

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA
CONDENSADA

Tese de Doutorado

Espalhamento de Ondas Acústicas em
Defeitos Topológicos

Átila Pereira Ribeiro

Maceió
2016

Átila Pereira Ribeiro

Espalhamento de Ondas Acústicas em Defeitos Topológicos

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos créditos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre M. de Moraes Carvalho

Maceió

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R484e Ribeiro, Átila Pereira.
Espalhamento de ondas acústicas em defeitos topológicos / Átila Pereira
Ribeiro. – 2016.
98 f. : il., grafs.

Orientador: Alexandre M. de Moraes Carvalho.
Tese (doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal
de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 82-90.

1. Ondas acústicas. 2. Espalhamento acústico. 3. Ondas planas. 4. Defeitos
topológicos - Monopolo global. 5. Desclinação. I. Título.

CDU: 531.77.5

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

“Espalhamento de Ondas Acústicas em Defeitos Topológicos”

por

Átila Pereira Ribeiro

A Banca Examinadora composta pelos professores Alexandre Manoel de Morais Carvalho, como (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Glauber José Ferreira Tomaz da Silva, Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Claudio Benedito Silva Furtado, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, José Henrique Araujo Lopes de Andrade, da Universidade Federal de Alagoas – Campus Arapiraca, e Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato **aprovado com grau B.**

Maceió, 21 de novembro de 2016


Prof. Dr. Alexandre Manoel de Morais Carvalho


Prof. Dr. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva


Prof. Dr. Claudio Benedito Silva Furtado


Prof. Dr. José Henrique Araujo Lopes de Andrade


Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

Dedico ao meu pai, em memória, a minha mãe e aos meus irmãos que sempre me deram forças e muito me incentivaram a seguir essa jornada.

*A verdadeira coragem é ir atrás de seus sonhos
mesmo quando todos dizem que ele é impossível.
Cora Coralina*

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido possível sem a assistência direta e indireta de um grande número de pessoas. Primeiramente, agradeço a Deus por ser minha fonte inesgotável de forças quando eu já não as tinha mais e por ser fiel em minha vida e aos meus irmãos e minha mãe por ser meu amparo. Em segundo lugar, agradeço o meu orientador Alexandre que me tomou sob sua asa e me ensinou muito do que eu sei sobre ser um cientista. O tempo que passamos a discutir muitas coisas de física, matemática, ou variado é mais valioso para mim que as palavras podem expressar. Sua influência e estilo muito têm moldaram a minha forma de fazer ciência, e sem o seu encorajamento persistente eu não teria sido capaz de empurrar essas idéias, tanto quanto eu tenho. Neste sentido também agradeço ao professor Glauber Tomaz que muito contribuiu para a construção das idéias contidas neste trabalho.

Os amigos são para toda a vida, ainda que não estejam conosco a vida inteira. Amizade não é dependência, submissão. Não se tem amigos para concordar na íntegra, mas para revisar os rascunhos e duvidar da letra. É independência, é respeito. Assim como há os amigos imaginários da infância, há os amigos invisíveis da maturidade. Aqueles que não estão perto e podem estar dentro. Em outras palavras amigo é o que fica depois da ressaca. É glicose no sangue. A serenidade. Nesse sentido, a minha trajetória na Ufal foi de grandes amizades, que não foram poucas. Agradeço a Tainã Laís por está presente muitas vezes nos momentos que muito precisei, por alugar sua atenção por horas, por nossas rizadas e vibrando conquistas. A Waléria Lopes (Coração) por também compartilhar bons momentos

e me motivar nos momentos que precisei o mesmo se adequa a Elaine Cristina, Livia Maria, Camyla Martins bem como Rafaela pelo círculo de amizade que criamos em tão pouco tempo. Agradeço também a todos os professores pelos ensinamentos. A Neto Leão pelas várias ajudas com o Mathemática.

Gostaria de agradecer também aos amigos que fiz na pólo Maceió - UAB, como tutor do curso de Física a distância, a coordenadora do pólo Elielba Mendes e as secretárias Elizabete Soares e Ana Medeiros bem como o Enizaldo, grandes amizades que o tempo não apaga. Agradeço também aos amigos Benjamin, Vanessa, Gisele, Kléber e ao Antônio Laranjeiras por suas contribuições em Latex e programação. A Nívea Fernanda uma grande amiga desde a época do mestrado. A Flávia Fernandes pelo carinho e amizade de sempre. Obrigado a todos os colegas da pós que tive a oportunidade de conhecer e compartilhar bons momentos.

E aos amigos que fiz na vida como Tiago Leite que sempre esteve presente e muito me motivou durante várias etapas desse tempo que encarei esse doutorado. Agradeço também as amizades de Carlos Alberto, Cássio Eráclito, Tamires Ribeiro, Gláucia Marinho, Lidiane Lira, Erika Maria, Noélia Rodrigues, Janaina Ligya, Izabella Rosario, Elda Nicásio, Marlyse Lessa e Viviane Paixão sou eternamente grato pelos momentos maravilhosos compartilhados. Agradeço muito o carinho de avó de Zoraide Felgueiras que desde a época de mestrado tem por mim aqui em Maceió a quem sou eternamente grato.

E por fim agradeço aos novos amigos como a Maria Terezinha Pestana do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais por acreditar que esse ciclo iria se encerrar e por ter me guiado na tradução deste trabalho. E também a minha nova família em Arinos MG as irmãs Valéria César e Raquel César pela recepção e acolhimento no meu mais novo ambiente de trabalho.

Resumo

As pesquisas em defeitos topológicos tem apresentado um interesse crescente nos últimos anos, visto que nenhum cristal produzido em laboratório é perfeito, ou seja, ele sempre apresentará um notável número de defeitos em sua estrutura. Os defeitos topológicos apresentam diferentes nomes que dependem particularmente da quebra de simetria do sistema. Assim, neste trabalho investigamos o espalhamento acústico por espalhadores rígidos inclusos em meios com defeitos topológicos tais como desclinação e monopolo global. Para estes meios foram investigados o espalhamento acústico por espalhadores sólidos e isotropicos inclusos em cristais líquidos na fase nemática com desclinação bem como defeitos de monopolo. Nestas sistemas, foram computados a amplitude e os padrões de espalhamento bem como a seção de choque. Os resultados revelaram que para baixas frequências e $\alpha < 1$ a onda retroespalhada é dominante, porém para valores de $\alpha > 1$ a onda espalhada se torna dominante, onde α é o parâmetro de defeito. Para altas frequências, quando o valor de α se aproxima de 0.1 verificamos que a onda retroespalhada passa a ser dominante. Concluimos que tanto os meios com desclinação quanto os monopolos globais apresentam uma grande vantagem na utilização em dispositivos que fazem uso de espalhamento de ondas acústicas em razão das grandes amplitudes que se pode alcançar utilizando essas estruturas cilíndricas e esféricas inclusas em fluidos com defeitos.

Palavras-chave: Defeitos topológicos. Desclinação. Monopolo Global. Espalhamento Acústico.

Abstract

Research on topological defects has been of increasing interest in recent years, since no laboratory-produced crystal is perfect, that is, it will always present a remarkable number of defects in its structure. Topological defects have different names that depend particularly on the symmetry breaking of the system. Thus, in this work we investigate the acoustic scattering by rigid scatter included in media with topological defects such as disclination and global monopole. For these media the acoustic scattering by solid scatter and isotropic included in liquid crystals in the nematic phase with disclination as well as global monopole defects were investigated. In these systems, the amplitude and the scattering patterns were computed as well as the cross section. The results revealed that for low frequencies and $\alpha < 1$ the backscattered wave is dominant, however for values of $\alpha > 1$ the spread wave becomes dominant, where α is the default parameter. For high frequencies, when the value of α approaches to 0.1 we found that the backscattered wave becomes dominant. We conclude that both the disclination and the global monopoles media have a great advantage in the use in devices that make use of acoustic wave scattering because of the large amplitudes that can be achieved using these cylindrical and spherical structures included in defective fluids.

Keywords: Topological defects. Disclination. Global monopole. Acoustic scattering.

Sumário

Introdução	13
1 Equações Fundamentais	18
1.1 Introdução	18
1.2 Equações de Conservação	18
1.3 Ondas acústicas	23
2 Espalhamento acústico num meio com desclinação	27
2.1 Introdução	27
2.2 Desclinação	29
2.3 Solução da equação de Helmholtz para um meio desclinado	33
2.4 Espalhamento acústico por um cilindro rígido	35
2.5 Seção de choque de espalhamento	41
2.6 Resultados e Discussões	43
3 Espalhamento acústico em um meio com defeito pontual: mono- polo global	50
3.1 Introdução	50
3.2 Monopolos globais	51

Sumário	12
3.3 Solução da Equação de Helmholtz	55
3.4 Espalhamento por uma esfera rígida	60
3.5 Seção de choque de espalhamento	67
3.6 Espalhamento de Rayleigh	72
3.7 Resultados e discussões	73
4 Considerações Finais e Perspectivas	79
Referências	82

Introdução

No contexto da matéria condensada, o estudo de defeitos em sólidos tem apresentado um interesse crescente, visto que nenhum cristal produzido em laboratório é perfeito, ou seja, ele sempre apresentará um notável número de defeitos em sua estrutura. Tais defeitos podem ser de origem química, elétrica ou estrutural, isto é, podem ser devido a presença de impurezas, excesso ou perda de átomos, ou a quebra de simetria local do cristal. Por conseguinte, os defeitos são responsáveis por muitas das propriedades físicas e químicas dos sólidos [57, 39].

Em geral, um defeito topológico é caracterizado por alguma região núcleo, ou seja, um ponto ou uma linha onde a ordem é destruída e uma região de campo distante onde uma variável elástica muda lentamente no espaço. Isto é, assim como em uma carga pontual, que tem a propriedade de que a sua presença pode ser determinada por meio de medições de um campo apropriado em qualquer superfície que envolva a carga. Por outro lado, os defeitos topológicos apresentam diferentes nomes dependendo da simetria que foi quebrada e do sistema em particular. Deste modo, em superfluidos de hélio e no modelo xy são denominados de vórtices, em cristais periódicos são deslocamentos e em cristais líquidos nemáticos são desclinações.

Num sentido mais amplo, os defeitos topológicos desempenham um papel importante nas propriedades reais dos materiais. Por exemplo, eles são responsáveis

pelo grande número de propriedades mecânicas dos metais como o aço. Particularmente, em duas dimensões são importantes pois desempenham um papel central na transição de fase de baixa temperatura, caracterizado por uma rigidez não nula a uma transição de fase desordenada a alta temperatura [14].

Neste sentido, a compreensão acerca da natureza dos defeitos topológicos e de como eles influenciam em muitas das propriedades físicas de determinados sistemas é algo que tem atraído um grande interesse em pesquisas científicas. Os defeitos topológicos estão presentes de forma marcante nos seguimentos da física moderna, seja em sistemas da matéria condensada tais como linhas de vórtices em hélio líquido [14], tubos de fluxo magnético em supercondutores do tipo II [77] ou em linhas de desclinação em cristais líquidos [60, 10], bem como em sistema cosmológicos tais como monopolos, bariogênese, paredes de domínio e cordas cósmicas [74, 38, 73, 12, 71]. Além destes, os defeitos topológicos também estão presentes nos sistemas biológicos como em membranas, insetos, vírus e em tecidos humanos [10].

Dentre os defeitos mais comuns em sólidos estão os lineares e os pontuais, sendo que os lineares podem ser classificados como deslocação ou desclinação. Em particular, o estudo de defeitos de desclinações foi introduzido por Taylor et al. [64] com o objetivo de compreender o comportamento dos átomos quando um cristal sofre deformação, mais particularmente no diz respeito às deformações plásticas em metais. Eles interpretaram estas deformações como deslocações laterais como é conhecida atualmente. Por outro lado, Burgers [64] generalizou a idéia de deslocação, introduzindo a deslocação tipo hélice ou parafuso. Entretanto, as desclinações foram originalmente estudadas pela física dos sólidos cristalinos, embora não tenha despertado um interesse marcante nessa área, visto que os mesmos

são raramente observados em cristais tridimensionais ordinários, sendo mais visto em cristais líquidos, membranas protéicas de vírus, impressões digitais e peles de animais listradas [32].

Uma outra classe de defeitos são os monopolos globais os quais na natureza são formados na transição de fase que ocorre quando uma simetria global é quebrada. Esta situação é similar a que acontece na Física da Matéria Condensada nas diferentes fases do hélio líquido ${}^3\text{He}$ que encontra uma infinidade de diferentes defeitos classificados por grupos de homotopia¹ [52].

Para determinar as propriedades mecânicas de um certo material, um ensaio destrutivo é apresentado como sendo o método mais objetivo e mais rápido. Para determinar, por exemplo, a resistência mecânica de um material basta sujeitá-lo a uma força de tração até atingir a sua rotura, sendo um teste destrutivo para o material em análise. Por outro lado, os ultrassons permitem o mesmo tipo de teste, que basicamente usa o mesmo tipo de força, porém com intensidades muito inferiores evitando desta forma a destruição do material. Entretanto, os primeiros testes não destrutivos por ultrassons foram usados para a detecção de defeitos. Ou seja, a onda ultrassônica ao encontrar um defeito num material dá origem a uma onda refletida, que pode ser usada para identificar e também classificar este defeito. Entretanto, as mesmas ondas ultrassônicas podem ser usadas na caracterização de materiais para a obtenção de grandezas como os módulos de elasticidade, tamanho de grão, porosidade ou propriedades mecânicas [57, 39].

Em razão dos argumentos apresentados anteriormente, existe um grande inte-

¹ Grupos de homotopia são usados em topologia algébrica para classificar espaços topológicos. O primeiro e mais simples grupo de homotopia é o grupo fundamental, que registra informações sobre loops em um espaço. Intuitivamente, grupos de homotopia registram informações sobre a forma básica, ou buracos, de um espaço topológico.

resse no estudo do espalhamento de ondas acústicas por cilindros e esferas tanto do ponto de vista experimental quanto teórico. Este interesse se fundamenta no uso destas técnicas na avaliação não destrutiva. Isto se aplica particularmente para a avaliação não destrutiva de componentes cilíndricos longos que caem na classe das poucas geometrias para as quais o campo de pressão tem uma solução explícita na forma de uma série infinita [55].

Estudos analíticos e numéricos de dispersão da onda acústica a partir de cilindros foram iniciadas por Faran em 1951 [25]. A Teoria Ressonante de dispersão (RST) era um dos principais trabalhos teóricos nesta área que apresentou uma interpretação física das ressonâncias geradas no corpo do espalhador devido à interferência construtiva das ondas de superfície. Essa teoria também mostrou que o espectro de frequência do eco retroespalhamento é composta de uma parte sobreposta a uma ressonância do espectro não ressonante, e que estas duas partes podem ser separadas analiticamente. Flex et al. [26] formularam o problema de dispersão de uma onda plana incidente obliquamente sobre um cilindro elástico infinito. As ondas de superfície geradas por uma onda acústica plana também incidente obliquamente sobre um cilindro foram estudados por Nagl et al. [56] baseados na RST e na transformação de Watson a qual consiste em reescrever a soma dos modos normais como uma integral de contorno no plano complexo [70]. Veksler [72] calculou as ressonâncias modais para um cilindro de alumínio insonorizado por uma onda incidente obliquamente e mostrou a sua correspondência com os extremos do espectro do retroespalhamento. Uma interpretação geométrica da correspondência de fase das ondas de superfície helicoidal foi dada por Conoir et al. [19], que mostrou também que as ressonâncias se deslocam para frequências mais elevadas, quando o ângulo de incidência é aumentado.

Assim sendo, nesta tese será apresentado um estudo teórico do espalhamento de ondas planas, mais especificamente ondas acústicas, por espalhadores isotrópicos sólidos inclusos em cristais líquidos na fase nemática que apresentam defeitos como desclinação e "hedgehog" o qual é similar a um monopolo global. A motivação para este estudo é que as pesquisas sobre defeitos topológicos têm despertado um interesse crescente pela comunidade científica durante as últimas década e continua a ser um dos campos mais ativos da cosmologia moderna bem como na física da matéria condensada.

Além do presente capítulo introdutório, o qual é apresentado uma perspectiva genérica em relação aos aspectos mais relevantes focados neste trabalho no Capítulo 1 será apresentado as equações fundamentais para o movimento de um fluido inviscido, apresentando os conceitos mais fundamentais subjacentes à propagação de ondas acústicas neste. No capítulo 2 será apresentado um estudo do espalhamento acústico por um cilindro rígido e isotrópico incluso em um cristal líquido na fase nemática com desclinação. No capítulo 3 será apresentado o espalhamento acústico por uma esfera rígida e isotrópica em num cristal líquido na fase nemática com defeito "hedgehog" e por fim, no capítulo 4 serão apresentadas as nossas conclusões acerca do espalhamento acústico nesses fluidos com defeito apresentados nos capítulos anteriores bem como futuras perspectivas a serem desenvolvidas.

