

TESE DE DOUTORADO

Amplificação de ruído em um meio Kerr com resposta não-linear  
não-instantânea em pulsos parcialmente coerentes

GENTIL LUIZ DA SILVA II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

Amplificação de ruído em um meio Kerr com resposta não-linear  
não-instantânea em pulsos parcialmente coerentes

GENTIL LUIZ DA SILVA II

Tese de doutorado  
apresentada no Instituto de  
Física da Universidade Federal de  
Alagoas como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de  
Doutor em Física.

Orientadora: Dra. Solange Bessa Cavalcanti

Maceió - Alagoas - Brasil

Outubro - 2014

## DEDICATÓRIA

Dedico esta tese em especial à minha família: A minha mãe Verônica Cristina, a meu pai Gentil Luiz, a meu irmão Juliano Bueno, a minha namorada Nasley Bernardes e a todos os estudantes, (principalmente os de graduação), que em algum momento da trajetória na Física pensaram em desistir ou se perguntaram se todo o esforço gasto estava valendo a pena.

---

## AGRADECIMENTOS

Esse trabalho de doutorado carrega consigo uma bagagem de histórias muito significativas para mim. Em geral, pode-se fazer vários outros doutorados, outros mestrados, mas, o primeiro na minha concepção é o mais importante. Gostaria de não citar nomes, para não cometer nenhuma injustiça com algum nome que deveria estar citado aqui, mas vou correr esse risco, começando os agradecimentos aos meus familiares.

Como exemplo estudantil, cito minha mãe, Verônica, ou Tia Cristina, como alguns a chamam. O exemplo dessa história sempre serviu de inspiração na arte de aprender. Após parar os estudos na antiga sexta série ginásial, depois de anos resolveu voltar a fazer o que tanto gosta de fazer: estudar. Após muito sacrifício, concluiu seus estudos de primeiro grau, segundo grau, e por fim, foi aprovada no exame de seleção para a Universidade Estadual de Ciências de Saúde de Alagoas (UNCISAL). Com o passar de muitos anos de esforço, conciliando trabalho e universidade, conseguiu se formar e atualmente cursa a Especialização de Gestão em Saúde e Gestão Hospitalar. Com certeza, não vai parar por aí, e indiscutivelmente, é um exemplo para mim como não se pode desistir no meio das adversidades, tanto externas, quanto internas.

Como exemplo de trabalho, cito meu pai do qual herdei meu nome, Gentil Luiz. Este é um batalhador nato, tanto que nasceu no dia do trabalho (risos). Sempre foi muito trabalhador, e com ele aprendi que nada vem de graça sem esforço algum. Sempre me serviu de exemplo de que quando queremos algo e lutamos para isso sem nunca desistir, principalmente quando todos nos dizem que não conseguiremos, até os ventos sopram a nosso favor e no fim seremos recompensados, por nossa insistência e persistência.

Como exemplo de vida, cito meu irmão Juliano Bueno. Me sinto muito honrado, feliz e orgulhoso de ter um irmão como ele. Um exemplo de como viver a vida, e do que devemos dar valor de verdade. Aprendi que valores como amizade e irmandade devem ser respeitados acima de tudo. Tenho como exemplo que os problemas mais difíceis da vida e da física, por incrível que pareça,

são solucionados sozinhos, em meio a um “camarãozinho” e outro na areia do mar. Aprendi que é possível conquistar o mundo todo, basta planejamento para isso. E que planejamento! Aprendi que não há “firiculite” cara o suficiente que após o dia 16 não se possa ter. E que cada memória, cada sensação, cada momento devem ser vividos como se fossem o último, pois, um dia será. E se não for, o momento foi o melhor possível. É um parceiro para vida toda, que não negocio de maneira alguma.

Como exemplo de sinceridade, cito minha namorada Naslley Bernardes. Durante este fim de doutorado senti muitas dificuldades, principalmente devido a distância que tivemos que ficar, mas, conseguiu encarar essa, e permaneceu comigo até o fim. Em vários momentos que precisei de um ombro amigo, ou de discutir sobre minhas idéias e planos futuros, e inevitavelmente, nas vezes que pensei em desistir. Não deixou de me dar apoio e carinho quando precisei. Que sua compreensão apenas aumente. Obrigado por tudo!

Como exemplo de amigo e irmão, cito meu outro irmão Enio Costa, que dividiu várias conversas e opiniões comigo desde antes do doutorado. Dividimos casa enquanto trabalhávamos em Palmeira dos Índios. Foi um irmão que Deus me deu. Aprendi que na vida temos que fazer o que achamos certo, e às vezes por defendermos nosso modo de pensar, somos penalizados por isso. Aprendi que mesmo assim vale a pena defendermos nosso ponto de vista até o fim, pois assim, deixamos nossas marcas nas vidas de outras pessoas e sempre seremos lembrados por isso. Fora as saídas, as conversas informais, o apoio e a companhia quando precisei.

Como exemplo de autenticidade, cito meu amigo Rafael Antonello, por todas as resenhas, maluquices, excentricidades que encontrei numa pessoa inusitada em um lugar mais inusitado ainda, um exemplo de autenticidade a ser seguido, vulgo Tonel, uma pessoa que nunca deixará de estar presente nas nossas lembranças.

Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante minha jornada acadêmica nesses 11 anos de UFAL. Aos professores: *Kleber Serra, Eduardo Perdigão, Gandhi Viswanathan, Tiago Mariz, Krerley Oliveira, José Adonai, Wandearley Dias, Socorro Pereira, Wagner, Fabiano Brião* que me auxiliaram em algum momento da minha caminhada. Em especial, gostaria de agradecer pelo apoio enorme que recebi e serei sempre grato ao Prof. *Marcelo Leite* durante o doutorado e ao ex-orientador *Iram Gléria* durante o mestrado. Há dois nomes que gostaria de mencionar com mais cuidado.

---

O primeiro deles: a minha orientadora profa. *Solange Bessa* que com seu jeito sincero de ser, conseguiu extrair o melhor de mim academicamente, e tenho certeza que ela é uma das responsáveis diretas pela finalização deste trabalho, pelas conversas sobre física e por não ter desistido de mim. E por último, ao prof. *Eduardo Fonseca* que nunca esquecerei suas palavras no último dia de aula da última disciplina obrigatória do Doutorado, que teve a preocupação de me chamar a parte para uma conversa que me motivou no ramo da pesquisa que estava praticamente acabada para mim.

Ao povo de Palmeira, alguns agradecimentos e dedicatórias: Prof. *Roberto Baiano*, *D. Rubenita* pelos almoços e jantares recheados de dedicação, carinho e atenção, Prof. *Anderson Gonçalves*, ao Prof. *Herbert*, ao Prof. *Assis*, ao prof. *Erico Augusto*, prof. *Rodrigo Mero*, prof. *Alexandre Machado*, prof. *Vinicius - Vinicinho*, prof. *Max Manhas*, pelas conversas e conselhos de uma pessoa que carrega consigo uma bagagem de experiência que muitos bem mais velhos não possuem e profa. *Edmara Drigo*.

Agradeço em especial, aos meus colegas de trabalho, o prof. *Askery Alexandre* que foi fundamental na execução dos dois trabalhos desenvolvidos aqui, tanto no âmbito do trabalho em si, quanto na amizade. Obrigado também ao aluno de Doutorado *Tiago Lobo* que se mostrou muito prestativo no auxílio do desenvolvimento do trabalho de um modo geral, mais uma vez agradeço.

Aos colegas do grupo de pesquisa, gostaria de citar alguns nomes: *Paulo Brandão* que me auxiliou bastante via Skype, *Alex Costa* trocando muitas idéias, *Cícero Julião*, *Carlos Alberto* e *Átila*.

Aos colegas da pós graduação e graduação, gostaria de mencionar alguns nomes que me acompanharam durante minha formação e que são e foram responsáveis por momentos de bate papo e descontração: *Rafael Rocha* meu amigo baiano, que muitas vezes (quando a TIM ajudava, é claro!) me ouviu muito durante todos esses anos, a *Thaíla Figueredo* que me alugou seus ouvidos durante muito tempo, pessoalmente, pois nunca me atendia (risos), *Lidiane Omena*, *Andrea Carla*, *Nuccia*, *Felipe Dória*, *Ueslen*, *João Victor* que está concluindo seu doutorado no Observatório Nacional, e *Wesley*.

Aos meus colegas de trabalho do IFAL que me apoiaram em tudo que precisei, entre eles gostaria de mencionar: *Anderson Rangel*, *Alexandre Fleming*, *Rodrigo Silva*, *Erisvaldo Ramalho*, *Jocília Rodrigues*, *Gerson Guimarães*, *Peterson Melo* e *Ilka Cedrim*. Aos que esqueci peço minhas desculpas.

A todos os meus alunos que cada dia que passa, não só ensino, mas também aprendo muito com cada um deles e com cada bagagem de vida que cada um traz e compartilha comigo. Agradeço a todos de um modo geral.

Agradeço em geral a todos que me inspiraram, ou de modo positivo me motivando e acreditando que eu pudesse ser melhor, ou de modo negativo tentando fazer com que eu descreditasse em mim, e fazendo assim com que eu me impulsionasse para provar para mim mesmo que era possível.

Para os que esqueci de citar, mas possuíram uma fundamental participação, agradeço pelo apoio que recebi e pela crença depositada em mim. E aproveitando o ensejo, peço desculpas pela injustiça, não foi a intenção.

Ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro enquanto bolsista, e ao Instituto Federal de Alagoas que possibilitou o afastamento das minhas atividades docentes para conclusão do doutorado.

A Deus.

## RESUMO

Considerando a não-linearidade não-instantânea do tipo Kerr, a propagação de um pulso parcialmente coerente é estudado teoricamente através do uso de extensões na equação não linear de Schrödinger. Para isso, levamos em conta um modelo de difusão de fase no pulso parcialmente coerente. Para incorporar o tempo de resposta finito no meio Kerr, utilizamos uma dependência temporal na resposta não linear do meio introduzida na equação não linear de Schrödinger através do modelo de relaxação de Debye. Deduzimos analiticamente também a relação de dispersão e computamos numericamente o espectro de ganho e algumas quantidades estatísticas de segunda ordem relevantes. Neste trabalho realizamos também um estudo detalhado de como estas propriedades estatísticas são influenciadas pelos regimes de dispersão da velocidade de grupo, tanto quanto pelo atraso na resposta não linear do meio em questão. Por fim, enfatizamos as diferentes características para as respostas não lineares rápidas e lentas.

Em outra vertente deste trabalho, realizamos estudos teóricos acerca de tais características estatísticas para o regime de dispersão zero.

Palavras-chave: Óptica não linear estatística, instabilidade modulacional, efeito Raman.



## ABSTRACT

Considering noninstantaneous Kerr nonlinearity, the propagation of a partially coherent optical beam are theoretically investigated by using extensions of the nonlinear Schrödinger equation (NLSE). In order to account for the partial coherence of the beam, a phase-diffusion model is used for the laser beam. To introduce the finite response time of the medium, a time dependent nonlinear response is incorporated in the system of NLSE using the Debye relaxation model. We analytically deduce the dispersion relation and numerically compute the gain spectra along with relevant second-order statistical quantities. A detailed study of how these statistical properties are influenced by the group velocity dispersion regime as well as by the delayed nonlinear response of the material is presented. The distinct features for slow and fast delayed nonlinear response are also emphasized.

In another aspect of this work, we also conducted theoretical studies on such statistical characteristics near zero-dispersion regime.

Keywords: Nonlinear statistical optics, modulational instability, Raman effect.

## PREFÁCIO

Neste trabalho, analisamos pulsos ópticos parcialmente coerentes levando em consideração o caráter estatístico incluído na propagação de tais pulsos. Investigamos também como o fenômeno da instabilidade modulacional - induzido pela automodulação de fase - pode ser evidenciado através da análise das propriedades estatísticas do pulso óptico, utilizando um modelo de difusão de fase. Durante a propagação dos pulsos ópticos, levamos em conta um meio não linear dispersivo genérico cuja resposta é não instantânea. Estudamos os diferentes comportamentos dos espectros de ganho devido aos regimes de tempo de resposta lenta e rápida. Com o objetivo de complementar o nosso trabalho, realizamos os mesmos estudos não apenas para os regimes dispersivos anômalo e normal, também estendemos nossos resultados para o caso do regime de dispersão mínima.

Para isso, dividimos essa tese em 4 capítulos conforme descrevemos a seguir.

