$$

Da equação (1.11) segue

$$K\Lambda = \cos^{-1} \left[ \cos \left( \frac{\Gamma}{2N} \right) \cos \left( \frac{\rho l_{eff}}{N} \right) \right]; \quad (1.16)$$

$$\cos K\Lambda = \cos \left( \frac{\Gamma}{2N} \right) \cos \left( \frac{\rho l_{eff}}{N} \right). \quad (1.17)$$

Expandindo ambos os lados da equação acima até segunda ordem, tem-se

$$1 - \frac{1}{2}(K\Lambda)^2 = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{2N} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho l_{eff}}{N} \right)^2 \right] = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho l_{eff}}{N} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{2N} \right)^2; \quad (1.18)$$

$$K\Lambda = \sqrt{\left( \frac{\rho l_{eff}}{N} \right)^2 + \left( \frac{\Gamma}{2N} \right)^2} = \frac{1}{N} X, \quad (1.19)$$

onde

$$X = \sqrt{\left( \rho l_{eff} \right)^2 + \left( \frac{\Gamma}{2} \right)^2}. \quad (1.20)$$

Usando (1.19) no termo  $\frac{\text{sen}(NK\Lambda)}{\text{sen}(K\Lambda)}$  da equação (1.9), segue

$$\frac{\text{sen}NK\Lambda}{\text{sen}K\Lambda} = \frac{\text{sen}X}{\text{sen}X/N} \cong \frac{\text{sen}X}{X} N. \quad (1.21)$$

Substituindo o resultado acima em (1.9), segue

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{A \operatorname{sen} MK \Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K \Lambda}{X/N} & B \frac{\operatorname{sen} X}{X} N \\ C \frac{\operatorname{sen} X}{X} N & \frac{D \operatorname{sen} NK \Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K \Lambda}{X/N} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

O termo  $M'_{11}$  da matriz acima pode ser simplificado usando (1.12) e (1.19)

$$\frac{A \operatorname{sen} NK \Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K \Lambda}{X/N} = \frac{\operatorname{sen} X - \operatorname{sen}[(N-1)X/N]}{X} N. \quad (1.23)$$

Sabendo que

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2}(A-B) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(A+B) \right], \quad (1.24)$$

o termo  $\operatorname{sen} X - \operatorname{sen}[(N-1)X/N]$  da equação (1.23) pode ser escrito como

$$\operatorname{sen} X - \operatorname{sen}[(N-1)X/N] = 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{X - (N-1)X/N}{2} \right] \cos \left[ \frac{X + (N-1)X/N}{2} \right]. \quad (1.25)$$

Simplificando o termo acima, segue

$$\operatorname{sen} X - \operatorname{sen}[(N-1)X/N] = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{X}{2N} \right) \cos \left[ \frac{X + X - X/N}{2} \right], \quad (1.26)$$

ou

$$\operatorname{sen} X - \operatorname{sen}[(N-1)X/N] = \frac{X}{N} \cos(X). \quad (1.27)$$

Isso implica que o termo  $M'_{11}$  da matriz (1.22) é

$$M'_{11} = \frac{A \operatorname{sen} NK \Lambda - \operatorname{sen}(N-1)K \Lambda}{X/N} = \cos(X). \quad (1.28)$$

Da equação (1.12),  $D=A$ . Segue de (1.22) que  $M'_{11} = M'_{22}$ . De (1.28)

$$M'_{22} = \cos(X). \quad (1.29)$$

Substituindo (1.13) em (1.22), segue

$$M'_{12} = -e^{i\theta} \operatorname{sen} X. \quad (1.30)$$

Substituindo (1.14) em (1.22), tem-se

$$M'_{21} = e^{-i\theta} \text{sen} X . \quad (1.31)$$

Tem-se então

$$M' = \begin{pmatrix} \cos X & -e^{i\theta} \text{sen} X \\ e^{-i\theta} \text{sen} X & \cos X \end{pmatrix} . \quad (1.32)$$

Essa é a matriz que aparece na referência [4]. Essa matriz pode ser determinada usando o método de soma de matrizes elementares proposto em [61].

### Referências

1. Yariv, A. e P. Yeh, *Optical waves in crystals*, New York, 1984: Wiley.
2. Fox, A.J. e T.M. Bruton, *Electro-Optic Effects in Optically-Active Compounds  $Bi_{12}TiO_{20}$  and  $Bi_{40}Ga_2O_{63}$* . Applied Physics Letters, 1975. **27**(6): p. 360-362.
3. Jones, R.C., *A New Calculus for the Treatment of Optical Systems .7. Properties of the N-Matrices*. Journal of the Optical Society of America, 1948. **38**(8): p. 671-685.

# Anexo

**Artigo aceito para publicação no jornal “Optics Communications”.**

Título: Experimental determination of effective electro-optic coefficient and electric screening field factor in the electrically induced birefringent Bi<sub>12</sub>TiO<sub>20</sub> crystal by using an oblique incidence setup.