1. Equações Fundamentais

1.1 Introdução

Os princípios gerais da mecânica se aplicam a todos os corpos e movimentos, bem como a diversidade de materiais na natureza é representado na teoria de equações constitutivas. Uma equação constitutiva é uma relação entre força e movimento [2, 7, 29]. Em mecânica contínua às forças de interesse são as forças de contato, que são especificadas pelo tensor \mathbf{T} . Assim como diferentes figuras são definidas na geometria como idealizações de certos objetos naturais importantes, em mecânica contínua os materiais ideais são definidos pelas relações específicas entre o tensor de stress e o movimento do corpo [8]. Assim, neste presente capítulo será feita uma introdução às equações fundamentais que descrevem o movimento de um fluido homogêneo e isotrópico, também será feita uma descrição para o movimento de uma onda de compressão num fluido não viscoso visto que, estas equações representam a base da compreensão subjacente aos problemas de espalhamentos que serão estudados nos capítulos seguintes.

1.2 Equações de Conservação

Em dinâmica dos fluidos consideramos um fluido, ou seja, um gás ou um líquido como um meio contínuo. Um fluido é dividido em pequenos elementos que são fixados com respeito ao sistema de coordenadas de laboratório. Um fluido arbitrário de volume fixo no espaço e localizado em \mathbf{r} é denotado por V . Considerando tam-

bém que a parcela de fluido em V possui um número muito de grande de átomos e moléculas. Além disso, ele está em equilíbrio termodinâmico. Esta hipótese nos permite definir quantidades para o elemento de fluido tal como densidade, pressão, temperatura, energia interna e entropia. Uma outra quantidade importante do elemento de fluido é sua velocidade, que poderá ser definida em termos da velocidade do centro de massa deste elemento.

Assim, considerando um elemento de fluido localizado em \mathbf{r} , o qual inclui N átomos ou moléculas em qualquer instante de tempo t . A densidade de V é dada por

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (1.1)$$

onde m_i é a massa de um átomo ou molécula em V . A velocidade do centro de massa do elemento de fluido em V no tempo t é definida como

$$v(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r},t)} \sum_{i=1}^N m_i v_i, \quad (1.2)$$

onde v_i é a velocidade instantânea do i -ésimo átomo ou molécula dentro do volume V . A velocidade é referida como velocidade de elemento de fluido.

A massa líquida somente pode variar por convecção de densidade, sendo a convecção de velocidade da densidade é $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, portanto a variação líquida de massa do volume V por unidade de tempo depende do fluxo de massa $\rho\mathbf{v}$ através da superfície S do volume V . Assim sendo, a conservação de massa requer

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\mathbf{r} + \int_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0, \quad (1.3)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário em S e d^3r e d^2r são elementos diferenciais de volume

e superfície, respectivamente. Desde que o volume é fixo, o operador $\frac{\partial}{\partial t}$ pode ser aplicado diretamente sobre a função densidade. Além do mais, a integral de superfície Eq.(1.3) pode ser transformada numa integral de volume usando o teorema de Gauss da divergência,

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.4)$$

Combinando as Eq.(1.3) e (1.4) e observando que V é arbitrário, podemos escrever equação da conservação de massa da seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.5)$$

O momento linear dentro do volume fixo V em qualquer instante de tempo é $\rho \mathbf{v}$. Da mesma forma que a variação da densidade no volume V , o momento linear também pode variar por convecção. Neste caso, o fluxo de momento é definido como $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$, onde a quantidade $\mathbf{v} \mathbf{v}$ é conhecida como uma díade que representa um tensor de segunda ordem. Da segunda lei de Newton, a taxa de variação do momento linear no volume V deve ser igual à soma do fluxo do momento, as forças de pressão normal à superfície S e qualquer força de corpo aplicada ao fluido, tal como a gravidade. Entretanto, um fluido ideal não suporta tensão de cisalhamento devido à viscosidade. Assim, a taxa de variação do momento linear no volume V é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} + \int_S p \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d^2 \mathbf{r} + \int_V \mathbf{f}^b d^3 \mathbf{r} = 0, \quad (1.6)$$

onde $p(\mathbf{r}, t)$ é a pressão em r e f^b é a densidade de força de corpo. A integral de na

Eq.(1.6) pode ser transformada em uma integral de volume por meio do Teorema de Gauss para tensor [4]. Portanto obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} + \int_V \nabla p \mathbf{n} d^3 \mathbf{r} + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} + \int_V \mathbf{f}^b d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (1.7)$$

Desde que o volume V é arbitrário, encontramos que a equação de conservação do momento é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla p + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \mathbf{f}^b = 0. \quad (1.8)$$

Em muitos casos de estudos, como neste trabalho, forças de corpo são muito menores que as outras forças contribuintes. Portanto, podemos definir que $f^b = 0$ na Eq. (1.8). Além do mais, o gradiente da pressão pode ser expandido como um tensor de segunda ordem, isto é, $\nabla p = \nabla \cdot (p \mathbf{I})$, onde I é o tensor unitário. Assim, podemos escrever a Eq. (1.8) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (1.9)$$

onde $\mathbf{S} = p \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ é o tensor de stress.

Por outro lado, os processos energéticos em fluidos são governados pelas leis da termodinâmica e convecção. É conveniente trabalhar com as quantidades termodinâmicas por unidade de massa. Assim, a energia interna por unidade de massa (energia específica) de um volume fixo V é denotado por ϵ , enquanto que sua entropia específica é s' . A primeira lei da termodinâmica diz que

$$d\epsilon = T ds' - p d(\rho^{-1}) = T ds' + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (1.10)$$

onde T é a temperatura em \mathbf{r} . É considerado aqui também que o transporte de calor através do fluido é muito pequeno comparado com a propagação acústica. Então assumimos que a entropia específica é constante $s' = s'_0$ através do fluido [59]. Portanto, a primeira lei da termodinâmica se torna $d\epsilon = p\rho^{-2}d\rho$. Desta forma, a energia interna específica e a pressão podem ser expressas como uma função da densidade,

$$p = p(\rho), \quad (1.11)$$

$$\epsilon = \epsilon(\rho). \quad (1.12)$$

A densidade de energia dentro do volume V em um dado instante t é representada como a soma das densidades de energia cinética e interna,

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho v^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \rho\epsilon(\mathbf{r}, t). \quad (1.13)$$

De forma similar a que foi desenvolvida para a conservação do momento linear, a taxa de variação da densidade de energia no volume V é devida a convecção a partir das fronteiras da superfície de V e a taxa de variação do trabalho realizado pela força de pressão feito em S . a convecção de densidade de energia é dada em termos do fluxo de energia $(\rho v^2/2 + \rho\epsilon)\mathbf{v}$, enquanto que a potência devido a pressão é $p\mathbf{v}$. Portanto, a conservação da densidade de energia pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\epsilon \right) d^3\mathbf{r} + \int_S \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\epsilon \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (1.14)$$

Usando o teorema de Gauss da divergência e observando que o volume V é arbi-

trário, obtemos a equação de conservação da energia como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) + \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) \mathbf{v} + p \mathbf{v} \right] = 0. \quad (1.15)$$

1.3 Ondas acústicas

Agora será discutido as pequenas oscilações que acontece no escoamento de um fluido compressível. Um movimento oscilatório com uma pequena amplitude de fluido compressível é chamado de onda sonora. Contudo, em cada ponto do fluido, uma onda sonora produz alternadamente compressão e rarefação.

Assim sendo, considere a propagação de uma onda sonora de pequena amplitude num meio homogêneo e isotrópico o qual pode ser considerado como um fluido invíscido, isto é, um fluido ideal que não possua viscosidade. Tomando $\mathbf{v} = v(\mathbf{r}, t)$ sendo o campo de velocidade, $p = p(\mathbf{r}, t)$ a pressão, $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ a densidade e $S = S(\mathbf{r}, t)$ a entropia específica. O movimento é governado pela equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (1.16)$$

a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.17)$$

a equação de estado

$$p = f(\rho, S), \quad (1.18)$$

e a hipótese adiabática

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S = 0, \quad (1.19)$$

onde f é uma função que depende da natureza do fluido.

Desde que as oscilações sejam pequenas, a velocidade \mathbf{v} também será pequena, tal que o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ na equação de Euler pode ser desprezado. Pelo mesmo motivo, as variações relativas na densidade do fluido e da pressão são pequenas. Desse modo, pode ser escrito que

$$p = p_0 + p', \quad (1.20)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (1.21)$$

onde ρ_0 e p_0 são as constantes de equilíbrio da densidade e da pressão, e ρ' e p' são suas variações na onda sonora ($\rho' \ll \rho_0$, $p' \ll p_0$). Substituindo as relações (1.20) e (1.21) na equação da continuidade (1.17) bem como na equação de Euler (1.16), Obtém-se:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0. \quad (1.23)$$

A condição que as equações linearizadas de movimento (1.22) e (1.23) devem ser aplicáveis para a propagação de ondas sonoras é que a velocidade das partículas do fluido \mathbf{v} na onda deve ser pequena comparada a velocidade do som \mathbf{c} , $\mathbf{v} \ll \mathbf{c}$.

As Eqs.(1.22) e (1.23) contém as funções desconhecidas \mathbf{v} , p' e ρ' . Para eliminar

uma delas, observe que uma onda sonora num fluido ideal é parecido com qualquer outro movimento num fluido ideal, adiabático. Portanto, a pequena mudança na pressão p' é relativa a pequenas mudanças na densidade ρ' tal que,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (1.24)$$

que representa a equação de estado linearizada.

Substituindo a Eq.(1.24) na equação da continuidade linearizada (1.22) obtém,

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho'} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.25)$$

Derivando em t a Eq.(1.25)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \left(\frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho'} \right) \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (1.26)$$

Substituindo a Eq.(1.23) na Eq.(1.26) obtém a equação de onda em termos da pressão p' ,

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad (1.27)$$

onde a velocidade do som é definida por

$$c^2 = \frac{\partial f(\rho_0, S_0)}{\partial \rho'}. \quad (1.28)$$

A fim de expressar todas as incógnitas em termos de uma delas, é conveniente introduzir o potencial que é dado por:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (1.29)$$

Da equação de Euler linearizada observamos que o campo de pressão pode ser escrito como:

$$p' = i\rho_0\dot{\phi}. \quad (1.30)$$

É evidente que o potencial de velocidade também satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.31)$$

Para uma onda acústica da forma:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \text{Re} [\phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}], \quad (1.32)$$

com frequência angular $\omega > 0$. Assim sendo, substituindo a Eq.(1.32) na equação de onda (1.31), obtém-se a equação de onda de Helmholtz:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + k^2\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.33)$$

onde o número de onda é dado por $k = \frac{\omega}{c}$. Essa equação recebe o nome do físico Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz em razão da sua contribuição matemática a **acústica** e ao **eletromagnetismo**.

Portanto, por meio da equação de Helmholtz, Eq.(1.33), nos capítulos seguintes iremos resolver o problema de espalhamento acústico para espalhadores rígidos inclusos em cristais líquidos com defeito de linha e também com defeito pontual.

2. Espalhamento acústico num meio com desclinação

2.1 Introdução

Existe um grande interesse no estudo de defeitos topológicos [41, 3] sobre sistemas com quebra de simetria como em meios ordenados com materiais magnéticos, materiais cristalinos ambos sólidos e líquidos, em superfluidos de hélio e em fluidos quânticos [15, 9, 49, 69, 78, 13, 16, 20]. Devido à semelhança na natureza das leis de escala que caracterizam esses sistemas, os cristais líquidos fornecem uma plataforma de fácil acesso para pesquisas. Mesmo alguns modelos cosmológicos podem ser verificados em laboratórios, basicamente estudando a dinâmica de defeito em cristais líquidos [18, 17]. Entretanto, o conhecimento atual que se tem sobre defeitos (teoria do deslocamento) em sólidos cristalinos se deve de forma significativa às primeiras investigações em meios cristalinos por O. Lehmann, G. Friedel e F. Grandjean [65, 44, 42, 36, 30, 28]. Além do mais, numerosas estruturas biológicas exibem ordenação líquida cristalina, motivando investigações sobre a origem da vida com base em microscopia óptica de cristais líquidos [43].

Os cristais líquidos nemáticos que são compostos por moléculas similares a hastas rígidas, quando sujeitos a restrições topológicas, podem formar uma descontinuidade na direção do seu alinhamento o que é conhecido como defeito. Em experimentos, os defeitos são comumente encontrados como ponto isolado ou linha de desclinação [61]. Quando condições como temperatura e as fronteiras variam,

a localização e a topologia dos defeitos podem alterar drasticamente [31]. Assim, prever padrões de defeitos é a chave para a concepção de auto-montagem biomolecular e suspensões coloidais e portanto, de grande interesse prático embora seja um problema complexo [51, 46, 24, 45].

O espalhamento de ondas acústicas foi primeiramente investigado matematicamente por Lord Rayleigh [63]. Contudo, devido a complexidade das soluções matemáticas, ele apenas considerou o caso limite onde o espalhador é pequeno comparado com o comprimento de onda incidente. A solução para espalhamento por cilindros e esferas rígidas e imóveis, não necessariamente pequena comparada com o comprimento de onda, foi dada numa forma conveniente por Morse [55], que definiu e tabulou valores de ângulos de fase associados com o espalhamento de ondas parciais, em ordem para simplificar a complexa dependência nas funções de Bessel. Além disso, muitos dos espalhamentos por sólidos no ar podem ser considerados como partículas rígidas e imóveis, sendo válidos somente em alguns casos especiais. Em geral, as ondas sonoras que penetram o espalhador devem ser levadas em conta, como pode ser considerado um efeito na distribuição do ângulo do espalhamento e no espalhamento total de energia. Morse juntamente com Lowan, Feshbach e Lax estenderam mais tarde esta solução para incluir os efeitos de ondas compressionais nos espalhamentos por cilindros e esferas em fluidos. Portanto, neste presente capítulo será investigado o espalhamento de uma onda acústica por um cilindro rígido incluso num cristal líquido nemático com desclinação. Entretanto, para este fim será apresentado uma métrica que descreve este meio desclinado, a fim de obter a solução da equação de onda de Helmholtz que descreve tal espalhamento.

2.2 Desclinação

Quando um cristal sofre deformações, a distância entre dois pontos quaisquer do cristal é alterada. As deformações elásticas num cristal provém tanto de forças externas quanto da presença de defeitos internos presentes no cristal. No geral, tais defeitos são devidos a impurezas químicas, sítios da rede vazios e átomos fora da rede. Eles também podem ser formados pela quebra de simetria no cristal, os quais são denominados de *defeitos topológicos*. Estes podem ser definidos como um defeito em um campo do parâmetro de ordem que não pode ser eliminado por uma deformação contínua do parâmetro de ordem [39]. Por outro lado, eles podem ser caracterizado por uma região de singularidade, isto é, um ponto ou uma linha onde a ordem é destruída por um campo numa região onde as variáveis elásticas variam suavemente no espaço.

Os defeitos topológicos são identificados com o tipo de quebra de simetria em questão. Assim sendo, desde que o cristal não seja invariante apenas por translações discretas, mas também sob certas rotações é provável a existência de um certo tipo de defeito o qual é capaz de destruir a ordem global de rotação, enquanto mantém a ordem local. Este defeito que envolve rotações da rede é conhecido como **desclinação**.

Por outro lado, nos cristais líquidos os defeitos podem ser definidos como pontos localizados dentro de uma amostra onde o parâmetro de ordem, e consequentemente a orientação do diretor, não está bem definida. No geral, um local desordenado é uma singularidade dentro de outra forma ordenada, sendo que a presença dos defeitos não só altera as propriedades físicas na sua vizinhança, mas também aumenta a energia livre total do sistema. No entanto, a influência das superfí-

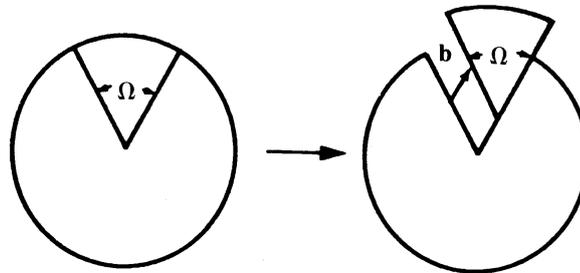
cies, campos externos, ou a redução da simetria (isotrópica a transição nemática) pode de forma espontânea e/ou de forma controlada criar e estabilizar defeitos topológicos.