No primeiro capítulo fazemos um relato teórico sobre a teoria de propagação de pulsos ópticos. Após um breve histórico sobre comunicações utilizando feixes luminosos, consideramos as quatro equações de Maxwell, e as desenvolvemos até obtermos a equação não linear de Schrödinger para propagação de ondas eletromagnéticas. Citamos também alguns efeitos não-lineares que podemos encontrar na propagação destes pulsos importantes para este trabalho.

No capítulo 2, nos concentramos em definir alguns resultados já existentes na literatura sobre a propagação de pulsos parcialmente coerentes em meios com resposta não linear instantânea [14].

No capítulo 3, apresentamos alguns resultados que originaram esta tese [20] complementares aos estudos de pulsos coerentes propagantes em meios com resposta não linear não instantânea [13], onde o caráter estocástico de pulsos parcialmente coerentes é levado em conta. Neste capítulo nos concentraremos nos regimes de dispersão da velocidade de grupo anômalo ( $\beta_2 < 0$ ) e normal ( $\beta_2 > 0$ ).

No capítulo 4, investigamos o caso da amplificação do ruído descrito no capítulo anterior. Porém, motivado por alguns trabalhos [44, 45], estudamos a ENLS no regime de dispersão zero ( $\lambda \approx \lambda_D \Rightarrow \beta_2 = 0$ ), dando origem a um outro trabalho inédito que está em fase de conclusão para publicação em breve.

Encerramos no capítulo 5, com as perspectivas futuras para este trabalho. Tais como, a análise dos efeitos descritos nesta tese devido a saturação da resposta não linear para pulsos parcialmente coerentes, e nas circunstâncias em que a instabilidade modulacional é induzida devido a modulação de fase cruzada, onde há dois pulsos parcialmente coerentes se propagando em um mesmo meio com resposta não linear não instantânea.

# Sumário

Folha de rosto . . . . .	i
Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
Prefácio . . . . .	ix
<b>1 Propagação de ondas eletromagnéticas</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 Histórico das comunicações . . . . .	8
1.2.1 Tipos de fibras ópticas . . . . .	12
1.3 Dedução da equação de propagação de uma onda eletromagnética . . . . .	14
1.4 Velocidade da luz e índice de refração em um meio . . . . .	23
1.5 Representações de ondas harmônicas . . . . .	23
1.5.1 Ondas unidimensionais . . . . .	24
1.5.2 Ondas tridimensionais . . . . .	25
1.6 Velocidade de grupo . . . . .	27
1.7 Polarização da luz e susceptibilidade elétrica . . . . .	28
1.8 Dispersão Cromática . . . . .	31
1.9 Equação não linear de Schrödinger . . . . .	34
1.10 Óptica não linear . . . . .	42
1.11 Geração de novas frequências devido a $\chi^{(3)}$ . . . . .	43
1.12 Efeito Kerr óptico . . . . .	43

1.13	Efeito Raman . . . . .	44
1.14	Automodulação de fase . . . . .	45
1.15	Modulação de fase cruzada . . . . .	47
1.16	Instabilidade Modulacional . . . . .	47
1.16.1	Solução estacionária . . . . .	48
1.16.2	Espectro de Ganho . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Amplificação de ruído em um meio não linear dispersivo</b>	<b>55</b>
2.1	Introdução . . . . .	55
2.2	Variáveis aleatórias com valores complexos . . . . .	56
2.2.1	Fasores aleatórios . . . . .	56
2.2.2	Um fasor constante mais um fasor aleatório . . . . .	58
2.2.3	Fasor constante forte e soma de pequenos fasores aleatórios . . . . .	59
2.3	Funções de autocorrelação e correlação cruzada . . . . .	59
2.4	Teorema de Wiener-Khintchine . . . . .	61
2.5	Propagação de um pulso parcialmente coerente em um meio dispersivo não linear . . . . .	63
2.6	Amplificação de ruído em um meio não linear dispersivo no regime de dispersão zero	71
<b>3</b>	<b>Amplificação de ruído em um meio com resposta não linear atrasada</b>	<b>75</b>
3.1	Propagação de um pulso parcialmente coerente em um meio dispersivo não linear com resposta não linear atrasada . . . . .	75
3.2	Discussão dos resultados . . . . .	83
3.2.1	Regime de dispersão normal . . . . .	83
3.2.2	Regime de dispersão anômala . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Amplif. de ruído em um meio com resposta não linear atrasada no regime de dispersão zero</b>	<b>93</b>
4.1	Introdução . . . . .	93
4.2	Propagação de pulsos luminosos em meios não lineares com resposta não linear atrasada para $(\lambda \approx \lambda_D)$ . . . . .	94
4.3	Discussão dos resultados . . . . .	100

<b>5</b>	<b>Considerações finais e perspectivas futuras</b>	<b>105</b>
----------	--	------------

	<b>Referências Bibliograficas</b>	<b>107</b>
--	-----------------------------------	------------



# Capítulo 1

## Propagação de ondas eletromagnéticas

### 1.1 Introdução

Os estudos iniciais sobre a luz surgiram desde os tempos mais antigos em um campo da filosofia conhecido como *atomismo*. Os estudiosos desta área baseavam suas teorias pressupondo que a natureza estaria dividida em apenas duas partes: o átomo e o vazio (vácuo). Como um dos principais atomistas gregos e teóricos precussores no campo da óptica podemos citar **Lucrecio** (Titus Lucretius Carus - 99 a.C. - 55 a.C.) que defendia a hipótese que tudo, inclusive a luz solar era composto por átomos.

No início do século XVII, esta teoria corpuscular da luz com as contribuições de **Isaac Newton** (1642 – 1727) pôde se firmar. Em suas obras, Newton afirmava que a luz se propagava como pequenos corpos através do espaço obedecendo a três princípios básicos:

- *Princípio da propagação retilínea da luz*: Dois ou mais raios de luz se propagam em trajetória retilínea em meios homogêneos e transparentes.
- *Princípio da independência dos raios de luz*: Se dois ou mais raios de luz se cruzam durante sua propagação em algum ponto do espaço, cada um deles continuam sua trajetória independente dos demais.



- *Princípio da reversibilidade da luz*: Um raio de luz ao propagar-se em um meio, percorre o mesmo caminho óptico independente do sentido da propagação.

Entretanto, Newton acreditava também que as partículas que compunham luz possuíam massa diferente de zero, e portanto, deveriam possuir peso quando sujeitas a um campo gravitacional. Assim, um raio de luz poderia sofrer um pequeno desvio ao se propagar próximo a um campo gravitacional.

Figura 1.1: Da esquerda para direita: *Lucrécio e Isaac Newton*



Fonte: Disponível em: <<http://www.materialismo.net/>> e <<http://www.academiadeciencia.org.br/site/2012/10/29/isaac-newton/>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h, respectivamente.

Um outro cientista, **Christiaan Huygens** (1629 – 1695), discordava das idéias de Newton sobre a teoria corpuscular da luz. Huygens descrevia a luz como sendo uma “onda em movimento ou um pulso periódico” se espalhando em todas as direções pelo éter. Através de sua teoria ondulatória da luz descreveu os fenômenos de refração e reflexão utilizando uma onda primária e pequenas ondas secundárias. Também poderia explicar outros fatos ópticos utilizando argumentos envolvendo fenômenos de interferência de ondas.

Os campos eletromagnéticos foram descobertos no início de 1800 através de estudos envolvendo correntes alternadas. Percebeu-se que alguns efeitos ocorriam a uma certa distância através do espaço, mesmo quando não havia nenhum meio condutor. **James Clerk Maxwell** (1831 – 1879) notou que existia uma simetria entre as equações do campo elétrico e do campo magnético. Desta maneira, previu teoricamente a natureza das ondas eletromagnéticas e que a luz era uma onda deste tipo, com velocidade de propagação igual a  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$ . Em seus trabalhos publicados em 1864,

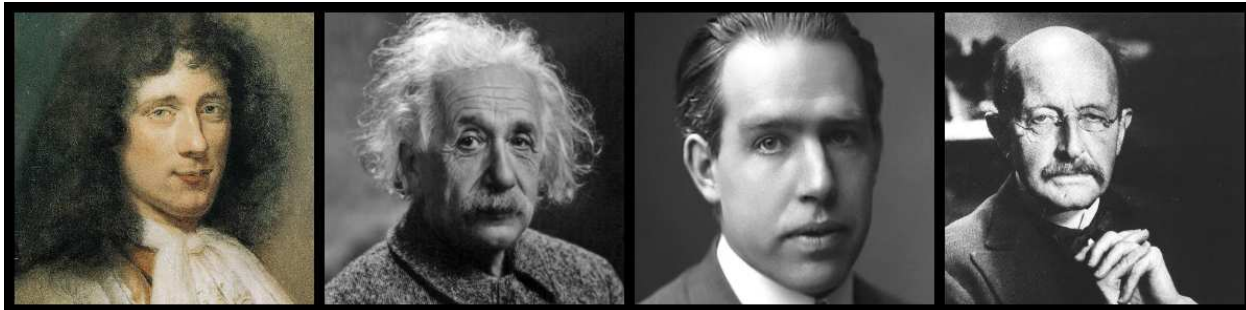
em um dos papers mais famosos em física intitulado *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Maxwell escreveu:

*“A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos electromagnéticos dos Srs. Kohrausch e Weber, concorda tão exatamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos ópticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos.[1]”*

Mais posteriormente, a teoria quântica da luz foi desenvolvida, com nomes como: **Planck** (1858 – 1947), **Einstein** (1879 – 1955), **Bohr** (1885 – 1962) partindo do fato da energia eletromagnética ser quantizada, ou seja, que o campo eletromagnético só pode ser propagado em “pacotes” de quantidades discretas de energia, chamados de *fótons*.

Nas teorias modernas sobre a luz, leva-se em conta sua dualidade onda-partícula que envolve conceitos das teorias corpuscular de Newton e ondulatória de Huygens. Podemos explicar o que é a luz utilizando a teoria eletromagnética de Maxwell para descrever a propagação da mesma e a teoria quântica da luz para descrever a interação da luz com a matéria. Neste raciocínio, deduziremos nas seções seguintes a equação de propagação de uma onda eletromagnética.

Figura 1.2: Da esquerda para direita: *Christiaan Huygens, Albert Einstein, Neils Bohr e Max Planck*



Fonte: Disponível em: <<http://summer-astronomy-pc.wikispaces.com/Christiaan+Huygens>>, <[http://en.wikipedia.org/wiki/Albert\\_sEinstein](http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_sEinstein)>, <[http://en.wikipedia.org/wiki/Niels\\_Bohr](http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr)> e <<http://www.infoescola.com/biografias/max-planck/>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h, respectivamente.

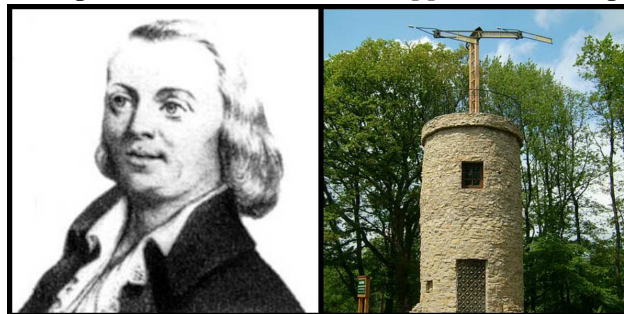
## 1.2 Histórico das comunicações

Vamos entender um pouco do histórico de alguns métodos de transmissão que utilizam a luz como meio de comunicação para envio de informações desde os tempos mais antigos.

Desde os tempos mais antigos, o ser humano utilizava-se da luz solar para se comunicarem entre si por grandes distâncias. Uma das maneiras encontradas para tal era através do uso de espelhos refletindo sinais luminosos direcionando-os para um receptor, que por sua vez reemitia os sinais recebidos para outro receptor ainda mais distante, e assim sucessivamente. Durante a noite, devido a falta de luz solar era utilizado grandes fogueiras como fonte de luz. Este processo de transmissão de sinais, em princípio é utilizado até hoje, porém sem o uso de fogueiras, e os receptores humanos foram substituídos por dispositivos chamados de *repetidores*. Como curiosidade histórica, é possível que este método de comunicação tenha sido utilizado na transmissão de informações levadas da Ásia Menor até Argos pelos gregos na ocasião da queda de Tróia no século VI A.C.

Em 1791, o francês *Claude Chappe* criou um aparelho chamado de *Semaphore*, constituído basicamente como um dispositivo de braços mecânicos que desempenhavam o papel de repetidores. Estes repetidores utilizavam sinais semelhantes aos usados em pistas de pousos de aeroportos. Com o uso desta técnica era possível transmitir informações a distâncias de 800Km em 1 hora aproximadamente.