Disponível online em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2012.12.085>



# Experimental determination of effective electro-optic coefficient and electric screening field factor in the electrically induced birefringent $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal by using an oblique incidence setup

Q1 A.L. Moura<sup>a,b,\*</sup>, A.A. Canabarro<sup>a</sup>, W.C. Soares<sup>a</sup>, E. de Lima<sup>a</sup>, J.F. Carvalho<sup>c</sup>, P.V. dos Santos<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Grupo de Física da Matéria Condensada, Núcleo de Ciências Exatas—NCEX, Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005, Arapiraca-AL, Brazil

<sup>b</sup> Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970, Maceió-AL, Brazil

<sup>c</sup> Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, 87020-900, Goiânia-GO, Brazil

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 4 October 2012

Received in revised form

24 December 2012

Accepted 25 December 2012

### Keywords:

Birefringence

Photorefractive materials

Sillenite

BTO

## ABSTRACT

We present an alternative procedure to determine the effective electro-optic coefficient ( $r_{eff}$ ) and the electric screening field factor by measuring the optical intensity variation induced by an applied electric field ( $E_{App}$ ), which is transmitted through an undoped photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) crystal in an oblique incidence setup. The transmitted intensity variation (TIV) was modeled taking into account the transmission coefficients for the polarization plane parallel and perpendicular to the incidence plane, as well as the birefringence induced by the  $E_{App}$ , which changes the components of the polarization vector of the light beam. The measurements were performed with infrared radiation at 780 nm and provided  $r_{eff} = 5.5 \pm 0.2$  pm/V. It allowed us to conclude, with support of results from the literature, that the region without dispersion of the electro-optic coefficient in the BTO crystal ranges from 510 nm to at least 780 nm. The procedure proposed here can be used for distinct wavelengths and seems to be suitable for other electrically induced birefringent materials.

© 2013 Published by Elsevier B.V.

## 1. Introduction

The detailed investigation of optical materials' properties is essential to get an in-depth understanding of their operating mechanisms that can contribute to improve our knowledge of materials applications and possible corresponding devices' development. Photorefractive crystals (PC) are interesting for holography-related applications. Among the PC, the sillenite ones have been extensively studied [1–8], being characterized by a fast photorefractive response and good sensitivity for low photon energy [9,10]. The effective electro-optic coefficient ( $r_{eff}$ ) is a fundamental parameter of sillenite crystals in view of photorefractive applications. To determine  $r_{eff}$  of sillenites, one of the most used method is that proposed by Henry et al. [11]. Following the order of the optical elements in the Henry's experimental setup, there is a light source, a polarizer, the sillenite crystal under controlled applied electric field ( $E_{App}$ ), an analyzer, and an optical detector. The experimental procedure consists in rotating the analyzer to determine the maximum and minimum transmitted intensities through the crystal, turned birefringent by  $E_{App}$ ,

from a linearly polarized input light, orientated in two polarization directions rotated by  $45^\circ$ . The measurements are repeated for different values of  $E_{App}$ . In this experimental setup, the optical beam direction is normal to the crystal faces, which can be a source of errors as a result of multiple internal reflections [12,13]. Another drawback is related to the so-called electric screening field. When a photorefractive medium is subjected to  $E_{App}$ , the material response creates an inner electric field, called screening field ( $E_{scr}$ ), due to inhomogeneous illumination of the sample and contact resistance that results in inhomogeneous charge transport [12]. By comparing theoretical models with experimental results obtained with  $E_{App}$ , it has been demonstrated to be necessary for the introduction of a dimensionless factor ( $\xi$ ) multiplying the applied field to take into account the  $E_{scr}$  [8,14,15]. Therefore,  $\xi$  is allowed to vary from 0 to 1 and it is expected to depend on the optical intensity distribution, wavelength, and applied electric field [13,16]. It is possible to determine  $\xi$  in the setup of Henry [12]. However  $\xi$  is sensible to the experimental configuration. When applying this parameter to fit experimental results from holographic recordings, one can observe discrepancies in cases where the recording is in oblique incidence. The same difficulties can arise in the method proposed by Grunnet-Jepsen et al. [14] where they use an ac square-wave electric field to eliminate the screening field in the measurement of  $r_{eff}$ , and in that used by Papazoglou et al. [17] in which the determination of  $r_{eff}$  is

Q2 \* Corresponding author at: Grupo de Física da Matéria Condensada, Núcleo de Ciências Exatas—NCEX, Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005, Arapiraca-AL, Brazil. Tel.: +55 82 91241189.

Q3 E-mail addresses: [andre.moura@fis.ufal.br](mailto:andre.moura@fis.ufal.br), [jucaandre@gmail.com](mailto:jucaandre@gmail.com) (A.L. Moura).



achieved by finding the value of  $E_{App}$  for which the ellipticity of the emerging beam from the crystal is zero. In these cases the optical beam direction is also normal to the crystal faces as in the Henry experimental arrangement.

In this paper, we present a simple procedure to determine  $r_{eff}$  and also the  $\xi$  factor. The experimental setup requires just an optical source, the crystal under controlled  $E_{App}$ , an optical detector, and one polarizer if the light source is not polarized. The procedure is based on the change of the polarization state by the electrically induced birefringence and the difference between the transmission coefficients for light polarized parallel and perpendicular to the incidence plane. In a somewhat similar direction, studies about the change in the transmission and reflection because the electro-optic effect have already been done in chiral materials [18] and metamaterials [19]. In our point of view, the proposed procedure has some advantages in comparison with those of Refs. [11,14,17], because it is possible to eliminate multiple-reflected beams going to the optical detector, and the determination of  $\xi$  can be performed with the same configuration of the holographic recording. Furthermore, there is no requirement of using any analyzer, which simplifies the experimental setup and the polarization direction of the incident beam can be fixed. The disadvantages occur in cases where the material presents low linear refractive index and electro-optic coefficient, since the variation in the transmitted intensity can be too low to be detected. Furthermore, the measurements can be quite complicated in less symmetrical crystals than those of the 23 point group, for which more nonvanishing independent elements of the electro-optic tensor may exist. In these cases, the interferometric method reported in Ref. [20] seems to be more suitable. The new procedure was applied to the nominally undoped  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) crystal at 780 nm due to the fact that the dispersion of  $r_{eff}$  has attracted some discussion [16,17,21], and it is potentially interesting to making the sillenites operate at the near infrared region [6]. In contrast to results of Ref. [16], Refs. [17,21] do not show dispersion of  $r_{eff}$  in the 510–700 nm range. We obtained  $r_{eff}=5.5 \pm 0.2$  pm/V at 780 nm and concluded that the region without dispersion of  $r_{eff}$  ranges from 510 nm to at least 780 nm. We observed that  $\xi$  is sensible to the experimental conditions as discussed below.