Nos cristais líquidos nemáticos, as desclinações são amplamente divididas em duas classes: desclinação cunha e desclinação torção [27, 62]. Enquanto a singularidade linha encontra-se perpendicular ao plano das moléculas na desclinação cunha e a linha fica no plano das moléculas na desclinação torção. Nos cristais líquidos nemáticos os defeitos são principalmente do tipo cunha sendo que estes são mais fáceis de compreender comparados aos seus homólogos de torção.

Um forma de obter este tipo de defeito é utilizando o processo de Volterra "experimento pensado", ou seja, tome um cristal regular no formato de um cilindro e remova uma seção de ângulo Ω o qual é definido como vetor de Frank. Tais experimentos de Gerdanken de cortar um cristal, remover ou inserir fatias ou seções e unir suavemente faces livres foi primeiramente performado por Volterra em 1907. Por essa razão, fala-se da criação de uma linha de defeito como um processo de Volterra e denominado de superfície de corte ou de Volterra, sendo que as superfícies do corte podem ser unidas ou coladas novamente. Se as camadas atômicas forem coladas perfeitamente o cristal pode reestabelecer localmente sua estrutura periódica. Conforme mostrado na Figura 2.1, a estrutura local é destruída apenas ao longo da linha singular, ou seja, ao longo do eixo cilíndrico.

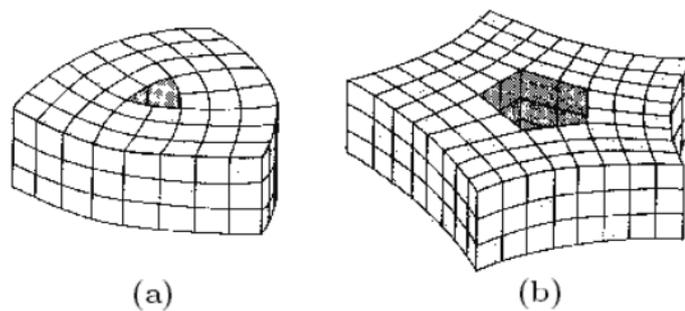
As desclinações podem ser classificadas ainda como positiva ou negativa. Para uma desclinação positiva é aquela que ocorre quando o vetor de Frank Ω é positivo, ou seja, depois de cortado o material é retirado um setor de ângulo Ω do mesmo veja Figura 2.2(a). Por outro lado, uma desclinação negativa ocorre quando o vetor de Frank, Ω , é negativo, ou seja, depois de cortar e deslocar de um certo ângulo o

Figura 2.1: Secção transversal do processo de formação de uma desclinação num cristal formado por uma pilha de camadas circulares.



material, é inserido no mesmo outro material sendo que tal material inserido pode ou não ser da mesma espécie conforme mostrado na Figura 2.2(b).

Figura 2.2: A figura (a) mostra uma desclinação cunha positiva de 90° e (b) uma desclinação cunha negativa de -90° .



Os sólidos elásticos com defeitos topológicos podem ser descritos segundo a geometria de Riemann-Cartan [1]. Katanaev e Volovich [35] mostraram a equi-

valência entre a gravidade tridimensional com a torção e a teoria dos defeitos em sólidos. Nesta, os defeitos agem como uma fonte do campo de distorção gravitacional. Sabe-se que a métrica a qual descreve o meio em torno do defeito é a solução da equação tridimensional de Einstein-Cartan. Desde que estamos discutindo linhas de defeitos é conveniente imaginar espaços planos tridimensionais como uma pilha de "panquecacas", e portanto, estender a deformação para o resto da pilha. Certamente, a métrica que descreve esse espaço num sistema de coordenadas cilíndricas é:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.1)$$

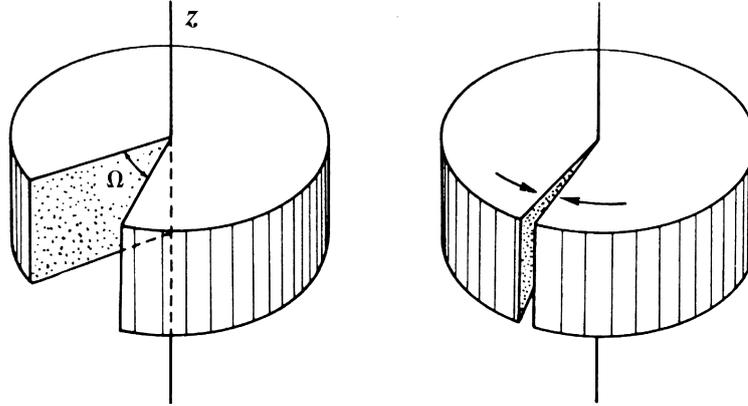
Considerando uma pilha de discos de átomos se nestas existe uma falta ou excesso de átomos juntos eles desempenham um fenômeno cooperativo conforme Figura 2.2. Por outro lado, um infinito número de meio planos atômico, ou seja, discos de tamanho semi-infinito forão de um cristal ideal. Se meio plano formam uma rede cristalina regular, isto é, eles podem se encaixar perfeitamente no cristal original. Apenas na origem há uma quebra de simetria do cristal. Assim, o que foi formado é um defeito de linha isto é, uma desclinação. Uma desclinação é um defeito de linha onde a simetria de rotação é violada [39].

Considerando o meio desclinado como na Figura 2.3, a métrica que define este meio, que de fato é a secção do espaço da métrica da corda cósmica [8], que é dada por

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (2.2)$$

onde α fornece uma medida do déficit angular. Uma vez que a fatia de ângulo $2\pi(1 - \alpha)$ foi removida do espaço, o ângulo total em torno do eixo z é agora $2\pi\alpha$.

Figura 2.3: Formação de uma disclinação de uma pilha de camadas circulares.



2.3 Solução da equação de Helmholtz para um meio desclinado

Considerando a métrica dada pela Eq.(2.2), iremos agora obter a solução para a equação de Helmholtz. Por meio dessa métrica, o operador de Laplace-Beltrami¹ pode ser escrito da seguinte forma,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\alpha r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.3)$$

Desta forma, a equação de Helmholtz utilizando a métrica (2.2) é:

$$\frac{1}{\alpha r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k_1^2 \phi = 0. \quad (2.4)$$

¹O Laplaciano também pode ser generalizado para um operador elíptico chamado operador de Laplace-Beltrami definido em uma variedade Riemanniana. Assim, considerando uma métrica definida por $ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2$, onde h_i são os fatores de escala, o operador de Laplace-Beltrami é definido por meio da seguinte relação: $\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]$.

Utilizando o método de separação de variáveis, a função espacial ϕ pode ser separada em três funções independentes entre si, ou seja,

$$\phi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z). \quad (2.5)$$

Substituindo a Eq.(2.5) na equação de Helmholtz (2.4) encontra-se

$$\frac{1}{\alpha r R} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\alpha^2 r^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_1^2 = 0. \quad (2.6)$$

Observando a Eq.(2.6), temos que o terceiro termo depende apenas de z , o qual deve ser igual a uma constante, ou seja, $-k_z^2$,

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2, \quad (2.7)$$

logo,

$$\frac{\alpha r}{R} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \alpha^2 r^2 k_r^2 = 0, \quad (2.8)$$

onde $k_r^2 = k_1^2 - k_z^2$. Essa última equação vemos que o segundo termo depende apenas de θ , desta forma também pode ser igual a uma constante, $-m^2$:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2, \quad (2.9)$$

e

$$\frac{1}{\alpha r R} \left[\frac{d}{dr} \left(\alpha r \frac{dR}{dr} \right) \right] - m^2 + \alpha^2 r^2 k_r^2 = 0. \quad (2.10)$$

A Eq.(2.10) ainda pode ser escrita como

$$r^2 \frac{dR^2}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + \left[(rk_r)^2 - \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 \right] R = 0, \quad (2.11)$$

a qual é conhecida como equação diferencial de Bessel. Desta forma a solução das Eqs.(2.7), (2.9) e (2.11) serão respectivamente,

$$Z(z) = Ae^{ik_z z} + Be^{-ik_z z}, \quad (2.12)$$

$$\Theta(\theta) = C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta), \quad (2.13)$$

$$R(r) = EJ_{\frac{m}{\alpha}}(k_r r) + FN_{\frac{m}{\alpha}}(k_r r), \quad (2.14)$$

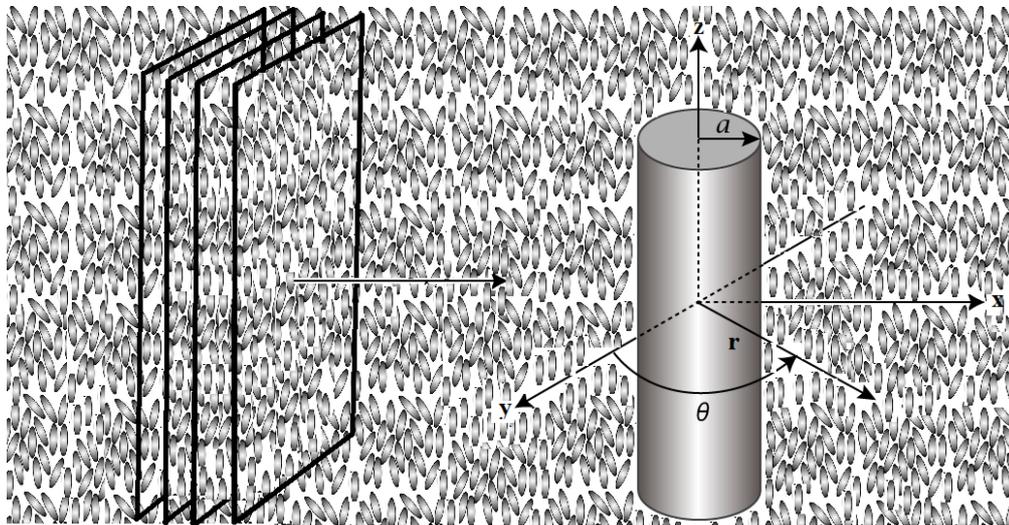
onde $J_{\frac{m}{\alpha}}(k_r r)$ e $N_{\frac{m}{\alpha}}(k_r r)$ são as funções de Bessel e de Neumann, respectivamente. Portanto, estas soluções serão utilizadas na seção seguinte para resolver o problema de espalhamento acústico por um cilindro rígido incluso num cristal líquido com desclinação.

2.4 Espalhamento acústico por um cilindro rígido

Considere uma fonte de ondas sonoras planas de frequência $\omega/2\pi$ num cristal líquido na fase nemática, essas ondas incidem sobre um cilindro infinitamente longo feito de um sólido rígido e isotrópico. Tomando o eixo do cilindro coincidindo com o eixo z de um sistema de coordenadas retangulares, e considerando que a onda se aproxima do cilindro ao longo do eixo x negativo, conforme é mostrado na

Figura 2.4. De acordo Lord Rayleigh e outros, a solução previamente dada para espalhamento acústico por sólidos imersos em fluidos, o movimento no fluido é considerado como de uma onda plana incidente e uma onda de espalhada [63, 55, 47].

Figura 2.4: Representação esquemática das frentes de ondas planas incidindo sobre um cilindro rígido de raio a feito de um material isotrópico incluso num cristal líquido nemático.



Para resolver o problema de espalhamento é preciso expressar os campos incidentes na superfície do cilindro. Assim, ao incidir uma onda sobre um cilindro rígido a onda incidente é totalmente refletida sem que haja absorção por ele. As ondas incidente e espalhada são descritas em termos dos potenciais de velocidade $\phi_{in}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\phi_{sc}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, respectivamente. As amplitudes dos potenciais de veloci-

dade satisfazem a equação de onda de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \phi_{in} \\ \phi_{sc} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.15)$$

onde $k = \omega/c_0$ é o número de onda, ω é a frequência e c_0 é a velocidade do som no cristal líquido. Na aproximação linear, de acordo com a Eq.(1.51) a pressão incidente (espalhada) e a velocidade do fluido (cristal líquido) estão relacionadas por:

$$p_{in(sc)} = i\rho_0\dot{\phi}_{in(sc)}, \quad (2.16)$$

e

$$v_{in(sc)} = \nabla\dot{\phi}_{in(sc)}. \quad (2.17)$$

Aqui, usaremos a solução regular da EDO de Bessel $J_{\frac{m}{\alpha}}(k_r r)$, pois a segunda solução independente (irregular) é singular na origem. A pressão e o deslocamento devem ser simétricos em $\theta = 0$ (direção positiva do eixo x). Além disso, visto que o cilindro tem um comprimento finito, e a onda plana incidente, de extensão infinita, não deve apresentar uma dependência em z, sendo conveniente supor que não há deslocamento nesta direção.

Como pode ser observado na Figura 2.4, a origem do sistema de coordenadas está situada no centro do cilindro. Devido à simetria do problema descrevemos os potenciais incidente e espalhado como funções de coordenadas cilíndricas tal que r é a distância radial para o ponto de observação $r = (x, y, z)$, sendo θ o ângulo polar e z o eixo do cilindro. Portanto, de acordo com a equação de Helmholtz (2.15), as amplitudes dos potenciais incidente e espalhado, podem ser expandidos em uma

série de ondas parciais da seguinte forma,

$$\phi_{in}(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_{\frac{m}{\alpha}}(kr) \cos(m\theta), \quad (2.18)$$

$$\phi_{sc}(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s_m H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)}(kr) \cos(m\theta), \quad (2.19)$$

onde a_m é o coeficiente de forma de feixe da onda incidente e s_m é o coeficiente de espalhamento escalar.

Assim, o campo de pressão incidente como dado na Eq.(2.18) por meio do potencial incidente assume a seguinte forma,

$$p_{in}(r,\theta) = P_0 e^{ikr \cos(\alpha\theta)} = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} J_{\frac{m}{\alpha}}(kr) \cos(m\theta). \quad (2.20)$$

onde P_0 é a amplitude da pressão da onda incidente e ϵ_m é o fator de Neumann dado como $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_m = 2$ para $m > 0$.

A aproximação de campo distante ($kr \gg 1$) para a onda incidente é obtida substituindo a forma assintótica da função de Bessel [4]

$$J_{\nu}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq.(2.21) na Eq.(2.20), obtemos:

$$p_{in}(r,\theta) = P_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} \cos \left[kr - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right] \cos(m\theta). \quad (2.22)$$

Por outro lado, para a onda incidente, estamos preocupados em encontrar a solução de uma onda que se propague numa região que não inclui a origem do

sistema de coordenadas, por esta razão, essa onda deve ser regular na origem, ou seja, finita dentro da região de propagação. Entretanto, para a onda espalhada não consideraremos a região que inclui a origem do sistema de coordenadas. Além disso, observa que a amplitude da onda espalhada ϕ_{sc} deve satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld no infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi_{sc} = 0. \quad (2.23)$$

Sendo que esta condição impõe que a onda espalhada não deve ser refletida no infinito.

Devido a dispersão da onda incidente, os campos espalhados são dados em termos das funções de Hankel

$$p_{sc}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s_m H_m^{(2)}(kr) \cos(m\theta). \quad (2.24)$$

Para um cilindro rígido a velocidade radial total, incluindo incidente e espalhada, desaparece na sua superfície em $r = a$. Assim temos a seguinte condição,

$$v_{in}(a, \theta) + v_{sc}(a, \theta) = 0. \quad (2.25)$$

A equação de Euler dada pela Eq.(2.25) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial r} (p_{in}(r, \theta) + p_{sc}(r, \theta)) |_{r=a} = 0. \quad (2.26)$$

Substituindo as Eqs.(2.20) e (2.24) na Eq.(2.26) encontramos o coeficiente escalar

do espalhamento s_m

$$s_m = -P_0 \frac{J'_m(ka)}{H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)'}(ka)}. \quad (2.27)$$

Deste modo podemos escrever a pressão espalhada como,

$$p_{sc}(r, \theta) = -P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} \frac{J'_m(ka)}{H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)'}(ka)} H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)}(kr) \cos(m\theta). \quad (2.28)$$

Para o campo de pressão total temos:

$$p_t(r, \theta) = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} \left[J_{\frac{m}{\alpha}}(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)'}(ka)} H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)}(kr) \right] \cos(m\theta). \quad (2.29)$$

A onda espalhada no campo distante ($kr \gg 1$) pode ser obtida utilizando a relação assintótica [4].

$$H_{\nu}^{(2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i[kr - \frac{1}{2}\pi(\nu + \frac{1}{2})]}. \quad (2.30)$$

Substituindo a Eq.(2.30) na Eq.(2.28), obtemos

$$p_{sc}(r, \theta) = -P_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} \frac{J'_m(ka)}{H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)'}(ka)} e^{-i[kr - \frac{1}{2}\pi(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{2})]} \cos(m\theta). \quad (2.31)$$

A normalização do campo distante da pressão espalhada pode ser definida como:

$$p_s(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} P_{sc}(r, \theta) \left(\frac{\pi r}{p_0^2 a^2} \right)^{1/2} e^{i[kr - \frac{1}{2}\pi(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{2})]}, \quad (2.32)$$

com $\lim_{r \rightarrow \infty} P_{sc}(r, \theta)$ dado pela Eq.(2.31). Assim obtemos:

$$P_s(\theta) = - \left(\frac{2}{ka} \right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^{\frac{m}{\alpha}} \frac{J'_m(ka)}{H_{\frac{m}{\alpha}}^{(2)'}(ka)} \cos(m\theta). \quad (2.33)$$

Este último resultado será útil para a obtenção dos padrões de espalhamento na seção de resultados e discussões.