Figura 1.3: Da esquerda para a direita: *Claude Chappe* e um exemplar de um *semaphore*



Fonte: Disponível em: <<http://infnetmidiasdigitais.files.wordpress.com/2011/01/portraitchappe.jpg>> e <<http://en.wikipedia.org/wiki/File:OptischerTelegraf.jpg>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h, respectivamente.

Alguns anos depois, *Samuel Morse* construiu em 1835 seu primeiro protótipo de telégrafo, e juntamente com ele, criou um importante sistema de sinais de comunicação conhecido como *Código Morse*. Já em 1870, John Tyndall demonstrou que era possível a luz percorrer um “feixe” de

água em decorrência do fenômeno da reflexão interna total (RIT).

Figura 1.4: Da esquerda para a direita: *Samuel Morse*, um telegráfo e o experimento Tyndall

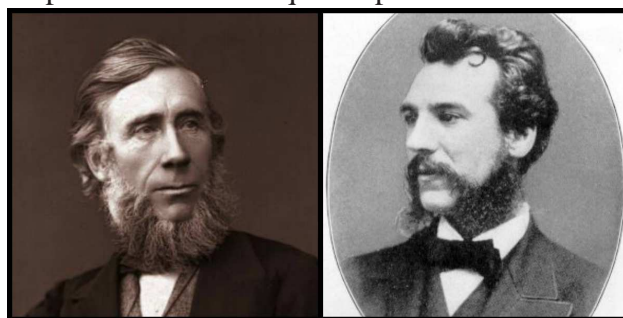


Fonte: Disponível em: <[http://infnetmidiasdigitais.files.wordpress.com/2011/01/samuel\\_morse\\_s.jpg](http://infnetmidiasdigitais.files.wordpress.com/2011/01/samuel_morse_s.jpg)>, <<https://historiadastransmissoes.wordpress.com/tag/telegrafo/>> e <<http://www.ciop.unlp.edu.ar/Espanhol/Actividades/eventos/laser/fotosSeleccionadas.html>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h, respectivamente.

Esse processo pode ser comparado ao que ocorre no interior das fibras ópticas. Esse experimento simples e muito importante, marca o início da pesquisa no campo dos guias de onda. Em 1876, Graham Bell, após ter obtido a patente do telefone, criou um dispositivo chamado de *Fotofone*.

Este dispositivo consistia em um sistema de comunicação utilizando-se da luz solar transmitindo a voz através de espelhos e de um sistema elétrico como mostra a fig. (1.6) - As ondas sonoras da voz do emissor modulavam as ondas luminosas através de um espelho refletor. No processo receptor, uma célula de selênio convertia esse feixe luminoso modulado em intensidade de corrente elétrica. E conseqüentemente, através de um receptor telefônico essa intensidade de corrente elétrica poderia ser convertida novamente em som [2].

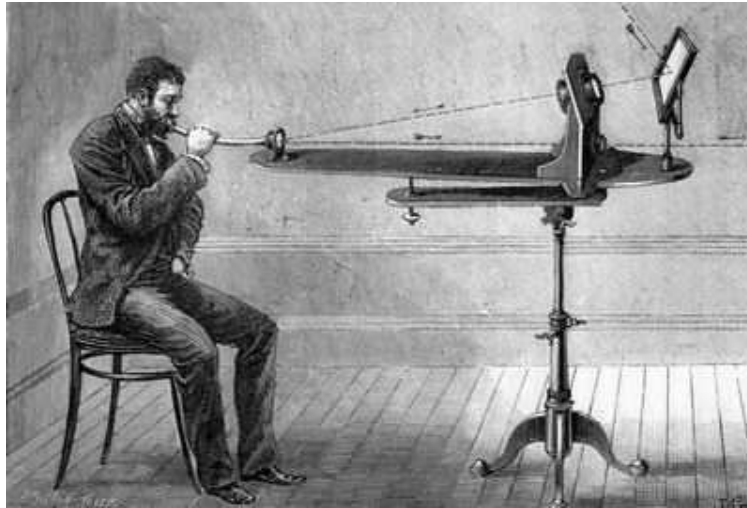
Figura 1.5: Da esquerda para direita: Da esquerda para a direita: *John Tyndall* e *Graham Bell*



Fonte: Disponível em: <[http://www.irishexaminer.com/media/images/e/exam041213JohnTyndall\\_large.jpg](http://www.irishexaminer.com/media/images/e/exam041213JohnTyndall_large.jpg)> e <<http://www.uh.edu/engines/epi587.htm>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h, respectivamente.

A partir da experiência de Tyndall e do Fotofone de Bell surgiram alguns guias de ondas fabricadas de materiais dielétricos que possuíam a capacidade de transmitir a luz devido ao fenômeno de reflexão interna total (RIT), conhecidos como fibras. Entre estas fibras, existe a fibra óptica que basicamente é um guia de onda produzido por materiais que possuem a capacidade de transportar luz através de qualquer caminho.

Figura 1.6: Desenho ilustrativo de um fotofone sendo utilizado



Fonte: Disponível em: <<http://www.fazano.pro.br/port132.html>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h.

Como inventor das fibras ópticas podemos mencionar, o cientista indiano *Narinder Singh Kapany*. Em 1952, com base nos estudos realizados anteriormente, Kapany pode concluir suas pesquisas que o levaram à invenção da fibra óptica.

Figura 1.7: *Narinder Singh Kapany*

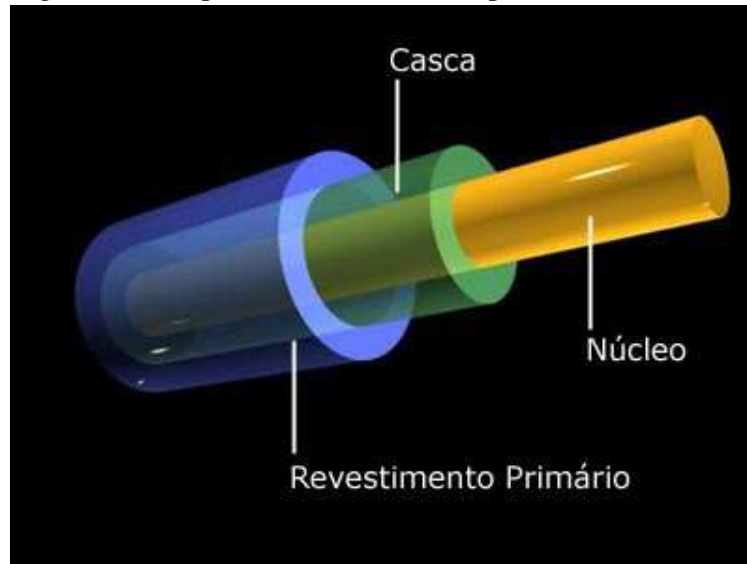


Fonte: Disponível em: <<http://www.parrikar.com/blog/2012/06/20/legends-of-silicon-valley-narinder-singh-kapany/>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h.



Para que o fenômeno da RIT seja possível, as fibras ópticas são compostas por dois cilindros concêntricos, onde os índices das camadas mais externas são sempre menores que os das camadas mais internas permitindo assim a propagação dentro do guia, semelhante ao experimento de Tyndall.

Figura 1.8: Esquema ilustrativa e simplificado de uma fibra



Fonte: Disponível em: <<http://www.oficinadanet.com.br/imagens/post/2649/estrutura-fibra-optica.jpg>> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h.

O índice de refração do núcleo ( $n_{\text{núcleo}}$ ) e o índice de refração da interface ou casca ( $n_{\text{interface}}$ ), obedecem relação:

$$n_{\text{núcleo}} > n_{\text{interface}}$$

Conjuntamente com a escolha dos índices, é necessário também que a luz incida na fibra com um ângulo de incidência abaixo de um valor crítico. Estes são os princípios básicos que permitem a propagação da luz em uma fibra óptica.

Quando estamos tratando de transmissão de informação podemos relacionar, a largura da banda do sinal com a quantidade de informação que pode ser transmitida por unidade de tempo. As fibras ópticas são excelentes transmissores quando estamos operando sistemas que exijam altas larguras de banda. Relaciona-se a largura da banda em questão e a quantidade de informação transmitida através da seguinte equação:

$$\text{Taxa de transmissão} = (\text{Largura da banda(Hz)}) \times \frac{\text{Bit/s}}{\text{Hz}}$$

### 1.2.1 Tipos de fibras ópticas

Podemos dividir os tipos de fibras existentes entre: fibras **monomodo** e fibras **multimodo**, onde esta última se subdivide em: **fibras multimodo com índice degrau** e **fibras multimodo com índice gradual**. Estes diferentes tipos de fibras estão relacionados de acordo com os modos de propagação dentro do guia de onda.

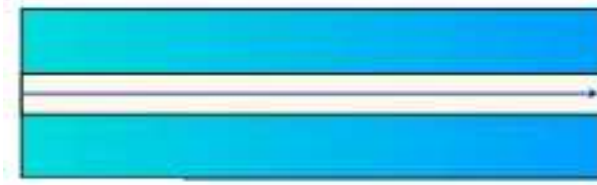
#### Fibras Monomodo

As fibras que possuem um único modo de propagação são chamadas de *fibras monomodo*. Devido a essa característica, a luz se propaga com baixa dispersão. Entretanto, este tipo de fibra é de difícil manuseio e por isso, a dificuldade de sua produção é maior comparada às demais. Podemos salientar ainda que a principal característica da fibra monomodo é a maior capacidade de transmissão quando em relação às fibras multimodos, devido a quantidade de modos propagantes permitidos nesse tipo de fibra.

Podemos mencionar como método de produção de uma fibra monomodo:

1. Reduzindo a diferença entre os índices de refração;
2. Aumentando o comprimento de onda;
3. Diminuindo o diâmetro do núcleo da fibra óptica.

Figura 1.9: Esquema ilustrativo de uma fibra monomodo



Fonte: Disponível em: <[http://www.gta.ufrj.br/grad/08\\_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas\\_clip\\_image008.jpg](http://www.gta.ufrj.br/grad/08_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas_clip_image008.jpg)> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h. (Adaptado)

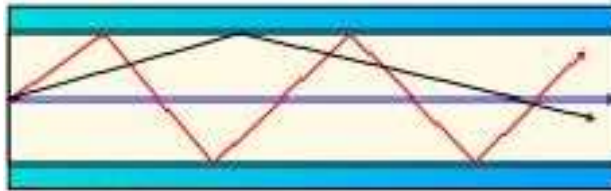
### Fibras Multimodo com Índice Degrau

Com raciocínio semelhante a seção anterior, quando as fibras possuem vários modos de propagação são chamadas de *fibras multimodo* e por sua vez, são relativamente mais fáceis de se produzir. Como já foi mencionado, as fibras são compostas por dois cilindros concêntricos com diferentes índices de refração, escolhidos de maneira que o fenômeno da reflexão interna total seja observado.

Podemos escolher estes índices de refração sem uma mudança gradual ao longo da fibra, neste caso, diremos que estamos trabalhando com uma *fibra multimodo com índice degrau*

Nas fibras multimodo de uma maneira geral, vários modos de propagação são excitados quando um pulso incide, implicando em que parte da luz propagante trafegue em diferentes caminhos, causando assim um grande alargamento do pulso devido à diferença de caminhos.

Figura 1.10: Esquema ilustrativo de uma fibra multimodo com índice degrau



Fonte: Disponível em: <[http://www.gta.ufrj.br/grad/08\\_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas\\_clip\\_image008.jpg](http://www.gta.ufrj.br/grad/08_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas_clip_image008.jpg)> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h. (Adaptado)

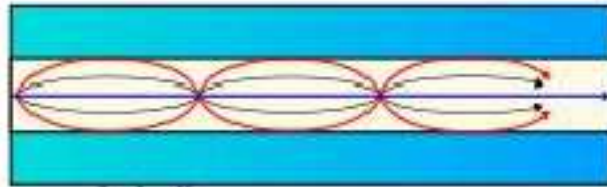
### Fibras Multimodo com Índice Gradual

A diferença básica entre as fibras de índice gradual para as de índice degrau está na formação de sua estrutura interna. Estas fibras possuem um tipo de produção mais complexo do que as demais. Nestas fibras, o índice de refração deve diminuir *gradualmente* do núcleo para a casca, fazendo com que parte da luz trafegante se propague em diferentes caminhos, porém, chegando à outra extremidade praticamente no mesmo momento. Isso resulta em um aumento efetivo da banda passante, aumentando a capacidade de transmissão.