## 2. Theoretical background

The polarization state of a polarized light beam, when it encounters an interface during propagation in oblique incidence, can be described by the transmission matrix [22] here by called  $T$ . Its two nonvanishing elements are the coefficients of transmission for polarization parallel ( $t_p$ ) and perpendicular ( $t_s$ ) to the incidence plane.  $T$  is given by Eq. (1), where  $t_p$  and  $t_s$  are strongly dependent on the incidence angle; for normal incidence  $t_p=t_s$ , and the ratio  $t_p/t_s$  grows monotonically by increasing the incidence angle:

$$T = \begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

We denominate  $T_{a \rightarrow c}$  and  $T_{c \rightarrow a}$  the transmission matrices for the first (air–crystal) and second (crystal–air) interfaces, respectively. The same indices  $a \rightarrow c$  and  $c \rightarrow a$  are valid for the elements of these matrices, meaning that we are using appropriated transmission coefficients. In this way, the polarization state of the beam immediately after the first interface ( $E_c$ ) is given by  $E_c = T_{a \rightarrow c} E_0$ , where  $E_0$  is the initial polarization state described by a column matrix containing just two elements. The element  $E_{0,11}$  is the component of the polarization state parallel to the incidence plane, while  $E_{0,21}$  is the component perpendicular to this plane.

In the case of linear polarization, this state can be expressed as

$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_p \\ \sin\theta_p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where  $\theta_p$  is the angle between the polarization direction and the incidence plane. For  $\theta_p=0$  the polarization direction is completely on this plane.

The BTO crystal belongs to the sillenite family (space group I23) and therefore presents optical activity and becomes birefringent under the action of  $E_{App}$ . By using the Jones' formalism, the polarization state of the beam after passing through the crystal can be determined by the transmission matrices at air–crystal and crystal–air interfaces, the rotation matrix due to the optical activity (which includes electrogyration, responsible for the change in polarization state in virtue of the applied electric field), and the birefringence matrix. This latter can be described by [23]

$$W(\psi, \Gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\Gamma/2)} \cos^2\psi + e^{i(\Gamma/2)} \sin^2\psi & -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi \\ -i \sin \frac{\Gamma}{2} \sin 2\psi & e^{i(\Gamma/2)} \cos^2\psi + e^{-i(\Gamma/2)} \sin^2\psi \end{pmatrix} \quad (3)$$

In this equation  $\psi$  is the angle that the slow axis of the birefringent crystal makes with the horizontal at the fixed laboratory reference frame, and  $\Gamma$  is the phase retardation.  $\Gamma$  is proportional to the difference in the refractive index between the slow and fast axes of the crystal, i.e.,  $\Gamma = 2\pi l(n_s - n_f)/\lambda$ , where  $l$  is the thickness of the crystal and  $\lambda$  is the light wavelength at vacuum. The quantity  $(n_s - n_f)$  depends on which direction of the crystal the optical beam is incident and on the direction and magnitude of  $E_{App}$ . Moreover,  $(n_s - n_f)$  is dependent of  $r_{eff}$  and this dependence is described in the next section. Since we have two effects occurring simultaneously when the beam propagates along the crystal, the transfer matrix is not the simple product of the matrix associated with the birefringence by the one associated to the optical activity. In order to compute these effects numerically, we used a method in which the crystal is hypothetically discretized in  $N \rightarrow \infty$  cells. The effective length ( $l_{eff}$ ) is the sum of the distance traveled by the beam along the propagation direction in each of these cells. In each of these cells we computed the effects of optical activity and induced birefringence. In this procedure, the output of a cell is the input for the following one. At the end, taking into account the interfaces, we have the Jones' matrix ( $M$ ) for the crystal to describe the polarization state of the beam after crossing the crystal:

$$M = T_{c \rightarrow a} [(W_N R_N) \dots (W_2 R_2) (W_1 R_1)] T_{a \rightarrow c} = T_{c \rightarrow a} (WR)^N T_{a \rightarrow c}, \quad (4)$$

where  $R_i$  and  $W_i$  are the rotation and birefringence matrices which describe, respectively, the optical activity (including electrogyration) and the electrical field induced birefringence in each cell. The  $R_i$  matrix is given by the following equation:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(\rho d) & -\sin(\rho d) \\ \sin(\rho d) & \cos(\rho d) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Here  $d$  is the size of each cell,  $\rho = \rho_0 - (2/\sqrt{3})(\pi/\lambda n_{BTO}) \zeta_{41} E_{App}$  [24,25], where  $\rho_0$  is the optical activity per unit of length without  $E_{App}$ ,  $\lambda$  is the light wavelength,  $n_{BTO}$  the refractive index, and  $\zeta_{41}$  the only nonvanishing electrogyration coefficient for sillenite crystals. Going forward, we have the polarization state of the resulting beam ( $E_{ac}$ ), i.e., the beam after the crystal,  $E_{ac} = ME_0$ .