2.5 Seção de choque de espalhamento

A introdução de um obstáculo no caminho de uma onda plana produz um espalhamento a uma distância do obstáculo que é grande relativamente ao comprimento de onda e ao seu tamanho. Para uma onda que se propaga ao longo da direção x , conforme Figura 2.4 e considerando a metrica dada pela Eq.(2.2) a solução da parte radial da equação de Helmholtz conduz a

$$R(r) = A_m J_{\frac{m}{\alpha}}(kr) + B_m N_{\frac{m}{\alpha}}(kr). \quad (2.34)$$

Como $N_{\frac{m}{\alpha}}(kr)$ apresenta uma singularidade na origem concluímos que $B_m = 0$.

Portanto, a solução regular é então:

$$R(r) = A_m J_{\frac{m}{\alpha}}(kr). \quad (2.35)$$

O ângulo da difereça de fase δ_m é determinado a partir das formas assintóticas das funções de Bessel e Neumann [23, 54]:

$$J_m(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[kr - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.36)$$

e

$$N_m(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin \left[kr - \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

Assim para a função radial temos:

$$R_m \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos \left[kr - \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.38)$$

O ângulo da diferença de fase δ_m é proporcional ao ângulo de espalhamento clássico, que pode ser obtido a partir da equação clássica do movimento [23]:

$$\delta_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2}, \quad (2.39)$$

e segue que

$$f_k(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2} \right) \exp \left(i \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2} \right) \exp(im\theta). \quad (2.40)$$

Assim, para $\theta = 0$ temos:

$$f_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2} \right) \exp \left(i \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2} \right). \quad (2.41)$$

A seção de choque de espalhamento é obtida mediante a integração de $\sigma(\theta)$

$$\sigma = \int_0^{2\pi\alpha} \sigma(\theta) d\theta, \quad (2.42)$$

onde $\sigma(\theta)$ de acordo com [23] é dada por $\sigma(\theta) = \frac{1}{k} |f_k(\theta)|^2$, ou seja,

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{m\pi}{2} \right) \right]. \quad (2.43)$$

Assim, substituindo a Eq.(2.43) na Eq.(2.42) e integrando sobre $2\pi\alpha$ obtemos:

$$\sigma = \frac{4\alpha}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \frac{m\pi}{2} \right]. \quad (2.44)$$

Da Eq.(2.40) segue que,

$$Imf_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin^2 \left[\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) \frac{m\pi}{2} \right]. \quad (2.45)$$

Portanto a seção de choque total será,

$$\sigma = \frac{\sqrt{8\pi\alpha}}{k} Imf_k(0). \quad (2.46)$$

sendo a mesma estrutura do usual teorema ótico.

2.6 Resultados e Discussões

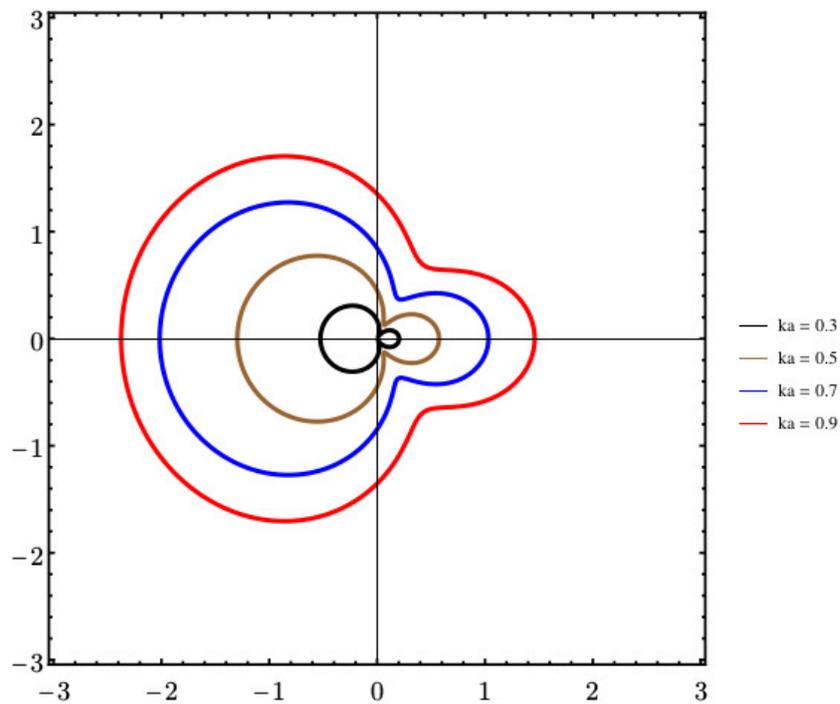
Para obter o padrão de espalhamento, ou distribuição angular da pressão da onda espalhada à grandes distâncias do cilindro no meio com desclinação, é preciso verificar o que acontece com a onda plana a grandes distâncias do dispersor.

Assim sendo, utilizando a expansão assintótica para as funções de Hankel dada pela Eq.(2.30), temos que a pressão espalhada normalizada à grandes distâncias do dispersor assume a forma dada pela Eq.(2.33). Foi considerado também que a onda é incidente da direita para a esquerda e as escalas usadas na obtenção dos padrões são apresentadas em cada uma das figuras a seguir.

A Figura 2.5 mostra o padrão de espalhamento em um meio sem desclinação, ou seja, $\alpha = 1$ para baixas frequências, $ka < 1$. Como se pode observar à baixas

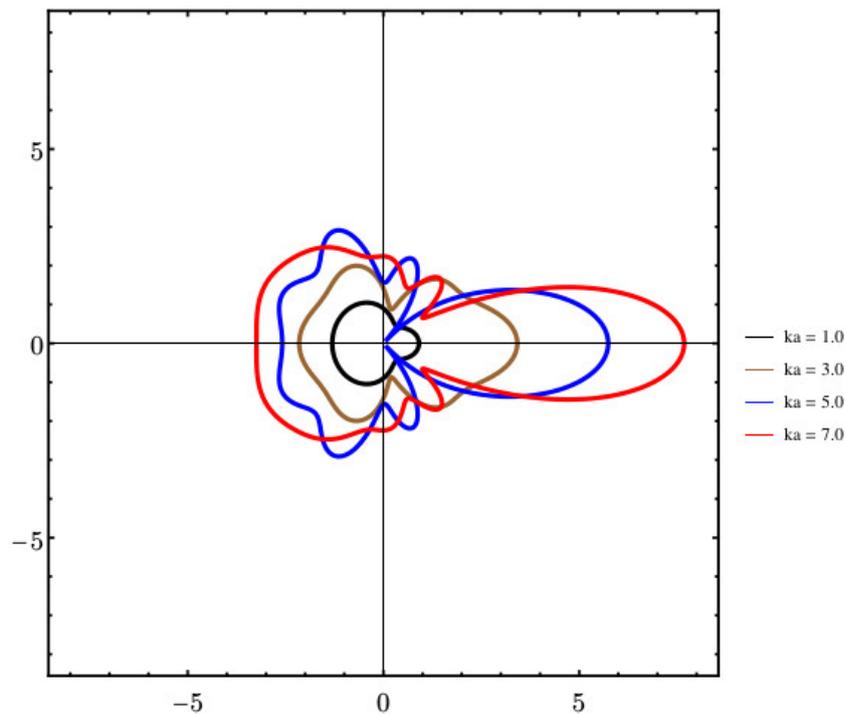
frequências a onda retroespalhada é dominante sobre a onda espalhada.

Figura 2.5: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha = 1$ para baixas frequências considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



Por outro lado, a Figura 2.6 mostra o padrão de espalhamento para um meio sem desclinação, ou seja, $\alpha = 1$ para altas frequências, $ka > 1$. Observa-se nesta, que o aumento do valor de ka , torna a onda espalhada dominante sobre a onda retroespalhada.

Figura 2.6: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha = 1$ para altas frequências considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



As Figuras 2.7 mostra o padrão de espalhamento para um cilindro rígido num meio com desclinação onde o parâmetro de defeito varia para valores menores que a unidade, $\alpha < 1$, e $ka = 0.5$. Nesta observa-se que a baixa frequência e valores de $\alpha < 1$ a onda retroespalhada ainda continua dominante porém, quando $\alpha \rightarrow 0.1$ o espalhamento se torna omnidirecional. Por outro lado, a Figura 2.8 mostra que também para baixas frequências, $ka = 0.5$, o aumento dos valores de $\alpha > 1$ torna a onda espalhada dominante sobre a onda retroespalhada.

Figura 2.7: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha < 1$ e $ka = 0.5$ para baixa frequência considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.

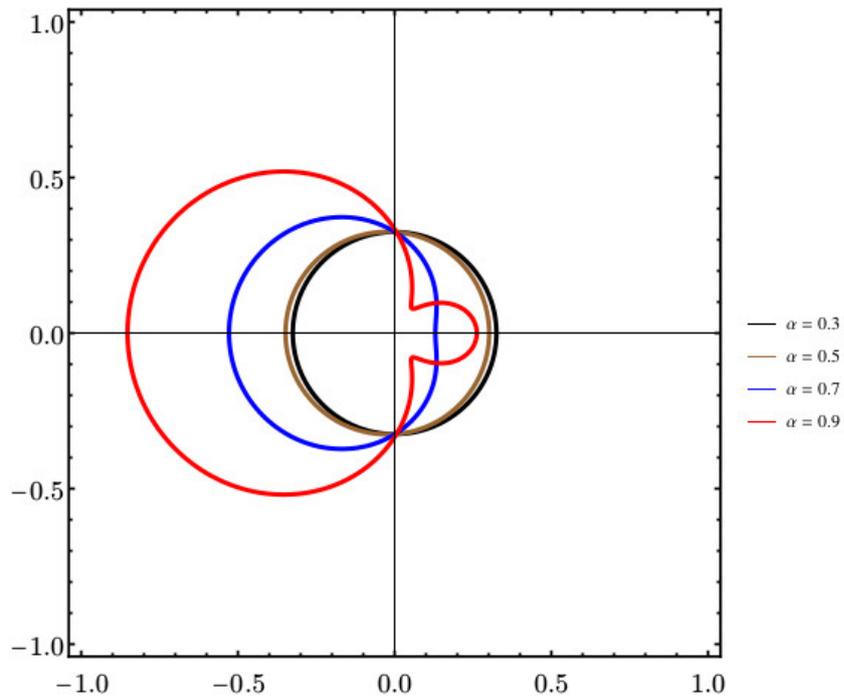
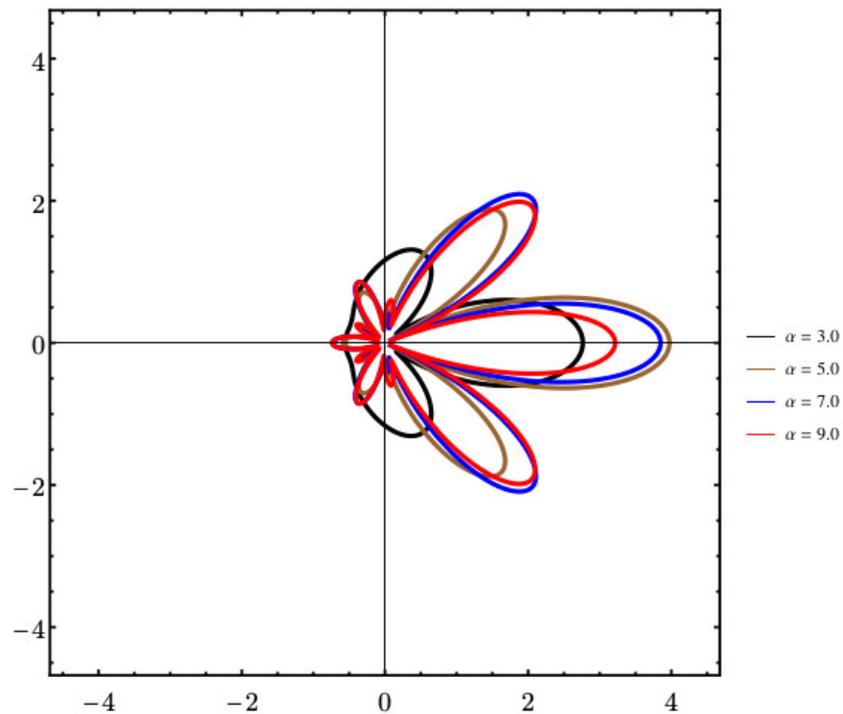
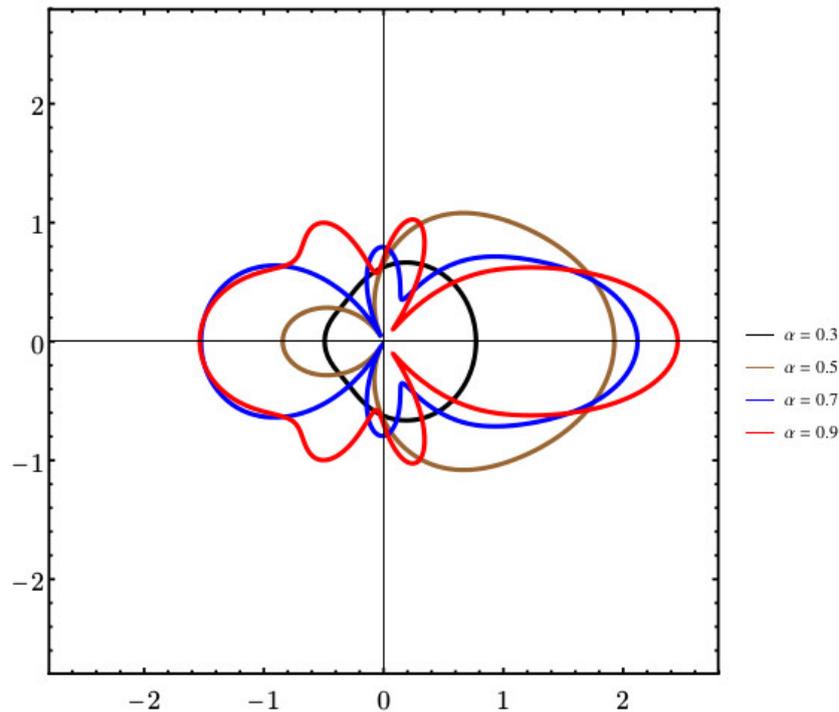


Figura 2.8: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha > 1$ e $ka = 0.5$ para baixa frequência considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



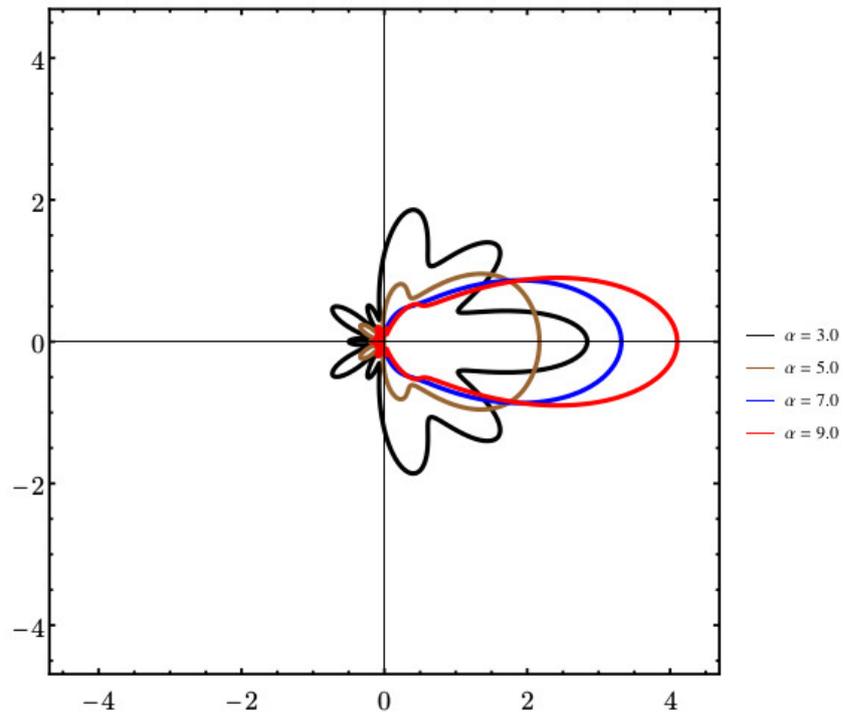
A Figura 2.9 mostra o padrão de espalhamento para alta frequência considerando que $ka = 5.0$, e os valores para o parâmetro de defeito são maiores que a unidade, $\alpha > 1$. Neste caso observa-se a maior amplitude da onda espalhada se dá para $\alpha = 0.9$. Por outro lado, a Figura 2.10 mostra mais claramente que o aumento do parâmetro α torna a onda espalhada dominante sobre a onda retroespalhada sendo mais evidente para $\alpha = 9.0$.