No processo de produção de tais fibras, é possível construir as diferenças graduais do núcleo para a casca, a partir de dopagens diferenciadas de elementos na região entre o núcleo e a casca.



Figura 1.11: Esquema ilustrativo de uma fibra multimodo com índice gradual



Fonte: Disponível em: <[http://www.gta.ufrj.br/grad/08\\_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas\\_clip\\_image008.jpg](http://www.gta.ufrj.br/grad/08_1/wdm1/Atenuaoelimitaesdasfibraspticas_clip_image008.jpg)> Acesso em 31/10/2014 às 11:12h. (Adaptado)

### 1.3 Dedução da equação de propagação de uma onda eletromagnética

Considere o vácuo. Podemos estabelecer o estado eletromagnético em um ponto do espaço através da especificação de dois campos vetoriais:  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , que representam os campos elétrico e indução magnética macroscópicos em questão. Campos estes, que por sua vez regem a dinâmica da propagação de ondas eletromagnéticas. Relacionaremos este campos entre si, utilizando as equações de Maxwell. São elas, em sua forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

Podemos também associar a estes dois campos, outros dois campos derivados correspondentes,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  (também conhecidos como: campo deslocamento elétrico e campo magnético, respectivamente) através da polarização e magnetização do meio,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$ .

Porém, tais campos, só serão levados em conta, quando o ponto ou meio em questão seja um meio dielétrico, ou quando fenômenos de polarização forem necessários considerar. Para isso, devemos utilizar uma forma um pouco mais geral das equações de Maxwell.

#### Demonstração 1:

Pela lei de Gauss, sabemos que o campo elétrico obedece a seguinte relação com a densidade total de cargas no meio:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \therefore \rho = \rho_f + \rho_b \quad (1.5)$$

$E$ ,  $\rho_f$  e  $\rho_b$  representam as densidades de cargas: livres (densidade de cargas externa) e ligadas (densidade de cargas polarizada) do meio, respectivamente. Chamamos densidades de cargas livres, àquelas referentes as cargas que possuem a capacidade de se movimentar dentro do meio estudado. Analogamente, a densidade de cargas ligadas são caracterizadas pelas cargas que estão “presas” as moléculas ou átomos do meio dielétrico.

Considere um objeto cuja polarização em função da posição  $\mathbf{r}$  seja definida pela função  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ . A partir da definição de potencial elétrico, sabemos que o potencial  $V(\mathbf{r})$  pelo elemento de volume  $\Delta V$  situado no ponto  $\mathbf{r}$  pode ser calculado através da soma de dois termos, o primeiro referente à carga que existe dentro do volume  $\Delta V$  do dielétrico, dado por:  $\rho_f(\mathbf{r}')\Delta V$ , e o segundo termo referente a contribuição do dipolo total induzido dado por:  $\mathbf{P}\Delta V$ . Assim, o potencial deste dielétrico pode ser dado por:

$$V(\mathbf{r}) = \int_V dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV, \quad (1.6)$$

Podemos utilizar a seguinte identidade matemática, mudando apenas as coordenadas de atuação do operador  $\nabla$ :

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Rightarrow \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.7)$$

E assim,

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.8)$$

Substituindo essa identidade em (1.6), obtemos:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV \quad (1.9)$$

Podemos utilizar o seguinte procedimento,

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) em (1.9),

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right] dV \quad (1.11)$$

Pelo teorema do divergente<sup>1</sup>, o potencial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  é dado por:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right] \quad (1.13)$$

Analisando os termos acima, podemos perceber que os termos  $\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}$  e  $\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$  possuem unidades de carga por unidade de área e carga por unidade de volume, respectivamente. Sendo assim, é conveniente definirmos as densidades volumétricas e superficiais de carga de polarização, uma vez que estas grandezas estão associadas a polarização. Logo,

---

1

**Teorema 1** (Teorema do Divergente). *Dado um campo vetorial  $W$  de classe  $C^1(D)$ , que contém uma superfície fechada  $S$  delimitando um volume  $V$  em  $D$  aberto, orientada pela normal unitária  $\hat{n}$  exterior à fronteira de  $V$ , então:*

$$\int_V \nabla \cdot W dV = \oint_S W \cdot \hat{n} dS \quad (1.12)$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.14)$$

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{n} \quad (1.15)$$

Desta forma, a eq. (1.13) se reescreve da seguinte forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right] \quad (1.16)$$

Em um dielétrico que preenche todo o espaço, vamos definir a superfície  $S$  de integração infinita. Assim, o potencial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  é calculado a partir das contribuições das densidades de cargas no dielétrico representadas pelas integrais volumétricas a seguir. Desta forma,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \right] \quad (1.17)$$

Logo, o potencial pode ser calculado a partir das contribuições das densidades volumétricas de cargas livres e ligadas.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_f(\mathbf{r}') + \rho_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (1.18)$$

Comparando a eq. (1.18) com o potencial elétrico no vácuo,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (1.19)$$

Vemos que as equações são iguais, uma vez que a grandeza  $\rho_f(\mathbf{r}') + \rho_b(\mathbf{r}')$  denota uma densidade “líquida”. Comparando com a primeira lei de Maxwell, em sua forma diferencial, podemos perceber que,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

que pela eq. (1.14), podemos escrever:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_f \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (1.21)$$

Aqui utilizamos a aproximação até o termo de dipolo, desprezando os termos de quadrupolo. Assim, definimos, o deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$ , como

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.22)$$

temos que,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.23)$$

Afim de estabelecer uma relação constitutiva para o campo magnético,  $\mathbf{B}$ , partindo de um raciocínio semelhante, iremos calcular a contribuição para campo magnético devido a um material magnético.

Em princípio, consideremos um meio magnético que ocupe todo o volume do espaço em questão. Onde, existe uma densidade de corrente e uma magnetização representados respectivamente por,  $\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ . Se levarmos em conta um elemento de volume  $\Delta V$  desse meio, o mesmo gera um potencial vetor magnético<sup>2</sup> total dado por duas contribuições: a primeira delas está associada a densidade de corrente, e a segunda está associada a magnetização através de pequenos momentos de dipolos magnéticos  $\mathbf{m} = \mathbf{M}\Delta V$ . Desta maneira, podemos escrever o potencial vetor magnético como:

---

<sup>2</sup>Por definição:  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}') \Delta V}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{M} \Delta V \times |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (1.24)$$

Sendo assim, o potencial total pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{M} \times |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV \quad (1.25)$$

Através das identidades (1.7) e (1.8), podemos reescrever (1.25),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{M} \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV \quad (1.26)$$

Considerando agora  $\psi$  uma função escalar, utilizaremos a seguinte identidade:

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.27)$$

Aplicando para o nosso caso, a identidade pode ser reescrita como:

$$\nabla' \times \left[ \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \nabla' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \times \mathbf{M}) \quad (1.28)$$

e portanto,

$$\mathbf{M} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.29)$$

Integrando ambos os lados da eq. (1.29) em todo volume  $V$ , temos:

$$\int_V \mathbf{M} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV = \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV - \int_V \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \quad (1.30)$$

Utilizaremos o teorema 1, transformaremos a eq. (1.30) da seguinte maneira:

$$\int_V \mathbf{M} \times \nabla' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV = \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \oint_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA \quad (1.31)$$

onde:  $S$  denota a superfície envoltória do volume  $V$  descrito anteriormente. Assim sendo, utilizaremos a eq. (1.31) e obtemos para o potencial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \oint_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA \right] \quad (1.32)$$

e conseqüentemente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_f(\mathbf{r}) + \nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA \quad (1.33)$$

Analisando a equação acima chamaremos os termos envolvendo as densidades de magnetização ligadas explicitamente de:

$$\mathbf{J}_V = \nabla' \times \mathbf{M} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (1.35)$$

Desta maneira,  $\mathbf{J}_V$  e  $\mathbf{J}_S$  representam uma densidade de magnetização volumétrica e superficial, respectivamente. Definindo assim, podemos perceber que os três termos das integrais representam a corrente real que existe no material, a uma densidade de magnetização volumétrica e a uma densidade superficial de magnetização na superfície que cobre o volume  $V$ . Para o caso em que o meio em questão está sendo compreendido infinito, a integral de superfície é nula, se esse não for o

caso, podemos considerar um volume grande o suficiente para que na superfície  $S$ , a magnetização  $\mathbf{M}$  seja zero e conseqüentemente anule  $\mathbf{J}_S$ . Em qualquer um desses casos, as parcelas importantes da densidade de magnetização são  $\mathbf{J}_f$  e  $\mathbf{J}_V$ . Assim, podemos escrever o potencial vetor magnético total como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \frac{\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_V}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \quad (1.36)$$

e portanto, pela segunda equação de Maxwell, vemos que:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.37)$$

Como o potencial vetor magnético está relacionado com  $\mathbf{B}$ , quando o meio que produz esse campo se comporta como magnético, temos que a equação (1.37) é alterada para

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}) \quad (1.38)$$

e portanto,

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (1.39)$$

e assim, definimos o campo magnético  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.40)$$

Neste trabalho, iremos destacar nossa atenção ao estudo teórico de um fenômeno importante na propagação de pulsos parcialmente coerentes em fibras ópticas. Sabemos que as fibras são meios que não possuem cargas livres, matematicamente,  $\mathbf{J} = 0$  e  $\rho_f$ . Pelo fato de serem materiais não-



magnéticos, temos também que  $\mathbf{M} = 0$ . Desta maneira, as equações de Maxwell serão reescritas como:

Agora, podemos reescrever as equações de Maxwell macroscópicas:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.44)$$

Agora nosso objetivo será estabelecer a equação de propagação de onda em fibras ópticas. Para isso faremos algumas manipulações algébricas com o objetivo de encontrar esta equação. Aplicando o operador rotacional em ambos os lados da eq. (1.41) e utilizando a seguinte propriedade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.45)$$

Obtemos,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (1.46)$$

porém, através das equações de Maxwell, sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , em consequência, a eq. (1.6) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (1.47)$$

Matematicamente, para uma onda eletromagnética, as características da resposta não linear do meio podem ser descritas através do termo de polarização,  $\mathbf{P}$ , na equação (1.47). Isto será desenvolvido e discutido com mais detalhes em breve, nos próximos capítulos.

## 1.4 Velocidade da luz e índice de refração em um meio

Ao propagarmos luz em um meio dielétrico e isotrópico as equações de Maxwell são as mesmas quando essa mesma luz estiver se propagando no vácuo, contanto que as constantes da permissividade e permeabilidade  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sejam substituídas por  $\epsilon$  e  $\mu$ . Desta maneira, a velocidade de propagação da luz nesse meio será dada por:

$$v = \sqrt{\mu\epsilon} \quad (1.48)$$

Uma relação entre as velocidades de propagação da luz no vácuo e no meio, podem ser estabelecidas e definimos desta maneira, a quantidade  $n$ :

$$n = \frac{c}{v} \therefore n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \quad (1.49)$$

Conhecida como *índice de refração* e usualmente depende da frequência. Essa variação do índice de refração com a frequência da radiação é chamada de *dispersão*. A dispersão da luz desempenha um papel fundamental na óptica não-linear em diversos fenômenos.

## 1.5 Representações de ondas harmônicas

Se não levarmos em conta a polarização, a equação de propagação de uma onda em um meio genérico pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.50)$$

Assim em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.51)$$

No estudo de ondas eletromagnéticas, se fazem necessárias a introdução de algumas grandezas importantes, para isso, vamos analisar o caso cujo a onda propagante é unidimensional.

### 1.5.1 Ondas unidimensionais

No caso 1-D a eq. (1.51) será reduzida a:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.52)$$

Por substituição, percebemos que a função

$$E(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (1.53)$$

Corresponde a uma solução possível da equação de onda. Desde que a relação,

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (1.54)$$

seja satisfeita. Esta solução é conhecida no estudo da óptica como *onda harmônica plana*. Analisando a propagação desta onda num tempo  $\Delta t$  percebemos o deslocamento de  $z$  a  $z + \Delta z$  da onda, do tempo  $t$  ao tempo  $t + \Delta t$  está relacionada através de sua velocidade de propagação  $v$  da seguinte maneira:

$$\Delta z = v \Delta t \quad (1.55)$$

Como a distância  $\Delta z$  representa uma diferença de fase,  $v$  é chamada de *velocidade de fase*.