The optical detector measures the intensity of the resulting beam which is defined by

$$I_{Trans} = \frac{1}{2} \frac{n_{BTO}}{Z_0} |E_{ac}|^2 \cos\theta_r, \quad (6)$$

with  $Z_0$  being the impedance of the free space and  $\theta_i$  the incidence angle at the crystal–air interface, which is equal to the angle of refraction at the air–crystal interface. In order to numerically describe the observed behavior, we define the transmitted intensity variation (TIV) in terms of the ratio between the transmitted intensity with  $E_{App} \neq 0$  and  $E_{App}=0$ . In percentage, we have

$$TIV = \left[ \frac{I_{Trans}(E_{App} \neq 0)}{I_{Trans}(E_{App} = 0)} - 1 \right] \times 100 \quad (7)$$

We did not consider change of the transmission coefficients due to  $E_{App}$  because the variation in the refractive index of the BTO crystal is of the order of  $10^{-5}$  and, therefore, the contribution to TIV is practically null. By the same reason, the difference in the refraction angles for the ordinary and extraordinary waves is too small. In this manner, we did not consider the difference in the incidence angle of these waves at the crystal–air interface, as well as the difference in the optical path inside the crystal. Also, as the thickness of the sample is relatively small, we treat these waves as just a single beam after passing through the crystal.

Since the TIV is related to the transmission coefficients at the interfaces of the crystal, the optical activity, and the electric field induced birefringence, it is dependent on the intrinsic parameters of the crystal, i.e., linear refractive index, optical rotatory power, and effective electro-optic coefficient. It also depends on the parameters experimentally controlled such as crystal length,  $E_{App}$ , incidence angle, direction of the input beam polarization, and the orientation of the crystal with respect to the incident beam as well as  $E_{App}$ . Obviously, for normal incidence  $t_p=t_s$  and then TIV is null. On the other hand, the absolute value of TIV grows monotonically by increasing the incidence angle, which is attributed to the angular dependence of the ratio  $t_p/t_s$ .

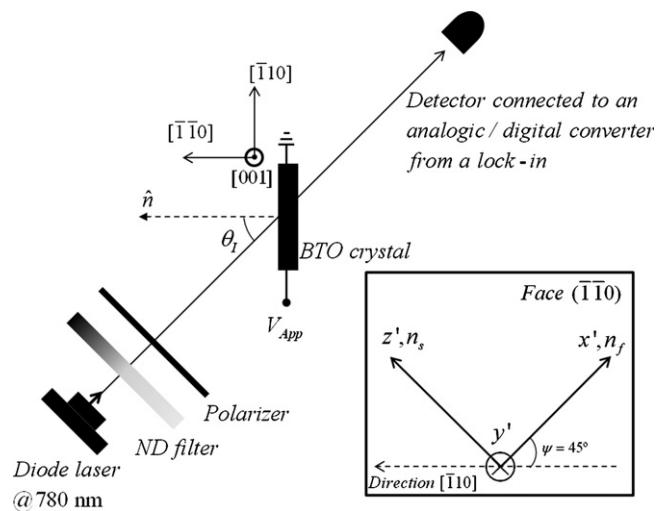
### 3. Experimental setup

Reemphasizing, the scope of this paper is to present an alternative and simpler way to determine both electro-optic coefficient and electric screening field factor matching with new experimental results from a nominally undoped BTO crystal.

The experimental setup is shown in Fig. 1. It is similar to that used in holographic recordings, but just with one beam incident on the crystal. A Gaussian beam from a diode laser at 780 nm (Laserline Laser Technology) was incident on the face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  making an angle  $\theta_i=34.5^\circ$  with respect to the normal to this face. The faces  $(\bar{1}10)$  and  $(1\bar{1}0)$  were coated with silver ink and connected to a high voltage supply ( $0 \leq V_{App} \leq 5000$  V). The intensity of the transmitted light was measured by a Si detector and care was taken to detect only the transmitted beam avoiding detection of multiple-reflected beams on the crystal faces. It was facilitated by the relatively high thickness of the crystal given below. This detector was connected to an analogic/digital converter from a lock-in with resolution of 1.0 mV and the data were acquired using a computer. The polarization direction and intensity of the incident beam were controlled by a polarizer and a neutral density filter, respectively. Unless otherwise stated, the polarization direction is parallel to the incidence plane. The sample dimensions were  $8.37$  (along  $[\bar{1}\bar{1}0]$ )  $\times$   $8.72$  (along  $[001]$ )  $\times$   $3.59$  (along  $[\bar{1}10]$ )  $\text{mm}^3$ .

#### 3.1. Determination of $(n_s - n_f)$

Since the BTO crystal pertains to the 23 point group, the only nonvanishing independent element of the electro-optic tensor is  $r_{41}$ . Any refractive index change caused by electric field action can be described by this tensor element. We used  $r_{eff}$  instead of  $r_{41}$  to include the secondary electro-optic effect, i.e., inverse piezoelectric



**Fig. 1.** Schematic representation of the experimental setup used to measure the optical transmitted intensity (TIV) through a BTO crystal under controlled applied electric field. The optical source was a diode laser operating at 780 nm. ND is a neutral density filter to control the optical intensity. The polarizer is used to control the polarization direction of the incident beam. The voltage crossing the crystal is supplied by an external high voltage source. The optical detector is connected to an analogic/digital converter from a lock-in. Here,  $\hat{n}$  is a unit vector perpendicular to the crystal face  $(\bar{1}\bar{1}0)$  and makes an angle  $\theta_i$  with the incident beam. The inset shows the crystallographic axes orientation with applied electric field.

and photoelastic effects [16,17]. In the crystal orientation just described, the slow and fast axes of the induced birefringent crystal make a plane that is parallel to the  $(\bar{1}\bar{1}0)$  face. The angle between the slow axis and the horizontal direction in the laboratory, which coincides with the  $[\bar{1}10]$  direction, is  $\psi=45^\circ$ . This situation is depicted in the inset of Fig. 1. In this manner, for a beam propagating quasi parallel to the  $[\bar{1}\bar{1}0]$  direction, i.e., in paraxial approximation,  $(n_s - n_f)$  is given by  $2\Delta n$ , where  $\Delta n = \frac{1}{2}r_{eff}n_{BTO}^3E_{App}$ . Otherwise,  $(n_s - n_f)$  is easily determined by the index ellipsoid. The detection of the TIV is dependent on the crystal orientation with respect to the incident beam and  $E_{App}$ , since  $\Gamma \propto (n_s - n_f)$ .