Figura 2.9: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha < 1$ e $ka = 5.0$ para alta frequência considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



Como se pode observar nas figuras dos padrões de espalhamento, para um meio sem defeito a baixa frequência a onda retroespalhada se torna dominante sobre a onda espalhada. Assim, ao introduzir defeito, mantendo a frequência fixa para $ka = 0.5$, a onda retroespalhada continua dominante aumentando apenas a amplitude conforme é aumentado o valor de α . Entretanto, para altas frequências e um meio sem defeito a onda espalhada é dominante sobre a onda retroespalhada e o aumento de α induz uma amplitude maior para a onda espalhada.

Figura 2.10: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para um cilindro rígido cujo parâmetro de defeito do é $\alpha > 1$ e $ka = 5.0$ para alta frequência considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



3. Espalhamento acústico em um meio com defeito pontual: monopolo global

3.1 Introdução

Do ponto de vista da teoria da gravitação, os diferentes tipos de objetos topológicos foram criados durante a transição de fase do vácuo no início do universo [37]. Na arena cosmológica, os defeitos foram apresentados como um possível mecanismo para a formação de estruturas [6]. Entretanto, a descoberta de uma assimetria não gaussiana nas microondas de fundo favoreceu a conclusão que os defeitos estavam em algum ponto da evolução do universo [3]. Sendo que estes incluem paredes de domínio, cordas cósmicas e monopolos.

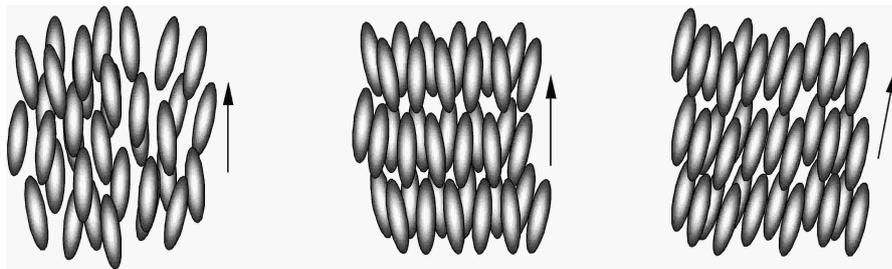
Dentre os mencionados defeitos topológicos, cordas cósmicas e monopolos apresentam-se como os melhores candidatos a serem observados. Um monopolo global é um objeto pesado formado na transição de fase de um sistema composto por um auto acoplamento por um tripleto campo escalar.

Assim, neste capítulo investigaremos o espalhamento de uma onda acústica por uma esfera rígida incluída num cristal líquido na fase nemática com defeito pontual denominado de "hedgehog".

3.2 Monopolos globais

A grande quantidade de sistemas em Física da matéria condensada podem ser descritas pelas mesmas estruturas matemáticas como as que descrevem o campo gravitacional em Relatividade Geral [5]. Os cristais líquidos tais materiais tem despertado um grande interesse em pesquisas tanto teórica quanto experimental [68, 21, 40, 11, 34, 53]. Os cristais líquidos são feitos de moléculas anisotrópicas (disc-like ou haste-like) que apresentam meta-estados entre as fases cristalina e líquida. Um desses meta-estados é a fase nemática a qual o eixo das moléculas são orientados, em média, ao longo de uma direção específica chamada de diretor como se pode ver na Fig. 3.1, representado pelo versor \hat{n} , enquanto que os seus centros de massa estão localizados aleatoriamente. Uma vez na fase nemática o índice de refração, a velocidade do som e outras propriedades macroscópicas se tornam anisotrópicas. Além dessas, a fase nemática pode apresentar birrefringência, quando o diretor desempenha o papel de eixo óptico [68, 21, 58].

Figura 3.1: Representação esquemática de um cristal líquido nemático.



Esta analogia gravitacional é fundamentada no princípio de Fermat, uma vez que este também pode ser utilizado para determinar as trajetórias de som [33]. Entretanto, a velocidade local do som desempenha o papel da velocidade da luz

na Relatividade Geral e o som se propaga ao longo das geodésicas nulas da métrica acústica. O interesse de utilizar essa analogia ou, mais especificamente, esta abordagem geométrica é que ela ajuda na compreensão de um ponto de vista diferente de vários problemas relacionados à acústica como por exemplo, a reconstrução da imagem tomográfica através de traçado de raios [79], tempo de voo em guias de ondas acústicas [76], problemas utilizando o método variacional [50] ou nematocistos [75].

Os defeitos topológicos podem surgir em modelos de calibre com quebra espontânea de simetria. Estes podem ser de vários tipos tais como monopolos, paredes de domínio, cordas e seus híbridos [38, 74]. Sua natureza depende da topologia do coletor de vácuo da teoria de campo sob considerações.

Assim sendo, os monopolos podem ser formados como o resultado da quebra de simetria tanto local quanto global, sendo que neste último é denominado de monopolo global. As condições topológicas para a formação dos monopolos são as mesmas em ambos os casos porém, as suas propriedades são bastante diferentes.

O modelo mais simples que dá origem a um monopolo global é descrito por um sistema composto por um tripleto de campo isoscalar, cuja simetria de calibre original $O(3)$ que representa um grupo de simetria ortogonal o qual é um grupo de transformação de preservação da distância euclidiano de dimensão 3, é quebrada para para um grupo unitário $U(1)$, grupo de Lie real. Este modelo pode ser descrito pela lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi^a \partial^\mu \psi^a - \frac{1}{4} \lambda (\psi^a \psi^a - \eta^2)^2, \quad (3.1)$$

onde ψ^a é um tripleto campo escalar e $a = 1, 2, 3$.

A solução correspondente a um monopolo global no modelo de simetria quebrada $O(3)$ foi investigada por Bariola e Vilenken [6] no contexto da relatividade geral. Vale a pena ressaltar que longe do núcleo do monopolo global, os principais efeitos são produzidos pelo ângulo sólido déficit, assim o termo de massa pode ser desprezado, e a respectiva métrica na teoria de Einstein da gravidade pode ser escrita como:

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta^2)dT^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)^{-1}dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

onde G é a constante gravitacional newtoniana e η é a escala de energia da quebra de simetria.

Para uma aproximação de campo fraco, os coeficientes da métrica devem ser calculados até a primeira ordem em $G\eta^2$ assim,

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta^2)dT^2 - (1 + 8\pi G\eta^2)dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.3)$$

Se for introduzido a seguinte transformação de coordenadas

$$t = (1 - 4\pi G\eta^2)T, \quad (3.4)$$

e

$$r = (1 + 4\pi G\eta^2)R, \quad (3.5)$$

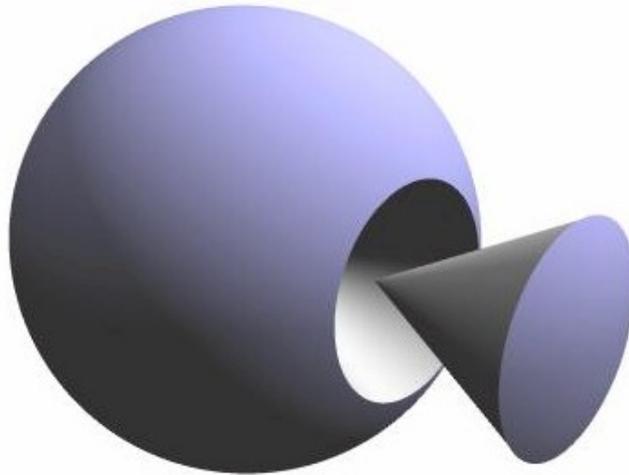
os elementos de linha da métrica da Eq.(3.3) assumem a seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.6)$$

onde $\alpha = 1 - 8\pi G\eta^2 < 1$.

Esta métrica corresponde a um espaço-tempo com um ângulo sólido déficit $\Delta = 32\pi^2 G\eta^2$: partículas testes são defletidas (espalhamento topológico) por um ângulo $\pi(\Delta/2)$ independentemente da sua velocidade e parâmetro de impacto. Esta métrica representa um espaço-tempo curvado em que a curvatura desaparece no caso $\alpha = 1$ (espaço-tempo plano). Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, a métrica (3.6) é a mesma que a de uma corda cósmica de calibre em que no caso do ângulo azimutal φ tem um déficit $\Delta = 2\pi(1-\alpha)$. Precisamente por esta razão, é esperado que o espalhamento clássico e quântico num monopolo global será uma reminiscência do espalhamento de Sommerfeld em cunhas, sendo similar também com o espalhamento sob corda cósmica [22, 67].

Figura 3.2: Representação esquemática de um monopolo global.



Portanto, o campo gravitacional de um monopolo global exibe algumas propriedades interessantes, especialmente as que dizem respeito a aparências de topologias de espaço-tempo não triviais conforme é mostrado nas Figura ??.

3.3 Solução da Equação de Helmholtz

A análise é muito similiar ao que foi desenvolvido no Capítulo 2. A métrica que define um defeito hedgehog é similar a de um monopolo global que pode ser definida pela seguinte relação:

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\Omega^2, \quad (3.7)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, isto é:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.8)$$

Deste modo, a métrica 3.7 assume a seguinte forma:

$$ds^2 = dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.9)$$

Em termos desta nova métrica em coordenadas esféricas, o operador laplaciano assume a seguinte forma:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.10)$$

Assim, a equação de Helmholtz agora pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial \varphi^2} + k^2 \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.11)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, pode-se propor uma solução do tipo:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (3.12)$$

Agora substituindo na Eq.(3.11) a solução dada pela Eq.(3.12) obtém-se:

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \alpha^2 r^2} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \alpha^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0. \quad (3.13)$$

Multiplicando a Eq.(3.13) por $\alpha^2 r^2 \text{sen}^2 \theta$, o terceiro termo envolverá apenas a dependência em φ , sendo portanto igual a uma constante, isto é, $-n^2$, assim:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n^2, \quad (3.14)$$

cuja solução é

$$\Phi(\varphi) = e^{-in\varphi}. \quad (3.15)$$

Agora substituindo a Eq.(3.14) na Eq.(3.13) e após alguns ajustes obtém-se:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{n^2}{\text{sen}^2 \theta} \right] = 0. \quad (3.16)$$

Na Eq.(3.16) o termo em destaque entre colchetes envolve apenas a variável θ assim

este deve ser igual a uma constante, $-m(m+1)$, ou seja

$$\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{n^2}{\sin^2\theta} = -m(m+1). \quad (3.17)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $x = \cos\theta$ na Eq.(3.17) obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right] + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2} \right) \Theta(x) = 0. \quad (3.18)$$

A Eq.(3.18) é a equação associada de Legendre cuja solução é:

$$\Theta(x) = P_m^n(x), \quad (3.19)$$

onde $P_m^n(x)$ são os polinômios associados de Legendre para $m = 0,1,2,\dots$ e n variando de $-m$ a m . Assim, a solução deve ser finita nestes limites, e esta é a razão pela qual foi escrita a condição na constante de separação na Eq.(3.17) como $m(m+1)$ com m inteiro.

Geralmente as funções Θ e Φ são combinadas em harmônicos esféricos $Y_m^n(\theta, \varphi)$ definido por:

$$Y_m^n(\theta, \varphi) = (-1)^n \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi} \frac{(m-n)!}{(m+n)!}} P_m^n(\cos\theta) e^{in\varphi}. \quad (3.20)$$

Focando agora na parte radial, substituindo a Eq.(3.17) na Eq.(3.16) obtém:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_m}{dr} \right) + \left(k^2 r^2 - \frac{m(m+1)}{\alpha^2} \right) R_m = 0. \quad (3.21)$$

A qual ainda pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_m}{dr} + \left[k^2 - \frac{m(m+1)}{\alpha^2 r^2} \right] R_m = 0. \quad (3.22)$$

Fazendo uma mudança de variável $R_m = r^{-1/2} G_m$ leva a seguinte equação diferencial de Bessel:

$$r^2 \frac{d^2 G_m}{dr^2} + r \frac{dG_m}{dr} + \left(k^2 r^2 - \frac{m(m+1)}{\alpha^2} - \frac{1}{4} \right) G_m = 0, \quad (3.23)$$

somando e subtraindo $1/4\alpha^2$ nos termos entre colchetes da Eq.(3.23), obtém-se

$$r^2 \frac{d^2 G_m}{dr^2} + r \frac{dG_m}{dr} + \left(k^2 r^2 - \frac{1}{\alpha^2} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{4} \right] \right) G_m = 0. \quad (3.24)$$

Quando $\alpha = 1$ tem-se a solução correspondente à função esférica de Bessel $j_m(kr)$ ou $(kr)^{-1/2} J_{m+1/2}(kr)$. Deste modo, o problema de espalhamento para $\alpha = 1$ se reduz a situações de não interação. Assim, quando $\alpha \neq 1$ esta condição impõe uma forte restrição na forma dos coeficientes a_m na solução geral. Desta forma a solução para G_m que é regular em $r = 0$ é

$$G_m = J_{\nu(m)}(kr), \quad (3.25)$$

onde $J_{\nu(m)}$ é uma função de Bessel de primeiro tipo e

$$\nu(m) = \alpha^{-1} \sqrt{\left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1 - \alpha^2}{4}}. \quad (3.26)$$

Assim, a solução para a parte radial que é regular na origem para a equação

diferencial de Bessel será,

$$R(r) = A_m \frac{J_{\nu(m)}(kr)}{\sqrt{kr}}. \quad (3.27)$$

A Eq.(3.22) também pode apresentar como solução as funções esféricas de Bessel de ordem s . Assim, utilizando o software Mathematica a solução desta equação diferencial:

$$R(r) = R_1 j_s(kr) + R_2 y_s(kr), \quad (3.28)$$

onde j_s e y_s são funções esféricas de Bessel e Neumann de ordem s e R_1 e R_2 são constantes. Alternativamente, esta solução pode ser escrita como [47]

$$R(r) = R_3 h_s^{(1)}(kr) + R_4 h_s^{(2)}(kr), \quad (3.29)$$

onde $h_s^{(1)}$ e $h_s^{(2)}$ são funções esféricas de Hankel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e R_3 e R_4 são constantes. A ordem das funções j_s , y_s , $h_s^{(1)}$ e $h_s^{(2)}$ é dada pela seguinte relação:

$$s(m) = \frac{-\alpha + \sqrt{4m^2 + 4m + \alpha^2}}{2\alpha}. \quad (3.30)$$

Portanto a solução geral para a equação de Helmholtz mediante a métrica do monopolo global será:

$$\phi(r, \theta, \phi) = \phi_0 \sum_{m,n} [a_{mn} j_s(kr) + b_{mn} y_s(kr)] Y_m^n(\theta, \varphi), \quad (3.31)$$

onde ϕ é a magnitude do potencial de velocidade e $\sum_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m$. Ater-

nativamente, podemos escrever,

$$\phi(r, \theta, \phi) = \phi_0 \sum_{m,n} [a_{mn} h_s^{(1)}(kr) + b_{mn} h_s^{(2)}(kr)] Y_m^n(\theta, \varphi), \quad (3.32)$$

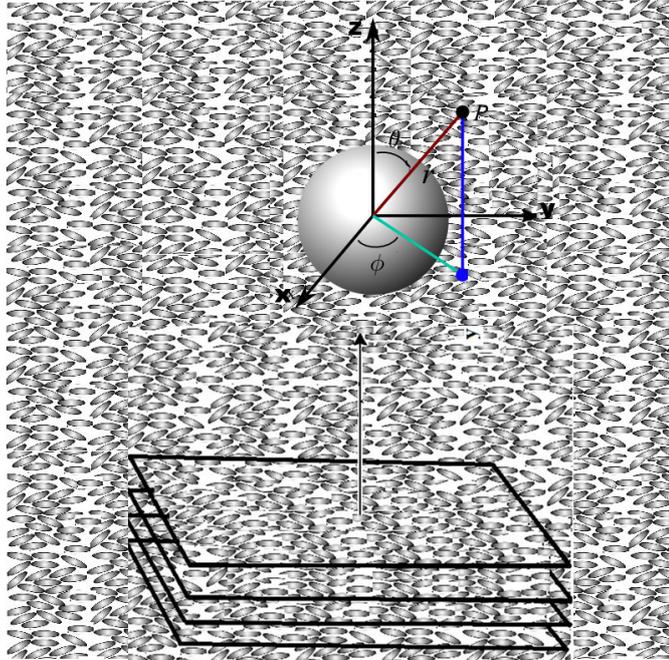
onde $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ e $c_{m,n}$ são coeficientes determinados a partir de condições de contornos e serão determinados a seção a seguir.