As constantes que surgiram na solução geral  $\omega$  e  $k$  representam respectivamente, a *frequência angular* e *número de onda*. Fisicamente, a distância medida no sentido de propagação da onda na realização de um ciclo completo é chamada  $\lambda$ . O tempo necessário para a realização deste ciclo é chamado de *período*  $T$ . O número de ciclos realizado por unidade de tempo é chamada *frequência*, denotada por  $\nu$ . Quando a unidade de tempo encontra-se no S.I. (segundos) a unidade de  $\nu$  é dada em Hz (Hertz). Matematicamente,

$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{k} \quad (1.56)$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.57)$$

### 1.5.2 Ondas tridimensionais

Para o caso em que as ondas se apresentam em três dimensões, a função de onda análoga a (1.53) é dada por:

$$E(x, y, z, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (1.58)$$

onde:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

e o vetor de onda  $\mathbf{k}$  é dado em termos dos números de onda:

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}k_x + \mathbf{j}k_y + \mathbf{k}k_z$$

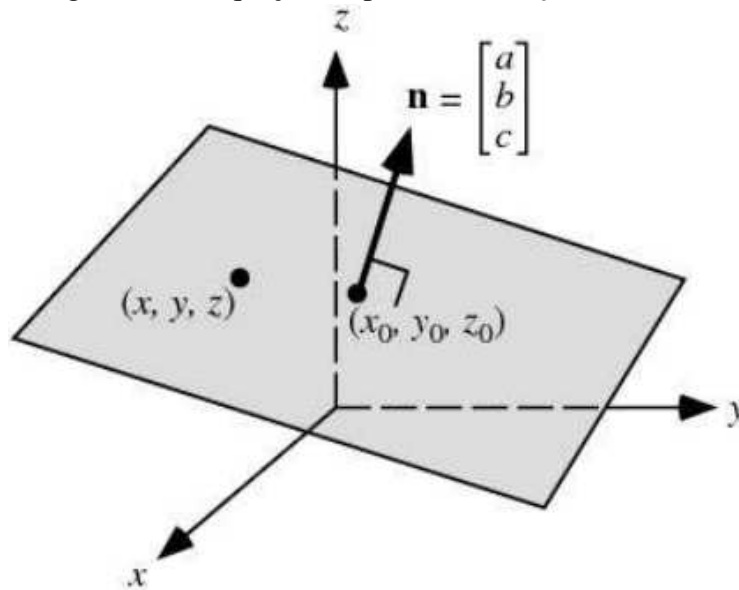
Assim, o módulo do vetor de onda é dado por:

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (1.59)$$

Se considerarmos valores constantes para o argumento do cosseno em (1.58), percebemos que eles formam um conjunto de planos no espaço, chamados de *planos de fase constante*.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{constante} \quad (1.60)$$

Figura 1.12: Equação do plano:  $ax + by + cz + d = 0$



Fonte: Extraído de: “Seminário de grupo: Knots and Lights (Paulo Brandão Filho).”(jan/2014)

Desta forma, percebemos que estes planos de fase constante são ortogonais ao vetor de onda  $\mathbf{k}$ , e devido ao fator temporal na fase, estes planos se movem na direção do vetor  $\mathbf{k}$  com a velocidade de fase:

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad (1.61)$$

A radiação eletromagnética é gerada devido a oscilação de cargas elétricas. Se em uma fonte específica todas as cargas oscilam em fase, a fonte é dita *coerente*, se elas oscilam independentemente umas das outras, a fonte é dita *incoerente*.

## 1.6 Velocidade de grupo

Na descrição de uma onda harmônica, podemos utilizar a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Note que quantidade física que estudamos comumente está representada pela parte real da expressão acima. É preferível utilizar esta notação complexa apenas por conveniência matemática. E portanto,

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.62)$$

Iremos analisar agora a superposição entre duas ondas harmônicas com diferentes frequências angulares ambas na mesma direção de propagação. Vamos considerar que as duas frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são dadas por  $\omega + \Delta\omega$  e  $\omega - \Delta\omega$ , respectivamente. Assim,

$$E = E_0 e^{i[(k+\Delta k)z - (\omega+\Delta\omega)t]} + E_0 e^{i[(k-\Delta k)z - (\omega-\Delta\omega)t]} \quad (1.63)$$

Que pode ser reescrita, após algumas manipulações algébricas por como:

$$E = 2E_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(z\Delta k - t\Delta\omega) \quad (1.64)$$

Se analisarmos o produto das duas funções em (1.64), podemos interpretar como sendo uma onda cuja descrita por  $2E_0 e^{i(kz - \omega t)}$  com um envelope de modulação  $\cos(z\Delta k - t\Delta\omega)$ .

Perceba que o envelope de modulação possui uma “velocidade de fase” diferente das ondas individuais. Esse envelope não trafega a uma taxa de

$$\frac{\omega}{k}$$

mas, sim com uma velocidade de propagação chamada de *velocidade de grupo*. Denotaremos pelo símbolo  $v_g$ . Então,

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.65)$$

Desta forma, podemos associar com o índice de refração do meio através da definição (1.49), como

$$\omega = \frac{kc}{n} \quad (1.66)$$

temos,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{kc}{n} \right) = v \left( 1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (1.67)$$

Quando propagamos luz em diversos meios ópticos percebe-se que o índice de refração cresce com o crescimento da frequência, ou com o número de onda, nesses casos  $\frac{dn}{dk} > 0$ . Através de (1.66) é fácil observar que nessas circunstâncias a velocidade de grupo é menor que a velocidade de fase. Em medidas da velocidade da luz deve-se levar em conta a correção devido a diferença entre a velocidade de grupo e velocidade de fase.

## 1.7 Polarização da luz e susceptibilidade elétrica

Para entendermos a polarização da luz, iremos considerar um pulso de luz interagindo com um determinado meio. Como sabemos, o campo elétrico associado a este pulso irá modificar algumas propriedades deste meio em questão devido a resposta que ocorrerá devido ao campo incidente. O meio possui dois tipos de carga: positivas e negativas. Sendo assim, o campo incidente causará uma reorganização das moléculas dentro do meio. Cargas positivas se posicionarão a favor da direção do

campo e negativas na direção inversa. Nessas condições, as cargas se moverão em pares resultando em diversos pequenos dipolos elétricos induzidos causando um efeito de polarização no meio em que o campo elétrico é aplicado.

Uma onda eletromagnética é composta por campos elétricos e magnéticos que variam em frequências ópticas ( $\approx 10^{13}$ - $10^{17}$ ). Para descrever o movimento oscilatório dos elétrons dentro do nosso meio devido a uma onda eletromagnética, iremos considerar o caso em que os dipolos induzidos estão todos orientados na direção do campo. Para isso, utilizaremos a equação do oscilador harmônico em 1-D:

$$m \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial x}{\partial t} - \Omega^2 x - (\xi^{(2)} x^2 + \xi^{(3)} x^3 + \dots) \right] = -eE(t) \quad (1.68)$$

Onde:  $x$  é o deslocamento da posição média,  $\Omega$  é a frequência de ressonância (ou natural), e  $\kappa$  é uma constante de amortecimento. O termo  $-eE(t)$  representa a força exercida no elétron pelo campo elétrico externo.

Nesse momento, podemos perceber a existência de termos não lineares na eq. (1.68). Quando a intensidade do campo externo é suficientemente grande, isto é, quando o deslocamento dos dipolos em relação a posição média é grande e o movimento desencadeado é não harmônico, alguns efeitos interessantes podem surgir. Em óptica essa linha de estudos é conhecida como *óptica não linear*. Se desprezarmos esses termos, considerando que o campo é da forma (1.53), podemos encontrar que:

$$x = \frac{-eE_0}{2m} \frac{e^{-i\omega t}}{\Omega^2 - 2i\kappa - \omega^2} + c.c. \quad (1.69)$$

onde: c.c. representa o termo conjugado complexo.

Se existirem  $N$  dipolos elétricos por unidade de volume, sabemos que a polarização induzida é dada por:  $P = -Nex$ , assim podemos escrever que a polarização **linear** em termos da susceptibilidade  $\chi$  é:



$$P = \frac{1}{2}\epsilon_0\chi E_0 e^{-i\omega t} + c.c. \quad (1.70)$$

e conseqüentemente, por definição:

$$\chi = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\Omega^2 - 2i\kappa\omega - \omega^2} \quad (1.71)$$

Quando os termos não lineares são levados em conta, surgem o que chamamos de *susceptibilidades não lineares* do meio. Nesse caso, a polarização será dada por:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \right) \quad (1.72)$$

Onde:  $\epsilon_0$  representa a permissividade no vácuo, e  $\chi^{(i)}$  é um tensor de ordem (i+1) representando a susceptibilidade elétrica de i-ésima ordem. Visualizando a eq. (1.72) é importante que em analogia a física molecular, o primeiro termo do lado direito da equação está relacionada com a aproximação de um fóton, o segundo termo a aproximação de dois fótons e assim por diante.

No que se diz respeito ao termo da polarização não linear induzida, iremos considerar apenas o termo de terceira ordem. De fato, nas fibras ópticas percebemos que devido a sua simetria em relação ao centro, em outras palavras, devido a simetria de inversão espacial molecular [3], e portanto  $P_{NL}^{(2)} = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}^{(2)} &= \epsilon_0 \chi^{(2)} : (\mathbf{E})(\mathbf{E}) \\ -\mathbf{P}_{NL}^{(2)} &= \epsilon_0 \chi^{(2)} : (-\mathbf{E})(-\mathbf{E}) \\ \mathbf{P}_{NL}^{(2)} &= -\mathbf{P}_{NL}^{(2)} \\ \mathbf{P}_{NL}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Pela mesma razão, todos os termos pares da polarização não exercem contribuição no cálculo total ( $P_{NL}^{(2n)} = 0$ ). Desta forma, o termo não linear da polarização de ordem mais baixa que nos resta, é o de terceiro ordem. Quando a frequência óptica é próxima a frequência de ressonância do meio, podemos utilizar a eq. (1.72). Quando isto não acontecer, como as componentes linear e não linear da polarização estão relacionadas com o campo elétrico, assumindo que a resposta do meio é local, ou seja, a polarização de um determinado ponto depende apenas do campo elétrico atuante naquele determinado ponto, podemos escrever as contribuições da polarização da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \\ \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \\ &\quad \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned} \quad (1.74)$$

É conveniente classificar os fenômenos não lineares de acordo com o grau da susceptibilidade. De agora em diante, vamos considerar os termos  $\mathbf{P}_{NL}$  como uma pequena perturbação na polarização total induzida, visto que em fibras de sílica, estas contribuições são relativamente fracas.

## 1.8 Dispersão Cromática

A resposta de um meio dielétrico referente a uma onda eletromagnética incidente, em geral depende da frequência  $\omega$ . Essa característica mencionada nas seções anteriores, é conhecida como *dispersão cromática*, e pode ser analisada a partir da dependência do índice com  $\omega$ , isto é,  $n(\omega)$ . Analisando a estrutura da matéria, a dispersão cromática está relacionada com as frequências ressonantes características que o meio absorve da luz através das oscilações dos elétrons ligados. Se as frequências em questão estiverem muito distantes das frequências ressonantes  $\omega$ , o índice de refração pode ser calculado utilizando a expressão de Sellmeier [4]:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (1.75)$$

onde,  $\omega_j$  é a frequência ressonante do meio e  $B_j$  representa o peso da  $j$ -ésima frequência ressonante. A soma nos “ $m$ ” índices abrange todas as frequências ressonantes do meio dentro das faixas de frequências levadas em conta. Os parâmetros  $B_j$  e  $\omega_j$  são obtidos experimentalmente através das curvas da medida de dispersão, para fibras ópticas utiliza-se em geral  $m = 3$ .

Nas fibras ópticas, a dispersão possui uma função fundamental devido às diferentes componentes espectrais do pulso propagante. Uma vez que para diferentes frequências o pulso viaja a velocidades diferentes, de acordo com (1.49).

No regime não linear, a coexistência dos efeitos de dispersão e da não-linearidade do meio podem ocasionar em alguns fenômenos interessantes. Para levarmos em conta os efeitos da dispersão numa fibra, devemos expandir o número de onda,  $k$ , em séries de Taylor em torno da frequência  $\omega_0$ , (1.66):

$$k(\omega) = \beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.76)$$

onde:

$$\beta_m = \left( \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Note que mudamos a notação de  $k$  para  $\beta$ , pois, nos capítulos posteriores quando deduzirmos a equação não-linear de Schrödinger utilizaremos esta notação.