#### 3.2. Parameters

From literature  $n_{BTO}=2.52$  [17] and  $\rho_0=4.3^\circ/\text{mm}$  [9] both at 780 nm. At this wavelength the electrogyration coefficient is very low [25], and we observed that it does not affect the results of the calculations. So, with these parameters and the experimental configuration, one has  $\Delta n \cong 2.6 \times 10^{-5}$ . Moreover,  $\theta_i=34.5^\circ$  implies that  $(n_s - n_f) \cong 4.93 \times 10^{-5}$  and  $\Gamma \cong 1.46 \times 10^{-4}$ .

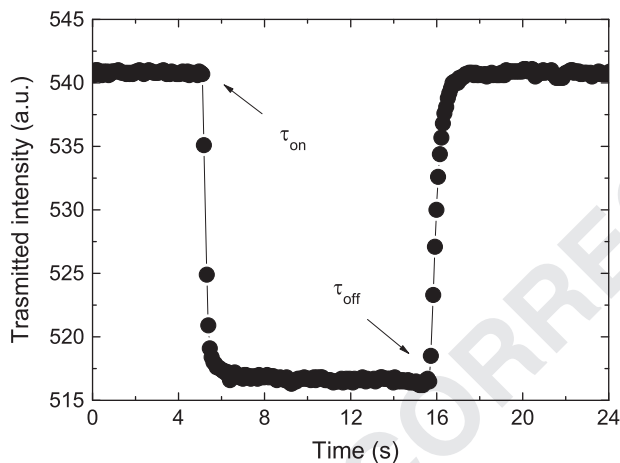
Concluding this section, the measurements performed by the proposed procedure are facilitated by the BTO properties, orientation of the crystal with respect to the incident beam, and the high symmetry of the crystal. These properties imply high linear refractive index, the configuration gives a high  $\Gamma$ , and the crystal possesses just one independent electro-optic coefficient. As will be shown in the next section, the polarization direction is also important. Although we used a laser, the measurements can be performed using incoherent light such as LEDs, since we only need polarized light which can be obtained using a polarizer.

### 4. Results and discussion

To investigate the influence of the applied electric field on the transmitted optical intensity through the crystal, we monitored

1 this optical intensity along time, turning the voltage supply on  
 2 and off. Fig. 2 shows a typical experimental result obtained using  
 3 low laser intensity ( $I=2.8 \text{ mW cm}^{-2}$ ) and starting the measure-  
 4 ment with  $E_{App}=0$ . The  $x$  and  $y$  axes represent the time and the  
 5 transmitted intensity, respectively. As it can be seen, the intensity  
 6 is constant up to time  $\tau_{on}$  at which the voltage supply is turned on  
 7 ( $E_{App}=6.0 \text{ kV cm}^{-1}$ ), making the transmitted intensity vary due to  
 8 the change in polarization state caused by the induced birefringence.  
 9 At time  $\tau_{off}$  the voltage supply is turned off and the  
 10 intensity is restored to its initial value, since with  $E_{App}=0$  the  
 11 crystal is isotropic. Taking into account the definition of Eq. (7),  
 12 we have  $TIV = -4.4\%$ .

13 Fixing the optical intensity at  $4.2 \text{ mW cm}^{-2}$ , we made a series  
 14 of measurements similar to those shown in Fig. 2, i.e., turning the  
 15 voltage supply on and off, but in each case it used a different  
 16 value of  $E_{App} \neq 0$ . Fig. 3 shows the TIV as a function of the value of  
 17  $E_{App} \neq 0$ . The experimental results are represented by dots (error  
 18 bars are smaller than the experimental points), and the solid  
 19 curve is the best theoretical one obtained by applying the least-  
 20 squares fitting method with  $r_{eff}$  as the only adjust parameter. The  
 21 obtained chi-squared parameter was very close to unit, indicating  
 22 an excellent quality of the fitting. Making the curve fitting for



23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
Fig. 2. Typical experimental result of the transmitted intensity versus time for low intensity of the laser beam. The variation in the transmitted intensity is due to the applied electric field, turned on and off at times  $\tau_{on}$  and  $\tau_{off}$ , respectively. Solid line is only a guide for the eyes.

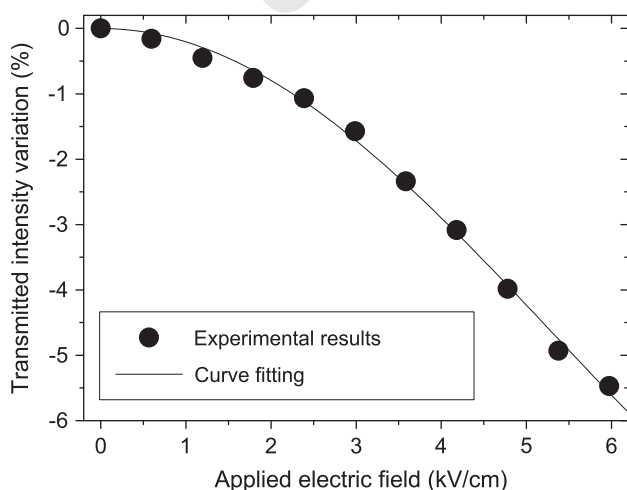


Fig. 3. Transmitted intensity variation versus the applied electric field,  $E_{App} \neq 0$ . Experimental results are represented by dots while the curve is the best fitting varying only  $r_{eff}$ . The error bars are smaller than the experimental points.