3.4 Espalhamento por uma esfera rígida

Considere uma esfera rígida imersa num cristal líquido na fase nemática. Na transição da fase líquida, ou isotrópica, para a fase nemática defeitos pontuais podem surgir sendo denominado de hedgehog, com o vetor direto $\hat{n} = \hat{r}$ em coordenadas esféricas. Uma fonte pontal de ondas acústicas distante produz uma onda acústica contínua de frequência $\omega/2\pi$ no cristal líquido incidindo sobre a esfera rígida e isotrópica de densidade ρ_1 . Longe dessa fonte, sobre regiões devidamente restritas, estas ondas podem ser consideradas como ondas planas. Considerando também que o centro desta esfera coincida com a origem de um sistema de coordenadas retangulares, e tomemos as ondas planas se aproximando ao longo do eixo z negativo, conforme Figura 3.5.

O problema é resolvido expressando os campos incidentes na superfície da esfera, ou seja, é necessário encontrar uma expressão em termos dos harmônicos esféricos que descreve matematicamente o campo incidente. Assim, ao incidir uma onda sobre uma partícula rígida a onda incidente é totalmente refletida sem que haja absorção pela partícula. As ondas incidente e espalhada são descritas em termos dos potenciais de velocidade $\phi_{in}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\phi_{sc}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, respectivamente. As

Figura 3.3: Representação do espalhamento de uma onda acústica plana por uma esfera rígida centrado na origem do sistema de coordenadas cartesianas incluso no cristal líquido na fase nemática.



amplitudes dos potenciais de velocidade também satisfazem a equação de onda de Helmholtz dada pela Eq.(2.15). Além disso, a pressão incidente (espalhada) e a velocidade do fluido (cristal líquido) também estão relacionadas pelas Eqs.(2.16) e (2.17).

Considerando que a origem do sistema de coordenadas está situado no centro da partícula esférica. Devido à simetria do problema descrevemos os potenciais incidente e espalhado como funções de coordenadas esféricas tal que r é a distância radial para o ponto de observação $r = (x,y,z)$, sendo θ o ângulo polar e φ o ângulo azimutal. Portanto, da solução da equação de Helmholtz, as amplitudes dos potenciais incidente e espalhado, podem ser expandidos em uma série de ondas

parciais da seguinte forma,

$$\phi_{in}(r, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} a_{mn} j_s(kr) Y_m^n(\theta, \varphi), \quad (3.33)$$

$$\phi_{sc}(r, \theta, \varphi) = \sum_{m,n} a_{mn} s_m h_s^{(1)}(kr) Y_m^n(\theta, \varphi), \quad (3.34)$$

onde $\sum_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m$, a_{mn} é o coeficiente de forma de feixe da onda incidente e s_m é o coeficiente de espalhamento escalar.

Assim, o campo de pressão incidente como dado na Eq.(2.16) por meio do potencial incidente assume a seguinte forma,

$$p_{in}(r, \theta, \varphi) = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m a_{mn} j_s(kr) Y_m^n(\theta, \varphi). \quad (3.35)$$

onde P_0 é a amplitude da pressão na onda incidente.

Como a onda se aproxima ao longo da direção de φ , não teremos dependência nesse ângulo. Portanto a Eq.(3.35) se resume a,

$$p_{in}(r, \theta) = P_0 e^{ikr \cos \theta} = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m j_s(kr) P_m(\cos \theta). \quad (3.36)$$

A relação entre a_m na Eq.(3.36) e a_{mn} na Eq.(3.35) é obtida pela multiplicação de ambos os lados da Eq.(3.35) por $e^{-in'\varphi}$, integrando sobre φ e usando a relação da pela Eq.(3.20) dos harmônicos esféricos obtém-se que:

$$a_m = a_{0m} \sqrt{\frac{(2m+1)}{4\pi}}. \quad (3.37)$$

Para resolver a_m vamos multiplicar a Eq.(3.35) por P_s , integrar sobre θ e usar a

relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, ou seja, $\int_{-1}^1 P_s(x)P_{s'}(x)dx = \frac{2}{2s+1}\delta_{s,s'}$ onde obtém-se:

$$\int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} P_s(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2a_m}{2m+1} j_s(kr). \quad (3.38)$$

Usando a seguinte mudança de variável $\eta = \cos \theta$ esta ultima equação pode ser reescrita como

$$\int_{-1}^1 e^{ikr\eta} P_s(\eta) d\eta = \frac{2a_m}{2m+1} j_s(kr). \quad (3.39)$$

Diferenciando em relação a r ambos os lados da Eq.(3.39) até a ordem s

$$\int_{-1}^1 \frac{d^s}{dr^s} e^{ikr\eta} P_s(\eta) d\eta = \frac{2a_m}{2m+1} \frac{d^s}{dr^s} j_s(kr). \quad (3.40)$$

Por outro lado, o comportamento próximo à origem do sistema de coordenadas é dado pela expressão para pequenos argumentos das funções de Bessel ($x \ll s$):

$$j_s(x) \approx \frac{x^s}{(2s+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2s+3)} + \dots \right). \quad (3.41)$$

Assim, mantendo apenas o primeiro termo desta expansão e substituindo na Eq.(3.40)

$$\int_{-1}^1 \frac{d^s}{dr^s} e^{ikr\eta} P_s(\eta) d\eta = \frac{2a_m}{2m+1} \frac{d^s}{dr^s} \left(\frac{(kr)^s}{(2s+1)!!} \right), \quad (3.42)$$

agora calculando para $r = 0$ obtém-se

$$(ik)^s \int_{-1}^1 \eta^s P_s(\eta) d\eta = \frac{2a_m}{2m+1} k^s \frac{(s!)^2}{(2s+1)!!}. \quad (3.43)$$

Usando a relação $(2s + 1)!! = \frac{(2s+1)}{2^s s!}$ na Eq.(3.43)

$$(ik)^s \int_{-1}^1 \eta^s P_s(\eta) d\eta = \frac{2a_m}{2m+1} k^s \frac{(s!2^s)^2}{(2s+1)!}. \quad (3.44)$$

Utilizando a relação integral $\int_{-1}^1 \eta^s P_s(\eta) d\eta = \frac{2^{s+1}(s!)^2}{(2s+1)!}$, obtemos que

$$a_m = i^s(2m+1). \quad (3.45)$$

Inserido este resultado na Eq.(3.36) temos uma relação importante

$$p_{in}(r, \theta) = P_0 e^{ikr \cos \theta} = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^s(2m+1) j_s(kr) P_m(\cos \theta). \quad (3.46)$$

A aproximação de campo distante ($kr \gg 1$) para a onda incidente é obtida substituindo a forma assintótica da função de Bessel [4]

$$j_s(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{s\pi}{2} \right) \quad (3.47)$$

substituindo na Eq.(3.46) obtendo:

$$p(r, \theta)_{in} \approx \frac{1}{kr} \sum_{m=0}^{\infty} i^s(2m+1) \sin \left(kr - \frac{s\pi}{2} \right). \quad (3.48)$$

Para a onda incidente, estamos preocupados em encontrar a solução de uma onda que se propague numa região que não inclui a origem do sistema de coordenadas, por esta razão, essa onda deve ser regular na origem, ou seja, finita dentro da região de propagação. Por outro lado, para a onda espalhada não consideraremos a região que inclui a origem do sistema de coordenadas. Além disso, observa

que a amplitude da onda espalhada ϕ_{sc} deve satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld no infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi_{sc} = 0. \quad (3.49)$$

Sendo que esta condição impõe que a onda espalhada não deve ser refletida no infinito.

Agora devemos expandir o campo espalhado em termos dos harmônicos esféricos. Uma vez que o campo espalhado representa ondas esféricas que emanam da superfície da esfera, devido a dispersão da onda incidente, o campo espalhado é dado por funções esféricas de Hankel

$$p_{sc}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s_m h_s^{(1)}(kr) P_m(\cos \theta). \quad (3.50)$$

Para uma esfera rígida a velocidade radial desaparece na superfície da esfera em $r = a$. Esta é a velocidade radial total (incluindo incidente e espalhada). A condição de contorno é, então,

$$v_{in}(a, \theta) + v_{sc}(a, \theta) = 0. \quad (3.51)$$

Pela equação de Euler Eq.(3.51) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial r} (p_{in}(r, \theta) + p_{sc}(r, \theta)) |_{r=a} = 0. \quad (3.52)$$

Substituindo as Eqs.(3.46) e (3.50) na Eq.(3.52) encontramos o coeficiente escalar do espalhamento s_m

$$s_m = -P_0 \frac{j'_s(ka)}{h_s^{(1)'}(ka)} \quad (3.53)$$

Deste modo

$$p_{sc}(r, \theta) = -P_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^s \frac{j'_s(ka)}{h_s^{(1)'}(ka)} h_s^{(1)}(kr) P_m(\cos \theta). \quad (3.54)$$

O campo total de pressão é então,

$$p_t = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^s \left(j_s(kr) - \frac{j'_s(ka)}{h_s^{(1)'}(ka)} h_s^{(1)}(kr) \right) P_m(\cos \theta). \quad (3.55)$$

A onda espalhada no campo distante ($kr \gg 1$), pode ser obtida utilizando a relação assintótica [4].

$$h_s^{(1)} \approx i^{-s-1} \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (3.56)$$

na Eq.(3.54) obtendo,

$$p_{sc}(r, \theta) \approx iP_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{j'_s(ka)}{h_s^{(1)'}(ka)} P_m(\cos \theta). \quad (3.57)$$

Retornando à solução geral, Eq.(3.54), definimos o campo de pressão normalizada $p_{sc}(\theta)$ por,

$$p_{sc}(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} p_{sc}(r, \theta) \frac{r}{P_0 a} e^{-ikr}, \quad (3.58)$$

com $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{sc}(r, \theta)$ dado pela Eq.(3.57), obtendo

$$p_{sc}(\theta) = i \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{j'_s(ka)}{(ka) h_s^{(1)'}(ka)} P_m(\cos \theta). \quad (3.59)$$

Este resultado será utilizado na seção de resultados e discussões na obtenção dos padrões de espalhamento acústico

3.5 Seção de choque de espalhamento

A solução geral do espalhamento para a onda de pressão no "hadgehog" é dada por

$$p_t = p_{in} + p_{sc}, \quad (3.60)$$

onde $p_{in} = e^{ikr\cos\theta}$, e $p_{sc} = r^{-1}f(\theta)e^{ikr}$, quando $r \rightarrow \infty$. Também exigimos que $p_{sc} = 0$ quando $\alpha = 1$. Esta condição excepcionalmente destaca a amplitude total do espalhamento. A dependência total de α na mudança de fase de espalhamento $\delta_m(\alpha)$ e na amplitude de espalhamento é devido a dependência da função radial G_m em α (na ordem da função de Bessel $\nu(\alpha)$). Os argumentos levantados acima leva a seguinte amplitude de espalhamento $f(\theta)$,

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_m^{\infty} (2m+1)(e^{2i\delta_m} - 1)P_m(\cos\theta), \quad (3.61)$$

onde a diferença de fase δ_m depende do "parâmetro de defeito angular" α da seguinte forma

$$\delta_m(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} - \nu(m) \right) = \frac{\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 - \frac{1-\alpha^2}{4}}}{\alpha} \right). \quad (3.62)$$

A expressão padrão para a seção de choque diferencial de espalhamento em termos de $f(\theta)$ é:

$$\frac{d\sigma}{\sin\theta d\theta d\varphi} = |f(\theta)|^2. \quad (3.63)$$

Entretanto, é de interesse o comportamento para ângulos pequenos da seção de choque de espalhamento bem como da amplitude de espalhamento $f(\theta)$. Iste é, porque é conhecida apenas a forma assintótica da métrica do monopolo global. A

partir do comportamento de ângulos pequenos de $f(\theta)$ é possível inferir a seção de choque de espalhamento total σ como uma função do parâmetro de defeito α por meio do teorema óptico

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0). \quad (3.64)$$

Assim, para ângulos pequenos $\theta = O(\Delta)$, onde Δ é o ângulo de defeito que é muito menor que 1, tem-se uma sistemática expansão assintótica para $f(\theta)$. De fato, $f(\theta)$ neste regime de ângulos α pode ser facilmente calculado. Portanto, para calcular a amplitude de espalhamento $f(\theta)$ é interessante primeiramente fazer uma mudança para as variáveis $m \rightarrow z = m + \frac{1}{2}$. A razão para tal mudança de variável reside no fato que para grandes valores de z a diferença de fase $\delta(z)$ tem uma expansão simples, ou seja,

$$\delta(z) = \frac{\pi}{2} \left(z - \alpha^{-1} \sqrt{z^2 - a} \right) = \frac{\pi}{2} z (1 - \alpha^{-1}) + O(z^{-1}), \quad (3.65)$$

onde $a = \frac{1-\alpha^2}{4}$. Neste caso, a^2 é muito pequeno e pode servir como conveniente parâmetro de expansão. Em geral, pode ser escrito que $\delta(z) = \delta^{(0)}(z) + \delta^{(1)}(z) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(z)$, onde $\delta^{(0)}(z) = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha^{-1})$ e $\delta^{(n)}(z) = O(z^{-2n+1})$. O expoente da diferença de fase é sutil para a expansão de potência

$$e^{2i\delta(z)} = e^{2i\delta^{(0)}(z)} \times \exp \left(2i \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(z) \right). \quad (3.66)$$

O segundo termo na equação (3.66) pode ser expandido sistematicamente na potência de a^2 . Assim, os termos mais significativos para a expansão da mudança de fase será:

$$\delta(z) = \frac{\pi}{2} \left((1 - \alpha^{-1})z + \frac{1}{2} a^2 \alpha^{-1} z^{-1} + O(z^{-3}) \right). \quad (3.67)$$

Contudo, a amplitude de espalhamento pode ser expressada em termos da função $h(\theta, \beta)$ definida como

$$h(\theta, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{\pi i \beta z(m)} P_m(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \pi \beta - \cos \theta)}}, \quad (3.68)$$

onde foi usado a função geradora para os polinômios de Legendre,

$$(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(\cos \theta). \quad (3.69)$$

A contribuição dominante para a amplitude de espalhamento $f^{(0)}(\theta)$ é proporcional a derivada de $h(\theta, \beta)$ com relação a β , onde $\beta = 1 - \alpha^{-1}$

$$f^{(0)}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2k}} \sin \pi \beta (\cos \pi \beta - \cos \theta)^{-3/2}. \quad (3.70)$$

Por meio do teorema óptico (3.64) obtém-se a contribuição significativa $\sigma^{(0)}$ para a seção de choque total de espalhamento $\sigma_{tot} = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots$,

$$\sigma^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\cos \frac{\pi \beta}{2}}{\sin^2 \frac{\pi \beta}{2}}. \quad (3.71)$$

Para a contribuição na amplitude de espalhamento $f^{(1)}(\theta)$ que resulta da equação (3.66) até a ordem de $O(a^2)$

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{\pi a^2}{2\alpha k} h(\theta, \beta). \quad (3.72)$$

As correções de alta ordem são dadas em termos da integral $h(\theta, \beta)$ em relação a β sendo não singular em $\theta = \theta_0 = \pi \beta$. Isso significa que sua contribuição para

a seção de choque total de espalhamento será desprezível termo por termo para pequenos parâmetros de defeito β . Da equação (3.66) obtém-se que a contribuição da seção de choque é negativa e igual a

$$\sigma^{(1)} = -\frac{\pi a^2}{bk^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi\beta}{2}}. \quad (3.73)$$

A contribuição dos termos de alta ordem em a^2 para σ_{tot} são em princípio calculáveis mas são muito pequenos para propósitos práticos. Observe que a amplitude $f(\theta)$ tem um comportamento singular universal para os ângulos θ próximo de $\theta_0 = \pi\beta$. Esta é a assinatura física básica de um monopolo global para o caso de espalhamento gravitacional. A amplitude é muito grande nas regiões semelhantes a anéis com tamanho angular da ordem de θ_0 . Em princípio, medindo o tamanho de θ_0 desta região pode se determinar o parâmetro α na métrica assintótica do monopolo global, e, portanto a massa do monopolo [48].