Assim, consideraremos a expansão (1.76) até segunda ordem. Calculando os coeficientes  $\beta_1$  e  $\beta_2$ :

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \quad (1.77)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right) \quad (1.78)$$

Por outro lado de (1.66),

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} \quad (1.79)$$

onde:  $n_g$  e  $v_g$  representam respectivamente, o índice de refração de grupo e  $v_g$  e a velocidade de grupo. Fisicamente, podemos dizer que o pulso trafega com uma velocidade de grupo  $v_g$  e esta velocidade de grupo sofre dispersão (caracterizado por  $\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega}$ ) e portanto é responsável pelo alargamento do pulso. Essa alteração na forma do pulso durante a propagação dentro de uma fibra óptica é conhecido como *dispersão da velocidade de grupo*. Para fibras de sílica, verifica-se experimentalmente que, para  $\lambda_D = 1.31 \mu\text{m}$ , o parâmetro  $\beta_2 \approx 0$  e portanto esse comprimento de onda  $\lambda_D$  é conhecido como *comprimento de onda de dispersão zero*. Para estudarmos os efeitos não lineares em pulso propagantes no regime  $\lambda = \lambda_D$  é necessário que termos de mais alta ordem na expressão (1.76) sejam considerados. Neste trabalho, além do regime de dispersão zero, levaremos em consideração também, dois regimes conhecidos. O regime de dispersão normal, em que  $\beta_2 > 0 \rightarrow \lambda < \lambda_D$ , onde as frequências mais altas se propagam com velocidade mais alta do que as outras componentes, e o regime de dispersão anômala,  $\beta_2 < 0 \rightarrow \lambda > \lambda_D$ , em que a situação inversa ocorre. Apenas nesse último caso, para um pulso propagante em meios respondendo instantaneamente, é possível a formação de sólitons devido a coexistência da dispersão com os efeitos não lineares. Se considerarmos dois pulsos com comprimentos de onda diferentes, ou seja,  $\beta_{11} \neq \beta_{12}$ , o parâmetro  $\delta$  é dado por:

$$\delta = |\beta_{11}(\omega_1) - \beta_{12}(\omega_2)| = |v_g^{-1}(\omega_1) - v_g^{-1}(\omega_2)| \quad (1.80)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  correspondem as frequências centrais de cada pulso. Para  $\delta \neq 0$  desempenha um papel importante nos efeitos não lineares relacionados com modulação de fase cruzada.

## 1.9 Equação não linear de Schrödinger

Para estudarmos a dinâmica de propagação de pulsos ópticos em uma fibra, utilizamos a equação não linear de Schrödinger (ENLS). Essa equação pode ser obtida a partir da manipulação das equações (1.47) e (1.72). Porém, antes de deduzirmos uma equação não-linear para o tratamento desses pulsos, precisamos realizar algumas aproximações. Primeiramente, o termo não linear da polarização  $\mathbf{P}_{NL}$  é muito pequeno em relação a  $\mathbf{P}_L$ . Na prática, as mudanças no índice de refração devido aos efeitos não lineares se apresentam da ordem de  $10^{-6}$  [5]. Como no tratamento de propagação de pulsos em fibras trabalhamos com grandes distâncias, essa contribuição não linear aparentemente pequena se torna significativa devido aos efeitos cumulativos durante a propagação.

Vamos considerar que o campo óptico é quasi monocromático com frequência central  $\omega_0$ , o que significa que a largura espectral  $\Delta\omega$  obedece a relação  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ . Utilizando a aproximação do envelope lentamente variável, podemos escrever o campo como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [E(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.81)$$

onde:  $\hat{\mathbf{x}}$  é um vetor unitário representando a direção da polarização,  $E(\mathbf{r}, t)$  representa a amplitude do campo óptico lentamente variável (em relação ao período óptico) e c.c. o complexo conjugado.

Extendendo esta aproximação para as componentes da polarização,

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [P_L(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.82)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [P_{NL}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.83)$$

A princípio, consideraremos que não há atraso na resposta do sistema. Desta maneira, estaremos desprezando as contribuições vibracionais da rede à susceptibilidade não linear (entretanto, tanto os elétrons quanto o núcleo sofrem um pequeno atraso para responder a ação do campo). Para fibras de sílica, a resposta Raman (utilizando valores típicos de origem vibracional), ocorre em uma

escala de tempo de 60-70 fs [5]. Para levarmos em conta os efeitos de uma resposta instantânea, basta incluímos em (1.74) o termo  $\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3)$ , retirando assim a dependência em  $t_1, t_2$  e  $t_3$  da susceptibilidade não linear. Para a resposta local no espaço e no tempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \\ &\times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3)\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3)dt_1dt_2dt_3 \end{aligned} \quad (1.84)$$

e portanto,

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)}(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.85)$$

Calculando os produtos dos campos elétricos, podemos encontrar que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [E(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + E^*(\mathbf{r}, t)e^{i\omega_0 t}] \quad (1.86)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} [E^2 e^{-i(2\omega_0)t} + E^{*2} e^{i(2\omega_0)t} + 2|E|^2] \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} \right) [E^3 e^{-i(3\omega_0)t} + E^{*3} e^{i(3\omega_0)t} + 3|E|^2 (E e^{-i\omega_0 t} + E^* e^{i\omega_0 t})] \\ &\quad (1.88) \end{aligned}$$

Facilmente percebemos que os termos  $e^{i(3\omega_0)t}$  correspondem ao fenômeno da geração do terceiro harmônico. Esses termos são desprezíveis no cálculo da polarização induzida, devido a diferença de fase entre as frequências  $\omega_0$  e  $3\omega_0$ . Isto é, para considerarmos esses termos no estudo de fibras ópticas é necessário que haja casamento entre as fases. Logo, a polarização será dada por:

$$P_{NL} \approx \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)} |E|^2}{4} \left( \frac{1}{2} \right) [E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}] \quad (1.89)$$

ou ainda,

$$P_{NL} \approx \epsilon_0 \epsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t) \quad (1.90)$$

onde:

$$\epsilon_{NL} = \frac{3\epsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)}}{4} |E(\mathbf{r}, t)|^2$$

representa a contribuição não linear da permissividade elétrica.

Para obtermos a equação de onda para  $E(\mathbf{r}, t)$  no regime da aproximação do envelope lentamente variável é mais usual trabalharmos no domínio das frequências. Para isso, consideraremos que o termo  $\epsilon_{NL}$  que é não linear, seja tratado como uma constante durante o desenvolvimento da equação em questão. Sendo assim, vamos substituir (1.90) em (1.47):

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(1)} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{NL} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.91)$$

Ainda no domínio do tempo. Por definição:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (1.92)$$

Desta maneira, através de substituição direta de (1.92) em (1.91), podemos obter a conhecida *equação de Helmholtz*:

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \therefore \epsilon(\omega) \equiv 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL} \quad (1.93)$$

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \therefore k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.94)$$

onde:

$$\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

Em geral, a susceptibilidade de primeira ordem  $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$  é complexa, e conseqüentemente,  $\epsilon(\omega)$  geralmente, também é. Assim, podemos separá-lo em duas partes, a real e a imaginária. Vamos definir, o índice de refração  $\tilde{n}$  e o coeficiente de absorção  $\tilde{\alpha}$ :

$$\tilde{n} = n + n_2|E|^2 \quad (1.95)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|E|^2 \quad (1.96)$$

Para determinar o índice de refração não linear e o coeficiente de absorção não linear, utilizaremos a seguinte relação:

$$\epsilon(\omega) = \left( \tilde{n} + i \frac{\tilde{\alpha}c}{\omega} \right)^2 \quad (1.97)$$

E portanto, temos as seguintes relações para os índices de refração e coeficientes de absorção linear e não linear:

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \Re e \left( \chi_{xx}^{(1)}(\omega) \right) \quad (1.98)$$

$$n_2 = \frac{3}{8n} \Re e \left( \chi_{xxxx}^{(3)} \right) \quad (1.99)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \Im m \left( \chi_{xx}^{(1)}(\omega) \right) \quad (1.100)$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_0}{nc} \Im m \left( \chi_{xxxx}^{(3)} \right) \quad (1.101)$$

Note que, os parâmetros não lineares descritos acima  $n_2$  e  $\alpha_2$  devem ser enfatizados aqui. Em fibras ópticas de sílica,  $\alpha_2$  é relativamente pequeno, e portanto deve ser ignorado, e quanto a o índice de refração não linear  $n_2$  é uma medida da não linearidade do meio em questão, no nosso caso, a fibra óptica.

Para resolvermos a eq. (1.93) podemos utilizar o método de separação de variáveis. Admita que a solução pode ser escrita da seguinte forma:



$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} \quad (1.102)$$

onde,  $F(x, y)$  é uma função de distribuição modal,  $\tilde{A}(z, \omega)$  é uma função que varia lentamente em função de  $z$  e  $\beta_0$  representa o número de onda. Como  $\tilde{A}(z, \omega)$  varia lentamente em relação a  $z$ , assumimos que  $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \ll \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}$ . Substituindo (1.102) em (1.93), temos:

$$\begin{aligned} & (\nabla^2 + \epsilon(\omega)k_0^2) F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} = 0, \\ & \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] + \\ & F(x, y) e^{i\beta_0 z} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right] \\ & + \epsilon(\omega)k_0^2 F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} = 0 \end{aligned} \quad (1.103)$$

portanto,

$$\frac{1}{F} \left( \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) + \frac{2i\beta_0}{\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \epsilon(\omega)k_0^2 - \beta_0^2 = 0 \quad (1.104)$$

e assim,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[ \epsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2 \right] F = 0, \quad (1.105)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0 \quad (1.106)$$

A função dielétrica  $\epsilon(\omega)$  pode ser aproximada por:

$$\epsilon(\omega) = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n \quad (1.107)$$

De modo que,  $\Delta n$  é uma pequena perturbação onde, a não linearidade da fibra está inserida,

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \quad (1.108)$$

Através da teoria de perturbação de primeira ordem [6], podemos resolver a eq. (1.105). Como a distribuição modal (para teoria de perturbação de primeira ordem) não se modifica por  $\Delta n$ , podemos aproximar  $\epsilon(\omega) \approx n^2$ , portanto, o autovalor  $\tilde{\beta}$  é calculado por:

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (1.109)$$

Normalizado por,

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (1.110)$$

A partir da aproximação,  $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2$  por  $(\tilde{\beta} + \beta_0)(\tilde{\beta} - \beta_0) \approx 2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ , A transformada de Fourier de  $A(z, t)$ , satisfaz a eq. (1.105), e pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i [\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0] \tilde{A} \quad (1.111)$$

Analisando a equação acima fisicamente, podemos perceber que cada componente espectral no domínio de Fourier da onda propagante no interior da fibra adquire uma diferença de fase cujo sua magnitude depende da intensidade e da frequência, simultaneamente. Mais uma vez, iremos expandir  $\beta(\omega)$  em séries de Taylor, como em (1.76). Considerando ainda que o campo é quasi monocromático, desconsideraremos os termos de ordem mais alta. Substituindo até ordem 2, temos:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[ (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2\beta_2}{2!} + \Delta\beta \right] \tilde{A}(\omega) \quad (1.112)$$

E podemos também extrair a transformada de Fourier inversa, como os campos são harmônicos por hipótese, ou seja,  $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i(\omega - \omega_0)$ , obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A \quad (1.113)$$

A partir da definição de  $\Delta n$  (1.108) e  $|E|^2 = |F(x, y)|^2 |A|^2$  podemos substituir em (1.110), obtendo

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (1.114)$$

$$\Delta\beta = \frac{k_0 n_2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} |E|^2 |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} + \frac{i\alpha \int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}{2 \int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (1.115)$$

$$\Delta\beta = \frac{n_2 \omega_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 |F(x, y)|^4 dx dy}{c \int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} + \frac{i\alpha}{2} \quad (1.116)$$

$$\Delta\beta = \gamma |A|^2 + \frac{i\alpha}{2} \quad (1.117)$$

onde, definimos o parâmetro não linear  $\gamma$  como:

$$\gamma \equiv \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{efetiva}}} \therefore A_{\text{efetiva}} = \frac{\left( \int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (1.118)$$

Substituindo os resultados encontrados (1.114) em (1.113), obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (1.119)$$

Fisicamente, esta é a equação não linear de Schrödinger (ENLS) para pulsos ultra curtos que descreve a dinâmica da propagação de um pulso dentro de uma fibra óptica. Porém, percebe-se que a existência dos termos  $\beta_1(v_g)$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha$  corresponde aos efeitos de perdas, e dispersão cromática, da velocidade de grupo e efeitos não lineares incorporados pelo parâmetro  $\gamma$ . Podemos ainda, manipular essa equação um pouco mais. Para isso, definiremos uma nova variável para o tempo  $T$ , sugerindo que o sistema referencial retardado em um referencial que se move com o pulso na velocidade de grupo. A substituição realizada será:

$$\begin{aligned} Z &= az + bt \\ T &= cz + dt \end{aligned} \quad (1.120)$$

onde:  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -\beta_1$  e  $d = 1$ .