other experimental data we obtained  $r_{eff}=5.5 \pm 0.2 \text{ pm V}^{-1}$   
 where the uncertainty is mainly due to the imprecision in the  
 determination of the incidence angle in our experiment. This  
 value of  $r_{eff}$  is in good agreement with results published recently  
 by de Oliveira et al. [21] and that of Papazoglou et al. [17], where,  
 in contrast to the results of Ref. [16], dispersion of  $r_{eff}$  in the  
 510–700 nm range was not observed, the average value being  
 $\approx 5.5 \text{ pm V}^{-1}$ . Our results extend the region of non-dispersion of  
 $r_{eff}$  of BTO crystals to at least 780 nm. One can see that the novel  
 procedure described is very practical to measure the effective  
 electro-optic coefficient of electrically induced birefringent  
 materials.

From the curve fitting displayed in Fig. 3, we notice that the  
 absolute value of the TIV grows with the value of  $E_{App} \neq 0$  in the  
 explored range. For more intense  $E_{App} \neq 0$  the behavior is periodic  
 (not shown for the sake of brevity). This is attributed to the fact  
 that the absolute values of the polarization state components  
 present a periodic dependence on  $E_{App}$ , which is going to be  
 further investigated in a forthcoming work.

To explore the TIV dependence on the experimentally controlled  
 parameters, we made a series of independent measurements similar  
 to those of Fig. 2, where in each case the polarization direction with  
 respect to the horizontal was different. The average intensity of the  
 beam was  $I=2.8 \pm 0.7 \text{ mW cm}^{-2}$ . Fig. 4 shows the TIV against the  
 polarization angle for two different values of  $E_{App} \neq 0$ : 6.0 and  
 3.6  $\text{kV cm}^{-1}$ . Open squares and circles are experimental data (error  
 bars are smaller than the experimental points) and solid curves are  
 the corresponding theoretical ones with the same parameters described  
 above. The major discrepancies between the experimental data and  
 theoretical results are attributed to the screening of  $E_{App}$  in virtue  
 of the high intensity of the incident beam that causes a high density  
 of electrons in the conduction band, as described below. However,  
 a good agreement was obtained. As it can be noticed in Fig. 4, the  
 TIV is strongly dependent on the input beam polarization direction,  
 ranging from around  $-6\%$  to  $6\%$ . This behavior is owing to the  
 change in polarization state that is dependent on the orientation of  
 the input beam polarization direction with respect to the fast and  
 slow axes of the induced birefringent crystal. For a precise  
 determination of  $r_{eff}$  using the proposed procedure, the polarization  
 direction of the incident beam should be chosen in the region of  
 large values for the TIV.

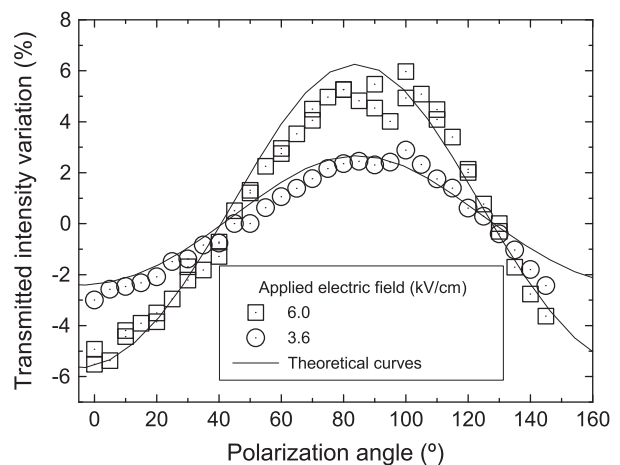
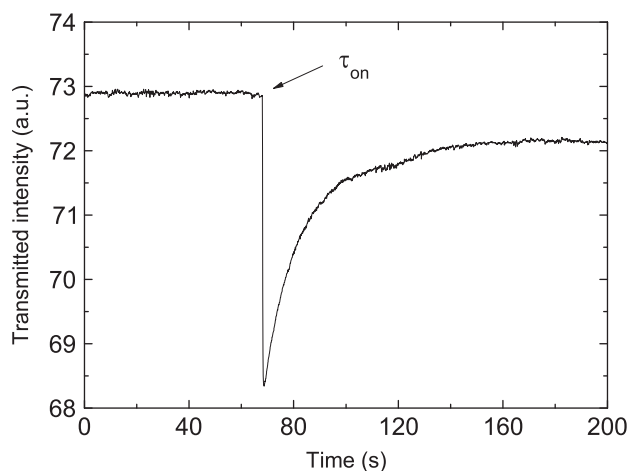


Fig. 4. Transmitted intensity variation versus polarization angle for two different values of the applied field,  $E_{App}=3.6 \text{ kVcm}^{-1}$  (circles) and  $E_{App}=6.0 \text{ kVcm}^{-1}$  (squares). Experimental results are represented by dots while the solid curves are the theoretical predictions. Once more, the error bars are smaller than the experimental points.