Figura 3.4: Seção de choque de espalhamento diferencial para $k = 1$ $\alpha < 1$ truncado em $m = 600$.

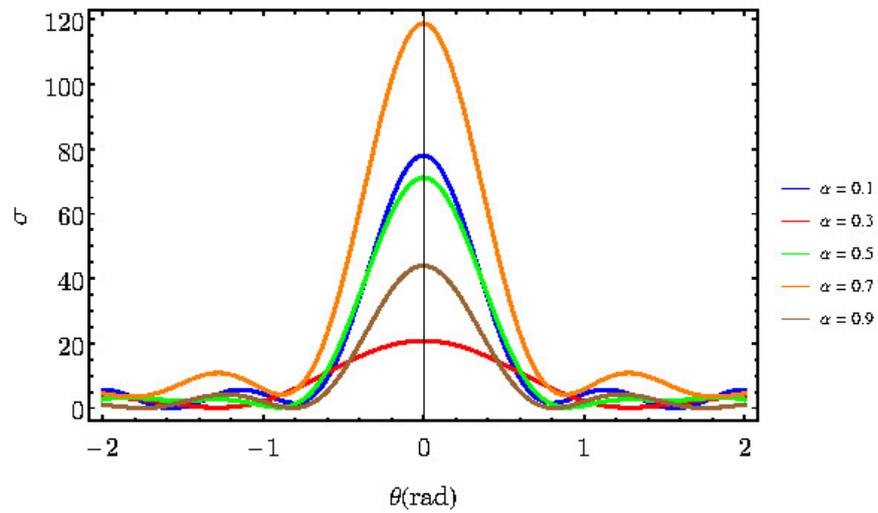
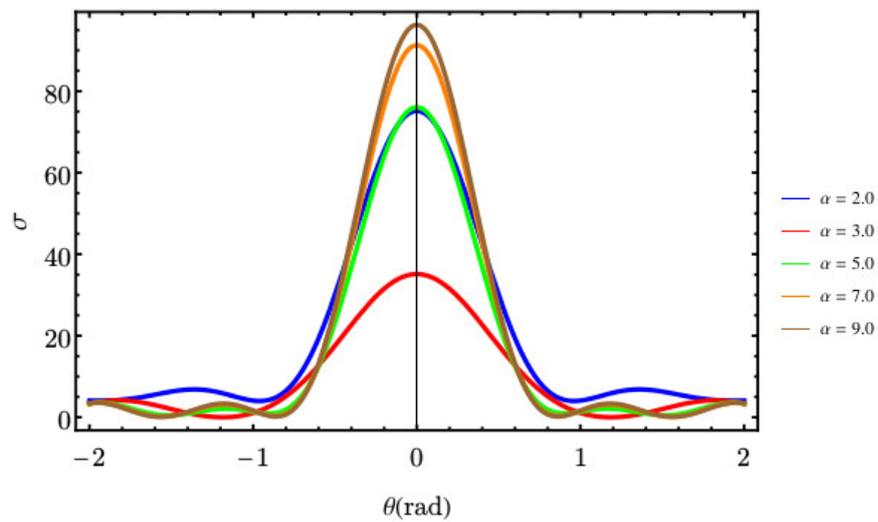


Figura 3.5: Seção de choque de espalhamento diferencial para $k = 1$ $\alpha > 1$ truncado em $m = 600$.



3.6 Espalhamento de Rayleigh

Na literatura o espalhamento de uma onda por uma pequena partícula cujo raio seja muito menor que o comprimento da onda incidente é conhecido como espalhamento de Rayleigh. Entretanto, para a análise de espalhamento de Rayleigh, é comum definir um parâmetro em termos do tamanho da partícula, $\epsilon = ka \ll 1$. Usualmente a expansão, a expansão de ondas parciais da onda espalhada conforme a Eq.(3.34) é reduzida para termos que envolvem apenas os coeficientes de espalhamento de monopolo s_0 e dipolo s_1 [66].

Para a análise de torque e força de radiação acústica sobre partículas no limite de espalhamento de Rayleigh é preciso expandir os coeficientes de espalhamento s_0 e s_1 na Eq.(3.53) em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ com auxílio do software Mathematica [80]. Para os coeficientes de monopolo substituindo $m = 0$ na Eq.(3.30) temos que $s(0)=0$ portanto expandindo em Taylor obtemos o coeficiente de monopolo s_0 :

$$s_0 = -i\frac{(ka)^3}{3} + i\frac{(ka)^5}{5} - \frac{(ka)^6}{9} + O[(ka)^8 + i(ka)^7], \quad (3.74)$$

onde $O[(ka)^8 + i(ka)^7]$ são os termos de alta ordem da expansão.

Para os termos de dipolo da Eq.(3.30) temos que $s(1) = \frac{-\alpha + \sqrt{8 + \alpha^2}}{2\alpha}$. Considerando $\alpha = 1$, ou seja, um meio sem defeito obtemos da expansão de Taylor o coeficiente de dipolo s_1 :

$$s_1 = i\frac{(ka)^3}{6} - i\frac{(ka)^5}{20} - \frac{(ka)^6}{36} + O[(ka)^8 + i(ka)^7]. \quad (3.75)$$

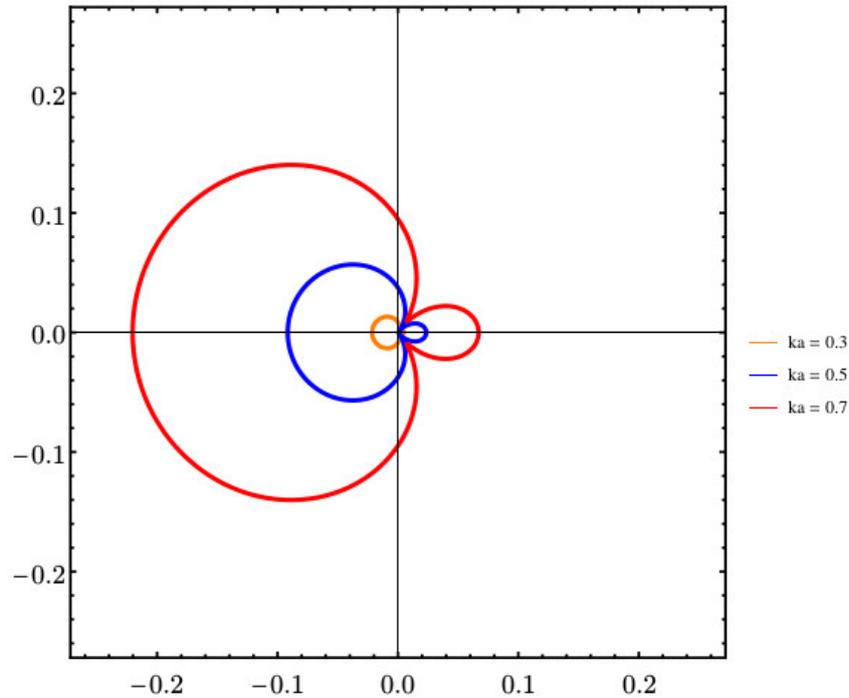
Em Acústica, os coeficientes de monopolo s_0 e de dipolo s_1 são grandezas úteis

para o cálculo da força de radiação bem como o torque acústico. Os coeficientes de monopolo serão sempre os mesmos como na Eq.(3.74) independente do parâmetro α , porém os coeficientes de dipolo para $\alpha \neq 1$ se tornam complexos e extensos e foram omitidos.

3.7 Resultados e discussões

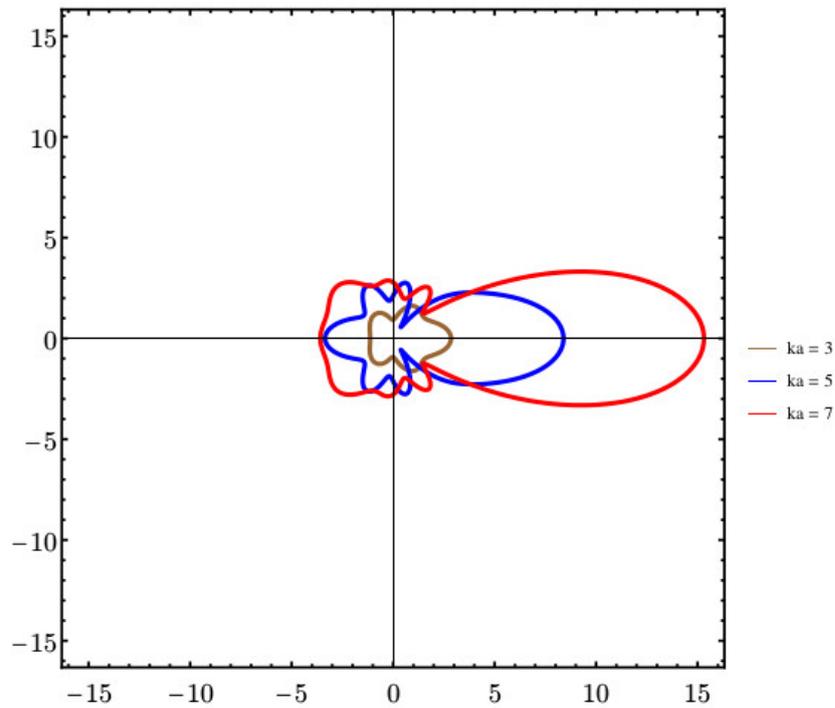
Para obter o padrão de espalhamento, ou distribuição angular da pressão da onda espalhada à longa distância da esfera inclusa no cristal líquido, é preciso verificar o que acontece com a onda plana a grandes distâncias do dispersor, isto é, da esfera rígida. Assim sendo, os padrões de espalhamento que serão apresentados à seguir foram construídos utilizando expressão obtida para campo distante da pressão espalhada normalizada dada Eq.(3.59) considerando que a onda plana se aproxima da esquerda para a direita.

Figura 3.6: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para uma esfera rígida cujo parâmetro de defeito do é $\alpha = 1$ considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



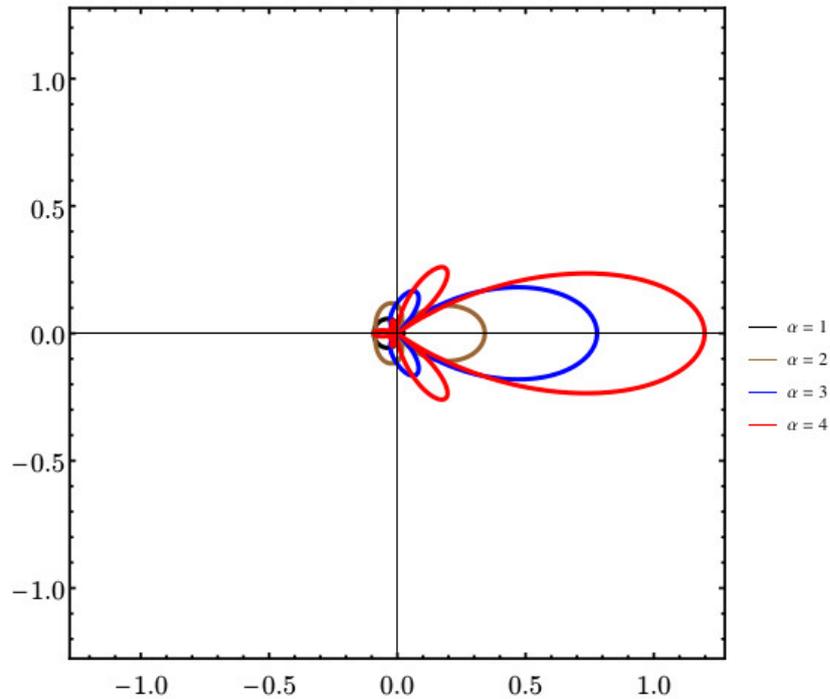
A Figura 3.6 mostra que para pequenos valores de ka , ou seja, baixas frequências a onda retroespalhada ela é dominante sobre a onda espalhada considerando que o meio no qual a esfera está inclusa não apresente defeito, isto é, $\alpha = 1$.

Figura 3.7: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para uma esfera rígida cujo parâmetro de defeito do é $\alpha = 1$ considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



A Figura 3.7 mostra que para grandes valores de ka , ou seja altas frequências a onda espalhada ela é dominante sobre a onda retroespalhada considerando que o meio no qual a esfera está inclusa não apresenta defeito, isto é, $\alpha = 1$.

Figura 3.8: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para uma esfera rígida onde $ka = 0.5$ considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.

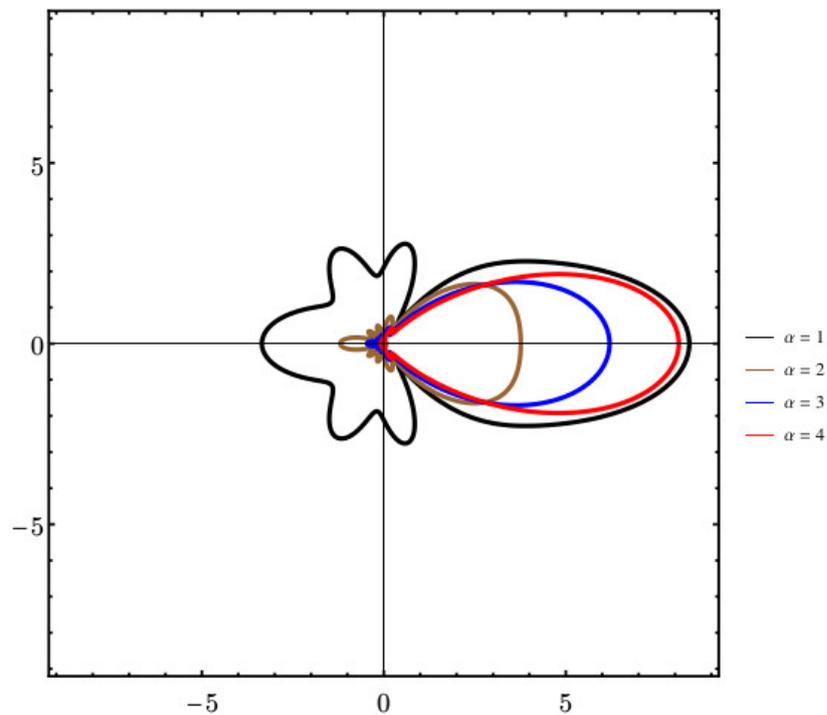


Na Figura 3.8 mostra o padrão de espalhamento no regime de baixas frequências considerando $ka = 0.5$ e variando o parâmetro α para valores maiores que 1. Observa-se que o aumento de α induz o aumento dos picos de espalhamentos para a onda espalhada tornando-a dominante sobre a onda retroespalhada. Comparando com a Figura 3.6 observamos que o aumento do parâmetro α produz o comportamento oposto em relação ao pico da onda espalhada.

A Figura 3.9 mostra o padrão de espalhamento para o regime de altas frequências considerando $ka = 5.0$ e variando o parâmetro α para valores maiores que 1. Nesta vemos claramente que o aumento de α também induz no aumento dos picos

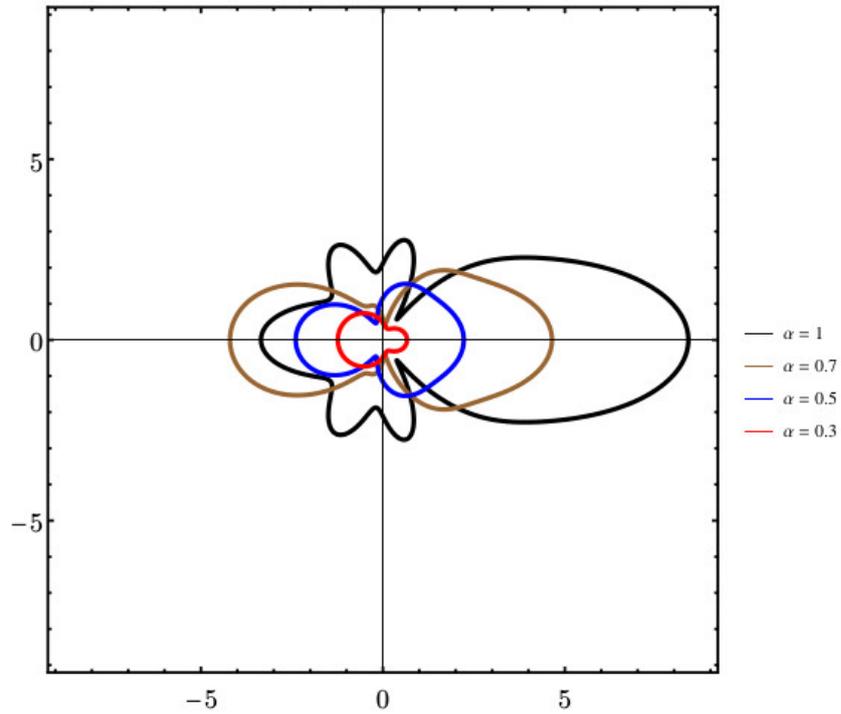
para as ondas espalhadas.