Desta maneira, calculamos as seguintes quantidades:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.121)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.122)$$

Logo,

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial T} \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (1.124)$$

desta forma,

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (1.125)$$

No caso em que o comprimento de onda do pulso  $\lambda \approx \lambda_D$ , na equação que descreve sua

dinâmica da propagação numa fibra, devemos considerar a expansão de Taylor para  $\beta$  (1.76) até a quarta ordem. Nestas condições, a eq. (1.125), pode ser escrita utilizando os termos até  $\beta_4$  obtendo assim, a eq. não linear *extendida* de Schrödinger:

$$i\frac{\partial A}{\partial Z} = -\frac{i\alpha}{2}A + \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - \frac{\beta_4}{24}\frac{\partial^4 A}{\partial t^4} - \gamma|A|^2A \quad (1.126)$$

Em ambas equações estão incorporadas os efeitos não lineares, dispersivos e de perdas em fibras. Para realizarmos nossos estudos, algumas aproximações serão necessárias. Nos capítulos posteriores, explanaremos sobre tais aproximações e sobre os resultados obtidos.

## 1.10 Óptica não linear

Sabemos que um campo elétrico externo induz uma polarização no meio em que ele incide. Sabemos também que esta polarização é decorrente de pequenos dipolos elétricos induzidos pelos átomos que constituem o meio, e que estes dipolos vibram em pequenas oscilações, definindo assim a polarização linear induzida por um campo elétrico externo em um meio dielétrico.

Porém, quando o campo incidente é muito intenso, estas oscilações não se apresentam de forma harmônica e os termos não lineares que surgem na eq. (1.68) não podem ser desconsiderados.

Rapidamente, nós podemos realizar uma breve explanação acerca de alguns fenômenos não lineares que podem ocorrer. Primeiramente, consideremos quão grande um campo óptico incidente deve ser para permitir que os átomos e moléculas manifestem suas propriedades não lineares. Para que tais propriedades possam se manifestar é necessário que o campo óptico incidente não possa ser desprezado em relação ao campo interno de tais átomos, esse campo usualmente é da ordem de  $E_{\text{interno}} \sim 3 \cdot 10^{10}$  V/m. Para obter-se um campo óptico de tal magnitude é necessário um campo incidente da ordem de  $\sim 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup> [7]. Tais campos podem ser produzidos através da focalização de pulsos de picosegundos obtidos com lasers específicos. Ainda, existe uma outra maneira de permitir a manifestação de fenômenos não lineares, sem a necessidade da produção de campos incidentes de tais potências elevadas. Quando os dipolos induzidos oscilam coerentemente dizemos

que existe o casamento de fase. Quando a radiação emitida por cada dipolo individualmente se adicionam e interagem construtivamente, eles produzem a intensidade necessária para tal. Continuando com o nosso formalismo para apresentação de fenômenos ópticos não lineares, vemos que a polarização induzida no meio será dada por uma parte linear e outra parte não linear. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_{\text{LINEAR}} + \mathbf{P}_{\text{NÃO LINEAR}} \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \epsilon_0 (\chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots) \end{aligned} \quad (1.127)$$

Como já foi mostrado, no caso das fibras ópticas de sílica, o primeiro termo não linear contribuinte no surgimento dos fenômenos não lineares é o termo de terceira ordem, devido a simetria de inversão espacial a nível molecular.

## 1.11 Geração de novas frequências devido a $\chi^{(3)}$

A partir de (1.127) podemos calcular a contribuição não linear de terceira ordem,  $P_{\text{NL}}^{(3)}$ , fazendo o produto triplo de  $\mathbf{E}$ . Desta maneira, podemos explicitar quais novas frequências podem surgir de um campo elétrico interagindo com ele mesmo, devido ao termo não linear de terceira ordem. Conforme mostrado na eq. (1.86), percebe-se que é encontrado algumas frequências extras e a frequência associada ao terceiro harmônico  $3\omega$ .

## 1.12 Efeito Kerr óptico

Por definição, o efeito Kerr consiste basicamente na mudança do índice de refração de um material em resposta à intensidade do campo elétrico. Em algumas ocasiões este campo elétrico possui origem eletromagnética, e nesses casos o efeito Kerr é dito óptico. Nestas circunstâncias, o índice de refração adquire uma variação com a intensidade do campo, de acordo com a seguinte equação:

$$\Delta n \propto |E|^2 \quad (1.128)$$

$$\Delta n = n_2 |E|^2 \quad (1.129)$$

onde:  $n_2$  representa o índice de refração não-linear e  $|E|^2$ , representa a intensidade do pulso. Em efeito, o termo de polarização cúbica  $P_{\text{NL}}^{(3)} = \epsilon_0 \chi^{(3)} E |E|^2$ . Comparando com o termo linear, matematicamente, equivale a substituição  $\chi^{(1)} \Rightarrow \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |E|^2$ , mostrando assim explicitamente a sua dependência com a intensidade  $|E|^2$ .

A origem física do efeito Kerr é uma polarização não-linear gerada no meio que modifica as propriedades de propagação da luz quando esta é emitida em altas potências. O efeito Kerr eletrônico decorrente de uma resposta não-linear rápida é usualmente descrito por uma correção instantânea do índice de refração, de acordo com a equação (1.128).

## 1.13 Efeito Raman

Quando um campo elétrico incide em um meio óptico, sua resposta não linear nuclear é mais lenta do que no caso eletrônico. Assim, podemos dizer que a resposta é “atrasada” e este retardo está associado aos aspectos vibracionais da rede. Este tipo de fenômeno de espalhamento inelástico da luz é conhecido como *efeito Raman*.

Em suma, podemos classificar este fenômeno em dois tipos. Em um caso A, em que o fóton incidente possui energia **maior** do que a energia natural das vibrações das moléculas da rede. Ou em um caso B, que o fóton possui energia **menor** do que as das moléculas da rede devido suas oscilações.

No espalhamento Raman, a energia do fóton obedece a seguinte relação,

$$E_{\text{fóton}} \gg E_1$$

De modo que a molécula atinge um estado com energia mais elevada do que  $E_1$ . Porém, tais estados são instáveis e a molécula retorna rapidamente a um de seus estados de energia mais baixa.

Considere o caso em que a molécula retorna ao estado com energia  $E_1$ . Para que isso aconteça, a molécula emite um fóton com energia  $(E_{fóton} - E_1)$ . A direção do fóton re-emitido não é necessariamente a mesma direção inicial, e o fóton foi então espalhado.

Imagine a situação inversa. Seja uma molécula vibrando com energia  $E_1$  e um fóton incide sobre ela. Essa molécula irá adquirir uma energia mais alta, dada por:

$$E_{fóton} + E_1$$

Como já mencionamos, esse é um estado instável da molécula. E como esta molécula retorna ao estado fundamental com energia  $E_0$ , o fóton emitido pela molécula possui energia  $E_{fóton} + E_1$  que é maior que sua energia inicial ( $E_{fóton}$ ). Este processo espalhou desta maneira, um fóton com energia maior do que a sua energia inicial. Concluimos então que o processo Raman é capaz de produzir fótons com maior ou menor energia que o fóton incidente, dependendo de quais casos estivermos lidando. Quando o fóton incidente fornecer energia para a molécula gerando vibrações, temos o **Processo Stokes**. Quando a molécula ceder energia ao fóton, temos o **Processo Anti-Stokes**.

No processo de espalhamento Raman espontâneo é praticamente impossível visualizarmos a ocorrência do Processo Stokes. Diferentemente do espalhamento Raman estimulado que é possível, sem maiores problemas, a verificação de ambos os processos.

## 1.14 Automodulação de fase

Como vimos, a susceptibilidade de terceira ordem,  $\chi^{(3)}$ , é responsável por diversos fenômenos não-lineares. Porém, em pulsos de alta intensidade a ocorrência do efeito Kerr e sua mudança no índice de refração são levadas em conta. Esta mudança é responsável por um “shift” na fase. Este efeito é conhecido como *automodulação de fase*. Chamando (1.95),

$$\tilde{n} = n + n_2|E(t)|^2 \quad (1.130)$$

onde,  $n$  representa o termo linear do índice de refração e  $n_2$  representa o termo não-linear do



índice de refração. Além do mais, lembrando que:

$$n_2 = \frac{3}{8n} \Re(\chi_{xxxx}^{(3)})$$

Utilizando algumas definições básicas, podemos visualizar matematicamente a influência do efeito Kerr óptico e portanto, o surgimento da automodulação de fase:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{onde: } \lambda = \frac{c}{\tilde{n}f} \\ k &= \frac{2\pi\tilde{n}f}{c} \\ k &= \frac{\omega\tilde{n}}{c} \\ k &= \frac{\omega(n + n_2|E(t)|^2)}{c} \end{aligned} \tag{1.131}$$

Analisando a eq. (1.131), percebemos a influência do índice de refração  $\tilde{n}$  na fase do pulso, uma vez que a mesma obedece a relação:

$$\phi(t) = \omega t - kz \Rightarrow \phi(t) = \omega t - \frac{\omega(n + n_2|E(t)|^2)}{c}z \tag{1.132}$$

Devido a dependência  $\phi(z, t)$ , ocorrerá para pulsos curtos de alta intensidade, uma variação na fase da onda  $\phi(z, t)$  devido ao efeito Kerr óptico. Podemos verificar, que a variação temporal instantânea da fase do pulso,  $\tilde{\delta}\phi$ , pode ser calculada através da equação:

$$\tilde{\delta}\phi(z, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Temos então,

$$\tilde{\delta}\phi(z, t) = \omega - \frac{\omega z}{c}n_2 \frac{\partial(|E(t)|^2)}{\partial t} \tag{1.133}$$

Fisicamente a eq. (1.133), nos informa que devido a existência do efeito Kerr, uma mudança de fase devido a variação do campo incidente  $|E(t)|^2$  pode ocorrer. Esse fenômeno é conhecido como auto-modulação de fase.

## 1.15 Modulação de fase cruzada

Embora nesta tese só consideremos um campo óptico dentro de um meio, vamos assumir o caso em que dois campos ópticos com diferentes comprimentos de onda sejam copropagantes em um determinado meio. É possível que não haja transferência de energia entre os pulsos, e os campos possam acoplar-se entre si. Vale salientar também que os dois campos ópticos, podem diferir não apenas em seus comprimentos de onda, mas também no seu estado de polarização. Este fenômeno é conhecido como *modulação de fase cruzada*.

A modulação cruzada ocorre devido ao fato que o índice de refração não linear efetivo do pulso se dá não só devido a intensidade do campo em questão, mas, também devido a intensidade do outro pulso copropagante.

Este fenômeno não será explanado neste trabalho, mas, faz parte das nossas propostas e perspectivas de trabalhos futuros.

## 1.16 Instabilidade Modulacional

Neste trabalho iremos estudar as características da amplificação de um ruído durante a propagação de um pulso em uma fibra óptica. Em determinadas condições, ao adicionarmos uma pequena perturbação na amplitude do campo, ou em sua fase é possível que esta perturbação/ruído se amplifique prejudicando a performance do sistema. Tal efeito conhecido como Instabilidade Modulacional foi proposto teoricamente por Hasegawa *et al* (1973) [8] e [9], e verificada experimentalmente pelo mesmo em (1986) [10].

Quando tratamos com os efeitos da automodulação de fase é importante salientar que só são válidos para pulsos relativamente longos ( $T_0 > 100\text{ps}$ ), onde o comprimento de dispersão obedeça

as relações:  $L_D \gg L$  e  $L_D \gg L_{NL}$

Quando tratamos com pulsos um pouco mais curtos os efeitos da dispersão da velocidade de grupo e da automodulação de fase coexistem. Nesse regime, a interação dos efeitos não lineares com os efeitos dispersivos aumentam as possibilidades de fenômenos ópticos. Entre eles, um fenômeno muito importante que é o surgimento de *sólitons ópticos* no regime de dispersão anômala,  $\beta_2 < 0$  como veremos em breve. Já no caso em que  $\beta_2 > 0$ , pode ocorrer a compressão do pulso propagante [5].