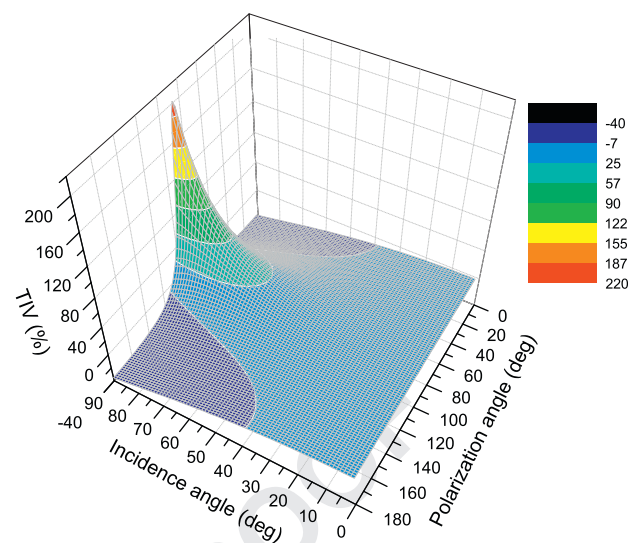


**Fig. 5.** Typical experimental result of the transmitted intensity versus time for high intensity of the laser beam. In this figure we observe the screening of the applied electric field.

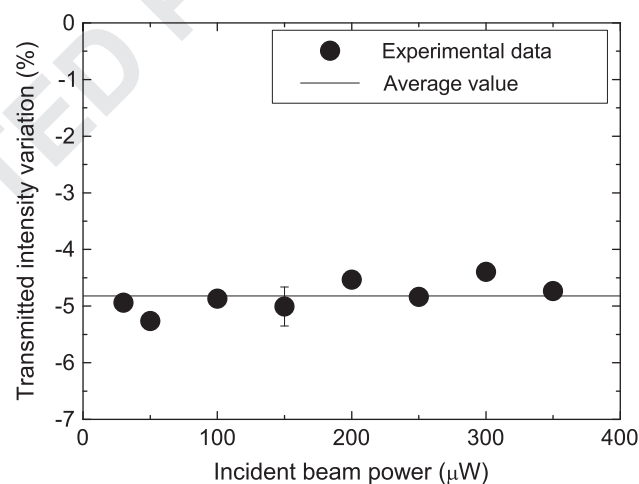
Withal, for relatively high intensity of the laser beam, the behavior of the transmitted intensity when the voltage supply is turned on is not as observed in Fig. 2. Fig. 5 shows a particular case of the transmitted beam for  $I=94.0 \text{ mW cm}^{-2}$  and  $E_{App}=6.0 \text{ kV cm}^{-1}$ . At the instant  $\tau_{on}$  when the voltage supply is turned on, the behavior is similar to that of Fig. 2. Nevertheless, as time goes on, an increase in the intensity of the transmitted beam is seen but its stationary value is lower than that with  $E_{App}=0$ . The explanation for this is as follows. Owing to the nature of the crystal in question, which is photoconductive, inhomogeneous charge transport and contact resistance lead to local accumulation of charge. Consequently, the build-up of the electric screening field ( $E_{scr}$ ) which is opposite to the applied ones in the illuminated region of the crystal [12]. Since the crystal experiences the effective field ( $E_{eff}$ ), which is the vector sum of the applied ones and  $E_{scr}$ , which increases with time, the module of  $E_{eff}$  decreases and, consequently, the induced birefringence also decreases. On this base, we attribute the increase in the transmitted intensity observed in Fig. 5 to the build-up of the  $E_{scr}$ . When  $E_{scr}$  reaches its stationary value, the transmitted intensity does not change anymore, which corresponds to the long time regime in Fig. 5. This behavior is not observed in Fig. 2 since the density of electrons in the conduction band and the consequent absolute value of the  $E_{scr}$  are dependent on the intensity of the incident beam, which in that case is relatively low.

From the result shown in Fig. 5, we can get the screening field factor ( $\xi$ ) comparing the theoretical prediction for the TIV, using the stationary value of the transmitted intensity with  $\xi$  as the unique adjust parameter. In this step,  $r_{eff}$  should be already determined as described previously in Fig. 3. This procedure may be very practical to determine  $\xi$  in holographic experiments that use small visibility condition, where one beam is much more intense than the other. In these cases, the  $E_{scr}$  and consequently  $\xi$  may be attributed to the more intense beam. It is an interesting characteristic because the experimental configuration to determine  $\xi$  may be the same used in holographic experiments, minimizing errors related to this parameter. As is discussed in the next paragraph,  $E_{scr}$  is sensible to the experimental conditions. Then, it is not interesting to give  $\xi$  only for the particular case of Fig. 5. A more complete study will be left for a future publication.

We observed that the creation of the  $E_{scr}$  is dependent on the combination of the incident beam intensity as in Ref. [21], incidence angle, and input beam polarization direction. The dependence on the intensity lies in the fact that a density of electrons is excited to the conduction band, as described above.



**Fig. 6.** Transmitted intensity variation as a function of the polarization and incidence angles.



**Fig. 7.** Transmitted intensity variation as a function of the incident beam power for a particular experimental configuration. Experimental data are represented by points, while the solid curve is the average value. The experimental value for the TIV is practically the same in this power range, indicating the absence of significant electric screening field. Most of the error bars are smaller than the experimental points.

The dependences on the incidence and polarization angles have their origins on the intensity beam dependence, since for oblique incidence the transmitted intensity at the air–crystal interface is dependent on these angles. We present in Fig. 6 the TIV dependence with the polarization and incidence angles. A large dependence of TIV with the incidence angle, which is attributed to the dependence of the transmission coefficients on this angle is seen. The observations point out the existence of a beam intensity threshold inside the crystal for the creation of a significant  $E_{scr}$ . Fig. 7 shows, for a particular experimental configuration, a range of powers of the incident beam in which the TIV is the same, indicating the absence of appreciable  $E_{scr}$ . In this figure, the dots represent the experimental data (most of the error bars are smaller than the experimental points), while the solid curve is the average value of the TIV. Further increasing the power, the maximum value shown in this figure, the absolute value of the stationary TIV becomes smaller than that exhibited and screening is seen in the results of transmitted intensity versus time, as in Fig. 5.