Figura 3.9: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para uma esfera rígida onde $ka = 5.0$ considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



A Figura 3.10 mostra o padrão de espalhamento também para o regime de altas frequências considerando $ka = 5.0$ e variando o parâmetro α para valores menores que 1. Observa-se que conforme diminui o valor do parâmetro α isso acaba de certa forma induzindo no aumento dos picos para as ondas retroespalhadas.

Figura 3.10: Magnitude da normalização do campo distante da pressão espalhada para uma esfera rígida onde $ka = 5.0$ considerando que a onda é incidente da esquerda para a direita.



4. Considerações Finais e Perspectivas

Motivados pelo crescente interesse em pesquisas científicas sobre espalhamento acústico por espalhadores sólidos inclusos em fluidos, sabemos que muitas das propriedades mecânicas de certos materiais são determinadas por ensaios destrutivos, ou seja, basta sujeitá-lo a uma força de tração até atingir a sua ruptura. Por outro lado, os ultrassons permitem o mesmo tipo de teste, que basicamente usa o mesmo tipo de força, porém com intensidades muito inferiores evitando desta forma a destruição do material. Estas ondas podem ser usadas na caracterização de materiais para a obtenção de grandezas como módulo de elasticidade, tamanho de grão, porosidade ou propriedades mecânicas. Assim sendo, nesta tese investigamos o espalhamento de ondas acústica em meios que apresentam defeitos como desclinação que é uma classe dos defeitos de linha e o monopolo global que é uma classe de defeito pontal. Na física da matéria condensada, os defeitos estão presentes como linha de vórtices em hélio líquido, tubos de fluxo magnético em supercondutores do tipo II, linhas de desclinação em cristais líquidos e também em sistemas cosmológicos como monopolos, bariogênese, paredes de domínio e cordas cósmicas.

Entretanto, as desclinações são mais observadas em cristais líquidos na fase nemática. Em razão da semelhança na natureza das leis de escala que caracterizam estes sistemas, os cristais líquidos fornecem uma plataforma de fácil acesso para pesquisas. Desta forma, neste trabalho investigamos o espalhamento de ondas acústicas planas por um cilindro rígido de material isotrópico incluso num cristal

líquido na fase nemática apresentando um defeito de linha conhecido na literatura como desclinação. A solução do problema consiste em expressar os campos incidente e espalhado na superfície do cilindro, para isso resolvemos a equação de Helmholtz utilizando a métrica que descreve um meio com desclinação por meio do operador de Laplace-Beltrami. Para grandes distâncias do cilindro, regiões de campo distante, os padrões de espalhamento, também conhecido como distribuição angular da onda espalhada para baixas frequências mostram que para meios que não apresentam desclinação a onda retroespalhada é dominante sobre a onda espalhada e para altas frequências a onda espelhada é dominante sobre a onda retroespalhada. Entretanto, para valores do parâmetro de defeito menores que 1.0 e mantendo a frequência fixa foi observado que para baixas frequências a onda retroespalhada continua dominante porém, conforme o parâmetro α se aproxima de 1.0 a onda retroespalhada aumenta sua amplitude tornando-a dominante. Por outro lado, para essa mesma frequência os valores do parâmetro de defeito maiores que 1.0 produz o efeito contrário, ou seja, a onda espalhada passa a ser dominante sobre a onda retroespalhada. Para altas frequências observa-se que o efeito mais marcante é atingido para valores de α maiores que 1.0 onde para grandes valores do parâmetro de defeito a onda retroespalhada se torna praticamente nula.

Em coordenadas esféricas, computamos o espalhamento acústico por uma esfera rígida de material isotrópico inclusa num cristal líquido na fase nemática com defeito conhecido como "hedgehog" cuja métrica é similar a de um monopolo global, o qual é resultante da quebra de simetria global sendo este uma classe de defeito pontual. Para este sistema, a solução seguiu os mesmos procedimentos adotados na espalhamento com desclinação. Assim, os padrões de espalhamento revelaram também que para baixas frequências o aumento do parâmetro α , para

valores maiores que 1.0, a onda espalhada também se torna dominante sobre a onda retroespalhada conforme apresentado por Faran [25]. Por outro lado, para altas frequências o aumento de α diminui a amplitude da onda retroespalhada, tornando-a praticamente nula como nos casos de $\alpha > 4.0$.

Portanto, estas simetrias investigadas os valores de $\alpha > 1.0$, que caracteriza a inserção de material no meio tanto para desclinação quanto o hadgehog tem uma grande influência no padrão de espalhamento, ou seja, para estes valores ele é praticamente independente da frequência adotada, ou seja, o parâmetro de defeitose desempenha o papel similiar da frequência.

Como perspectivas, pretendemos dar continuidade a estes resultados e estender para obtermos a força de radiação acústica para meios com desclinação bem como para meio com monopolo global e também calcular o torque de raição acústica para estes nestes defeitos topológicos. Além dessas, pretendemos também investigar invisibilidade acústica, ou seja, metamaterial acústico, em defeitos topológicos e por fim investigar o espalhamento acústico relacionado a outras métricas.

Referências

- [1] *Continuum theory of defects*. Session XXXV, 1980.
- [2] David J Acheson. *Elementary fluid dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [3] Gareth P Alexander, Bryan Gin-ge Chen, Elisabetta A Matsumoto, and Randall D Kamien. Colloquium: Disclination loops, point defects, and all that in nematic liquid crystals. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):497, 2012.
- [4] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists international student edition*. Academic press, 2005.
- [5] Carlos Barceló, Stefano Liberati, Matt Visser, et al. Analogue gravity. *Living Rev. Rel*, 8(12):214, 2005.
- [6] Manuel Barriola and Alexander Vilenkin. Gravitational field of a global monopole. *Physical Review Letters*, 63(4):341, 1989.
- [7] George Keith Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
- [8] Romesh C Batra. *Elements of continuum mechanics*. Aiaa, 2006.

-
- [9] Y Bouligand. Recherches sur les textures des états mésomorphes. 5. noyaux, fils et rubans de moebius dans les nématiques et les cholestériques peu torsadés. *Journal de Physique*, 35(3):215–236, 1974.
- [10] Yves Bouligand. Geometry and topology of cell membranes. *Geometry in condensed matter physics*, World Scientific, Singapore, pages 193–229, 1990.
- [11] Mark J Bowick, L Chandar, Eric A Schiff, and Ajit M Srivastava. The cosmological kibble mechanism in the laboratory: String formation in liquid crystals. *arXiv preprint hep-ph/9208233*, 1992.
- [12] Robert H Brandenberger. Topological defects and cosmology. *Pramana*, 51(1-2):191–204, 1998.
- [13] Alan J Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Advances in Physics*, 51(2):481–587, 2002.
- [14] Paul M Chaikin and Tom C Lubensky. *Principles of condensed matter physics*, volume 1. Cambridge Univ Press, 2000.
- [15] Paul M Chaikin and Tom C Lubensky. *Principles of condensed matter physics*, volume 1. Cambridge Univ Press, 2000.
- [16] S Chandrasekhar and GS Ranganath. The structure and energetics of defects in liquid crystals. *Advances in Physics*, 35(6):507–596, 1986.
- [17] Isaac Chuang, Neil Turok, and Bernard Yurke. Late-time coarsening dynamics in a nematic liquid crystal. *Physical review letters*, 66(19):2472, 1991.

-
- [18] Isaac Chuang, Bernard Yurke, Ruth Durrer, and Neil Turok. Cosmology in the laboratory- defect dynamics in liquid crystals. *Science*, 251(4999):1336–1342, 1991.
- [19] JM Conoir, P Rembert, O Lenoir, and JL Izbicki. Relation between surface helical waves and elastic cylinder resonances. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(3):1300–1307, 1993.
- [20] Sankar Das Sarma and Aron Pinczuk. Perspectives in quantum hall effects: Novel quantum liquids in low-dimensional semiconductor structures. *Perspectives in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*, by Sankar Das Sarma (Editor), Aron Pinczuk (Editor), pp. 446. ISBN 0-471-11216-X. Wiley-VCH, November 1996., page 446, 1996.
- [21] PG De Gennes and J Prost. The physics of liquid crystals, 2nd edn. clarendon. *Oxford Dombrowski C, Cisneros L, Chatkaew L et al (2004) Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. Phys Rev Lett*, 93(098103):187–192, 1993.
- [22] Ph de Sousa Gerbert and R Jackiw. Classical and quantum scattering on a spinning cone. *Communications in Mathematical Physics*, 124(2):229–260, 1989.
- [23] Stanley Deser and Roman Jackiw. Classical and quantum scattering on a cone. *Communications in Mathematical Physics*, 118(3):495–509, 1988.

-
- [24] John H Erdmann, Slobodan Žumer, and J William Doane. Configuration transition in a nematic liquid crystal confined to a small spherical cavity. *Physical review letters*, 64(16):1907, 1990.
- [25] James J Faran Jr. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the acoustical society of America*, 23(4):405–418, 1951.
- [26] Lawrence Flax, VK Varadan, and VV Varadan. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(6):1832–1835, 1980.
- [27] Frederick C Frank. I. liquid crystals. on the theory of liquid crystals. *Discussions of the Faraday Society*, 25:19–28, 1958.
- [28] Georges Friedel. The mesomorphic states of matter. In *Annales de Physique*, volume 18, page 5, 1922.
- [29] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [30] MF Grandjean. Comptes rendus acad. *Sci*, 172:71, 1921.
- [31] Jugal K Gupta, Sri Sivakumar, Frank Caruso, and Nicholas L Abbott. Size-dependent ordering of liquid crystals observed in polymeric capsules with micrometer and smaller diameters. *Angewandte Chemie International Edition*, 48(9):1652–1655, 2009.
- [32] William F Harris. Disclinations. *Scientific American*, 237:130–145, 1977.

-
- [33] M Horz and P Haupt. On the principle of fermat in elastodynamics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 7(2):219–230, 1995.
- [34] Olga Kapustina. Advances in acoustics of liquid crystals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5):3279–3279, 2008.
- [35] M. O. Katanaev and I. V. Volovich. New constraints in dynamical torsion theory. *Ann. Phys.*, 216(177), 1992.
- [36] Chor-San Heng Khoo. *Physics of liquid crystalline materials*. CRC Press, 1991.
- [37] T. W. B. Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *J. Phys. A.*, 9(1387), 1976.
- [38] Thomas WB Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387, 1976.
- [39] Hagen Kleinert. *Gauge Fields in Condensed matter*. World Scientific, New York, 2 edition, 1989.
- [40] M Kleman. *Od lavrentovich soft matter physics: An introduction*, 2003.
- [41] Maurice Kléman. Points, lines and walls in liquid crystals, magnetic systems and various ordered media. *John Wiley and Sons*, xxx+ 322, 23 x 15 cm, illustrated, 1982.
- [42] O Lehmann. Cristaux liquides. réponse de mo lehmann à mm. g. friedel et f. grandjean. *Bull Soc Fr Minéral*, 33:300, 1910.

-
- [43] Otto Lehmann. Zur geschichte der flüssigen kristalle. *Annalen der Physik*, 330(5):852–860, 1908.
- [44] Otto Lehmann. *Les cristaux liquides*. bureau du "Journal de physique, 1909.
- [45] Fang Hua Lin and Chun Liu. Static and dynamic theories of liquid crystals. *J. Partial Differential Equations*, 14(4):289–330, 2001.
- [46] Teresa Lopez-Leon and Alberto Fernandez-Nieves. Drops and shells of liquid crystal. *Colloid and Polymer Science*, 289(4):345–359, 2011.
- [47] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publication, New York, 4 edition, 1944.
- [48] Pawel O Mazur and Joannis Papavassiliou. Gravitational scattering on a global monopole. *Physical Review D*, 44(4):1317, 1991.
- [49] N David Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*, 51(3):591, 1979.
- [50] Bao Mi and I Charles Ume. Three-dimensional ray tracing of laser ultrasound for weld penetration sensing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4):1565–1571, 2004.
- [51] Daniel S Miller, Xiaoguang Wang, and Nicholas L Abbott. Design of functional materials based on liquid crystalline droplets. *Chemistry of Materials*, 26(1):496–506, 2013.
- [52] VP Mineev. Topologically stable defects and solitons in ordered media, soviet science reviews, section a: Physics reviews, vol. 2, edited by im khalatnikov, 1980.

-
- [53] Kazuhiko Miyata. Liquid crystal display device having sound. *Acoustical Society of America Journal*, 128:509, 2010.
- [54] Fernando Moraes et al. Two-dimensional scattering by disclinations in monolayer graphite. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 12(33):7421, 2000.
- [55] P. M. Morse. *Vibrations and sound*. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1948.
- [56] A Nagl, H Überall, PP Delsanto, JD Alemar, and E Rosario. Refraction effects in the generation of helical surface waves on a cylindrical obstacle. *Wave Motion*, 5(3):235–247, 1983.
- [57] David R Nelson. *Defects and geometry in condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2002.
- [58] E Pereira, Sébastien Fumeron, and F Moraes. Metric approach for sound propagation in nematic liquid crystals. *Physical Review E*, 87(2):022506, 2013.
- [59] Allan D Pierce et al. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*, volume 20. McGraw-Hill New York, 1981.
- [60] J Prost. *The physics of liquid crystals*. Number 83. Oxford university press, 1995.
- [61] J Prost. *The physics of liquid crystals*. Number 83. Oxford university press, 1995.
- [62] GS Ranganath. Twist disclinations in elastically anisotropic nematic liquid crystals. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 87(3-4):187–195, 1982.
- [63] Lord Rayleigh. *The theory of sound*. Dover Publication, 1 edition, 1945.

-
- [64] William Thornton Read. *Dislocations in crystals*. McGraw-Hill, 1953.
- [65] Anupam Sengupta. *Topological microfluidics: nematic liquid crystals and nematic colloids in microfluidic environment*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [66] Glauber T Silva. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(5):2405–2413, 2014.
- [67] Arnold Sommerfeld. Optics lectures on theoretical physics, vol. iv. *Optics Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV by Arnold Sommerfeld New York, NY: Academic Press INC, 1954*, 1, 1954.
- [68] Michael J Stephen and Joseph P Straley. Physics of liquid crystals. *Reviews of Modern Physics*, 46(4):617, 1974.
- [69] H-R Trebin. The topology of non-uniform media in condensed matter physics. *Advances in Physics*, 31(3):195–254, 1982.
- [70] Herbert ÜBERALL. 02-diffusion accoustique par des cylindres et des sphères élastiques: ondes de surface (transformation de watson) et ondes transmises. 1985.
- [71] Tanmay Vachaspati. Topological defects in the cosmos and lab. *Contemporary Physics*, 39(4):225–237, 1998.
- [72] Naum Davidovich Veksler. *Resonance acoustic spectroscopy*. Springer-verlag, 1993.

-
- [73] Alexander Vilenkin. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Physical Review D*, 23(4):852, 1981.
- [74] Alexander Vilenkin and E Paul S Shellard. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 2000.
- [75] Epifanio G Virga. Variational theory for nematoacoustics. *Physical Review E*, 80(3):031705, 2009.
- [76] AL Virovlyansky. Ray travel times at long ranges in acoustic waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(5):2523–2532, 2003.
- [77] GE Volovik. Simulation of quantum field theory and gravity in superfluid he-3. *arXiv preprint cond-mat/9706172*, 1997.
- [78] Grigory E Volovik. *The universe in a helium droplet*, volume 117. Oxford University Press on Demand, 2003.
- [79] YQ Wang and RA Kline. Ray tracing in isotropic and anisotropic materials: Application to tomographic image reconstruction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(5):2525–2532, 1994.
- [80] Stephen Wolfram. *Mathematica*. wolfram research. Inc, Champaign, USA, 2003.