## 5. Conclusion

In summary, by taking into account the transmission coefficients for polarization plane parallel and perpendicular to the incidence plane in oblique incidence, and the birefringence induced by applied electric field, we have demonstrated a procedure which enables one to determine the effective electro-optic coefficient and the electric screening field factor in photo-refractive crystals. This procedure consists in measuring the optical transmitted intensity variation due to the applied electric field. We believe that the procedure can be extended to many electrically induced birefringent materials, being necessary only for the use of materials with high linear refractive index and electro-optic coefficient, in order to detect TIV. In holographic recording experiments, where it uses the low fringes visibility condition, the electric screening field factor may be easily determined provided more parameters are given to compare theory and experiment. However, for less symmetrical crystals, the use of the procedure presented here could be very complicated, since there are more nonvanishing independent elements of the electro-optic tensor. The new approach was applied to the BTO crystal using excitation at 780 nm and it was concluded, with support of results from literature, that the region without dispersion of the effective electro-optic coefficient, where  $r_{eff} \approx 5.5 \text{ pm V}^{-1}$ , ranges from 510 nm to at least 780 nm. It can be extended to other wavelengths from LEDs with a polarizer, since it is not necessary to use coherent radiation. The electric screening field factor was not determined here once it is very sensible to the experimental conditions, and the results point out for the existence of a beam intensity threshold inside the sample to the creation of significant electric screening field that will be investigated in a future publication.

## Acknowledgments

The financial support from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) and Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) is gratefully acknowledged. The authors wish to express their great gratitude to Prof. Marcos Vinícius Dias Vermelho, Prof. Maria Tereza de Araujo, and Andrew

Fabian Barbosa da Silva for technical supports, as well as to Prof. Jaime Frejlich for the fruitful scientific discussion and Prof. Carlos Jacinto for the careful revision of the manuscript.

## References

- [1] A.L. Tolstik, A.Y. Matusevich, M.G. Kisteneva, S.M. Shandarov, S.I. Itkin, A.E. Mandel, Y.F. Kargin, Y.N. Kul'chin, R.V. Romashko, *Quantum Electronics* 37 (2007) 1027.
- [2] A. Matusevich, A. Tolstik, M. Kisteneva, S. Shandarov, V. Matusevich, A. Kiessling, R. Kowarschik, *Applied Physics B*, 96 (2009) 119.
- [3] R. Montenegro, A. Shumelyuk, R. Kumamoto, J.F. Carvalho, R.C. Santana, J. Frejlich, *Applied Physics B*, 95 (2009) 475.
- [4] J. Frejlich, C. Longeaud, J.F. Carvalho, *Physical Review Letters* 104 (2010) 116601.
- [5] V. Jerez, I. de Oliveira, J. Frejlich, *Journal of Applied Physics* 109 (2011) 024901.
- [6] V. Marinova, R.C. Liu, S.H. Lin, K.Y. Hsu, *Optics Letters* 36 (2011) 1981.
- [7] I. de Oliveira, J. Frejlich, *Optics Letters* 37 (2012) 277.
- [8] J. Frejlich, *Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording, and Materials Characterization*, Wiley, New York, 2006.
- [9] P.V. dos Santos, J. Frejlich, J.F. Carvalho, *Applied Physics B*, 81 (2005) 651.
- [10] J. Frejlich, R. Montenegro, N.R. Inocente-Junior, P.V. dos Santos, J.C. Launay, C. Longeaud, J.F. Carvalho, *Journal of Applied Physics* 101 (2007) 043101.
- [11] M. Henry, S. Mallick, D. Rouede, L.E. Celaya, A.G. Weidner, *Journal of Applied Physics* 59 (1986) 2650.
- [12] G. Cedilnik, M. Esselbach, A. Kiessling, R. Kowarschik, A.A. Kamshilin, E. Shamonina, K.H. Ringhofer, *Journal of Applied Physics* 85 (1999) 1317.
- [13] J.P. Wilde, L. Hesselink, S.W. Mccahon, M.B. Klein, D. Rytz, B.A. Wechsler, *Journal of Applied Physics* 67 (1990) 2245.
- [14] A. Grunnetjepsen, I. Aubrecht, L. Solymar, *Journal of the Optical Society of America B*, 12 (1995) 921.
- [15] I. de Oliveira, R. Montenegro, J. Frejlich, *Applied Physics Letters* 95 (2009) 241908.
- [16] A.T. Efremidis, N.C. Deliolanis, C. Manolikas, E.D. Vanidhis, *Applied Physics B*, 95 (2009) 467.
- [17] D.G. Papazoglou, A.G. Apostolidis, E.D. Vanidhis, *Applied Physics B*, 65 (1997) 499.
- [18] J.A. Reyes, A. Lakhtakia, *Optics Communications* 266 (2006) 565.
- [19] D. Schurig, *International Journal for Numerical Modeling* 19 (2006) 215.
- [20] M. Sigelle, R. Hierle, *Journal of Applied Physics* 52 (1981) 4199.
- [21] I. de Oliveira, T.O. dos Santos, J.F. Carvalho, J. Frejlich, *Applied physics B* 105 (2011) 301.
- [22] G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover, New York, 1975.
- [23] A. Yariv, *Optical Electronics in Modern Communications*, Oxford University Press, New York, 1997.
- [24] N.C. Deliolanis, I.M. Kourmoulis, G. Asimellis, A.G. Apostolidis, E.D. Vanidhis, N.A. Vainos, *Journal of Applied Physics* 97 (2005) 023531.
- [25] N.C. Deliolanis, E.D. Vanidhis, N.A. Vainos, *Applied Physics B* 85 (2006) 591.