Assim, em alguns sistemas ópticos não lineares surgem bandas de instabilidade que resultam na modulação de uma solução estacionária como consequência da coexistência dos efeitos não lineares e dispersivos. Este fenômeno é conhecida como *instabilidade modulacional* atualmente bastante estudado devido a sua enorme gama de aplicações [11]-[39].

Como sabemos, a amplitude do ruído cresce exponencialmente quando o pulso se propaga no meio, até ocorrer a saturação no sistema. Neste momento, a radiação contínua se “quebra” em um trem de pulsos de sólitons ultracurtos. Como a instabilidade inicia-se da perturbação superposta na radiação CW<sup>3</sup>, o procedimento teórico utilizado consiste na análise da estabilidade linear da solução estacionária da equação não-linear de Schrödinger.

A partir de agora, analisaremos em detalhes o problema da instabilidade modulacional (IM). Estudaremos inicialmente o caso mais geral, considerando a equação não-linear generalizada de Schrödinger, e calcularemos o espectro de ganho da IM. Após isso, iremos inserir na natureza do pulso incidente o caráter estocástico no campo, modelando nosso problema com maior coerência ao que acontece na natureza. Após a inserção da estatística no campo óptico, iremos analisar como o atraso na resposta do meio devido ao efeito Raman de origem vibracional atua nas propriedades estatística de segunda ordem em diferentes regimes de dispersão (normal, anômalo e zero).

### 1.16.1 Solução estacionária

Para obtermos o espectro de ganho da instabilidade modulacional realizaremos o estudo da solução do estado estacionário da eq. (1.125), e apenas por motivos de notação, iremos substituir o

<sup>3</sup>Alguns lasers emitem a potência de uma determinada onda com uma determinada taxa constante com picos de mesma altura e potência média. Mais especificamente, estas ondas se propagam em uma única direção e com apenas uma frequência estabelecida. Ondas emitidas com essas características são chamadas de *ondas contínuas (CW)*.

a função  $A(z, t)$  por  $E(z, t)$ :

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = -\frac{i\alpha}{2} E(z, t) + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial T^2} - \gamma |E(z, t)|^2 E(z, t) \quad (1.134)$$

Na propagação de pulsos em fibras ópticas, desconsideraremos as perdas das fibras, matematicamente fazendo  $\alpha \approx 0$ , assim, a eq. (1.134) se reescreve como:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial T^2} - \gamma |E(z, t)|^2 E(z, t) \quad (1.135)$$

Esta equação é conhecida na literatura como *equação de Schrödinger em um sóliton*<sup>4</sup>.

Devemos analisar a estabilidade linear da solução CW da equação acima e, com isso, encontrar analiticamente uma expressão para a relação de dispersão para as perturbações harmônicas. A partir desta relação de dispersão, iremos obter informações relevantes sobre o espectro de ganho devido à instabilidade modulacional.

No estado estacionário, isto é,

$$\frac{\partial E(z, t)}{\partial t} = 0,$$

vemos que esta solução é da forma:

$$E(z) = E_0 e^{iB_0 z} \Rightarrow \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = iB_0 E_0 e^{iB_0 z} \quad (1.136)$$

substituindo na eq. (1.135), temos:

$$-B_0 E_0 e^{iB_0 z} = -\gamma |E_0|^2 E_0 e^{iB_0 z} \Rightarrow B_0 = \gamma |E_0|^2 \quad (1.137)$$

E portanto, podemos reescrever a solução da seguinte forma:

---

<sup>4</sup>Geralmente devido a alguns efeitos e algumas propriedades dispersivas, a forma espectral de um pulso não se mantém inalterada. Conforme discutido anteriormente, a coexistência do efeito Kerr e da dispersão podem ser tais que se anulam contribuindo assim, para a propagação do pulso sem alteração em sua forma por longas distâncias.[8]-[21]

$$\begin{aligned}
E(z) &= E_0 e^{i\gamma|E_0|^2 z} \\
E(z) &= E_0 e^{i\bar{\phi}_{\text{NL}} z} \quad \therefore \quad \bar{\phi}_{\text{NL}} = \gamma|E_0|^2
\end{aligned} \tag{1.138}$$

onde  $|E_0|^2$  é a potência incidente e  $\bar{\phi}_{\text{NL}} z$  é o shift da fase não-linear induzida pela auto-modulação de fase.

Agora, iremos adicionar na amplitude uma pequena perturbação de origem determinística  $e(z, t)$  a fim de encontrar uma solução geral para eq. (1.135). Dessa forma, a equação (1.138) se torna:

$$E(z, t) = (E_0 + e(z, t)) e^{i\bar{\phi}_{\text{NL}} z}, \quad \text{onde: } |e(z, t)| \ll E_0 \tag{1.139}$$

Basta substituímos (1.139) na eq. (1.135), e a partir deste ponto calcular as quantidades convenientes. Antes disso, para facilitar  $e(z, t) = e$ :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ i\bar{\phi}_{\text{NL}} (E_0 + e) + \frac{\partial e}{\partial z} \right] e^{i\bar{\phi}_{\text{NL}} z} \tag{1.140}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 e}{\partial T^2} e^{i\bar{\phi}_{\text{NL}} z} \tag{1.141}$$

$$A \cdot A^* = |A|^2 = |E_0|^2 + E_0(e + e^*) \tag{1.142}$$

Por substituição direta, obtemos a seguinte expressão,

$$i \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 e}{\partial T^2} - \gamma|E_0|^2 (e + e^*) \tag{1.143}$$

O surgimento dos termos  $e$  e  $e^*$  sugere o acoplamento entre as componentes de Fourier  $+\Omega$  e  $-\Omega$ . Essa equação pode ser facilmente resolvida no domínio das frequências através das transformadas de Fourier das perturbações. Por definição:

$$e(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int_{-\infty}^{+\infty} e(K, \Omega) e^{-iKz} e^{i\Omega t} dK d\Omega \quad (1.144)$$

$$e^*(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^*(-K, -\Omega) e^{-iKz} e^{i\Omega t} dK d\Omega \quad (1.145)$$

onde:  $K$  e  $\Omega$  correspondem, respectivamente, ao número de onda e frequência da modulação de  $e(z, t)$ . Considerando o complexo conjugado de ambos os lados de (1.143) e extraindo as transformadas de Fourier definidas acima, podemos obter o seguinte conjunto de equações:

$$Ke(K, \Omega) = -\frac{\beta_2 \Omega^2}{2} e(K, \Omega) - \gamma [e(K, \Omega) + e^*(-K, -\Omega)] |E_0|^2 \quad (1.146)$$

$$-Ke^*(-K, -\Omega) = -\frac{\beta_2 \Omega^2}{2} e^*(-K, -\Omega) - \gamma [e(K, \Omega) + e^*(-K, -\Omega)] |E_0|^2 \quad (1.147)$$

Rearrmando temos o seguinte sistema:

$$\left( K + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \gamma |E_0|^2 \right) e(K, \Omega) = -\gamma e^*(-K, -\Omega) |E_0|^2 \quad (1.148)$$

$$\left( -K + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \gamma |E_0|^2 \right) e^*(-K, -\Omega) = -\gamma e(K, \Omega) |E_0|^2 \quad (1.149)$$

Multiplicando entre si, os membros de cada equação, obtemos a condição para que o sistema admita solução não trivial:

$$\left( K + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \gamma |E_0|^2 \right) \times \left( -K + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \gamma |E_0|^2 \right) = \gamma^2 |E_0|^4 \quad (1.150)$$

E portanto, deduzimos analiticamente a relação de dispersão:

$$K^2 = \frac{\beta_2 \Omega^2}{4} \left( \Omega^2 + \frac{4\gamma |E_0|^2}{\beta_2} \right), \quad (1.151)$$

Definindo, a frequência crítica como

$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma |E_0|^2}{|\beta_2|} = \frac{4}{\beta_2 L_{\text{NL}}},$$

podemos reescrever (1.151),

$$K = \pm \frac{1}{2} |\beta_2 \Omega| \sqrt{\Omega^2 + \text{sgn}(\beta_2) \Omega_c^2} \quad (1.152)$$

A onda propagante possui número de onda e frequência iguais a  $\beta_0$  e  $\omega_0$ , respectivamente. De tal forma que, quando inserimos a perturbação esse número de onda e frequência se tornam, respectivamente,  $\beta_0 \pm K$  e  $\omega_0 \pm \Omega$ . Deste modo, vemos que duas bandas laterais no espectro do sinal irão surgir, quando a IM se faz presente, com componentes de frequências iguais a  $\omega_0 + \Omega$  e  $\omega_0 - \Omega$ . A relação de dispersão obtida (1.152) mostra que a instabilidade possui dois comportamentos diferentes em regimes distintos. Para  $\beta_2 > 0$ , no regime de dispersão normal,  $K \in \Re e$ , e por este motivo, corresponde a uma solução estável do estado estacionário. Porém, quando estivermos lidando no regime de dispersão anômala  $\beta_2 < 0$ ,  $K \in \Im m$  se  $|\Omega_c| < \Omega$ , e conseqüentemente  $e(z, t)$  cresce exponencialmente ao longo da fibra. Como veremos no decorrer desta tese, alguns efeitos tais como retardo na resposta não linear ou saturação influenciam a relação de dispersão, permitindo, em alguns casos, que haja a IM tanto no regime de dispersão normal quanto no de dispersão anômala.

## 1.16.2 Espectro de Ganho

Quando tratamos de IM é importante definir o ganho da IM. Como sabemos, em uma fibra óptica podemos estar operando em dois regimes: o regime dispersivo normal ou o regime dispersivo anômalo. Como vimos, a perturbação devido ao acoplamento entre as frequências  $+\Omega$  e  $-\Omega$  pode

ser escrita como,

$$e(z, t) = e_1 e^{i(Kz - \Omega t)} + e_2 e^{-i(Kz - \Omega t)} \quad (1.153)$$

Através da análise dos expoentes complexos de (1.153) percebemos que a parte real de  $K$  informa sobre a periodicidade da propagação da onda  $\frac{2\pi}{\Re\{K\}}$ , enquanto a parte imaginária de  $k$ , nos informa que durante a propagação a amplitude das perturbação cresce com a distância em que a onda se propaga dentro da fibra, de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{|e(z)|}{|e_0|} &= e^{g(\Omega)z} \\ \frac{|e(z)|}{|e_0|} &= \frac{e_1 e^{iKz} + e_2 e^{-iKz}}{e_1 + e_2} \approx e^{\Im\{K\}z} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Analisando do ponto de vista da intensidade das amplitudes das perturbações, temos que:

$$\frac{|e(z)|^2}{|e_0|^2} = (e^{g(\Omega)z})^2 \Rightarrow g(\Omega) = 2\Im\{K\} \quad (1.155)$$

Calculando o ganho de (1.152),

$$g(\Omega) = |\beta_2 \Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega} \quad \text{para: } |\Omega| < \Omega_c. \quad (1.156)$$

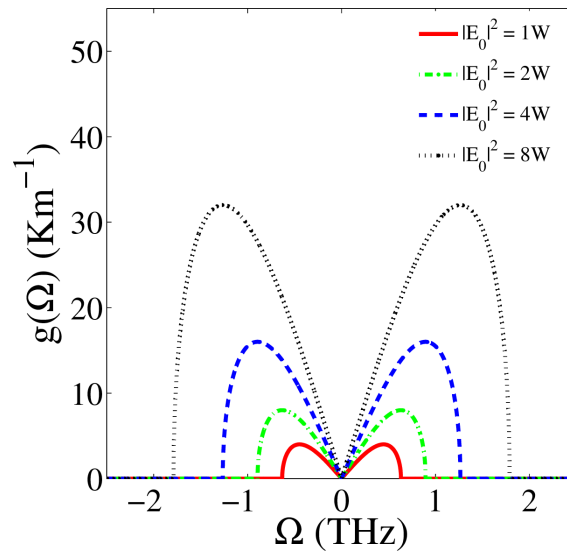
Para valores usuais em fibras de sílica com comprimentos de onda em torno de  $\lambda = 1,55 \mu m$  tem-se o espectro de ganho abaixo:

E, o ganho máximo é dado por:

$$g_{max} \equiv g(\Omega_{max}) = 2\gamma |E_0|^2 \therefore \Omega_{max} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}} = \pm \left( \frac{2\gamma |E_0|^2}{|\beta_2|} \right)^2 \quad (1.157)$$



Figura 1.13: Ganho da IM para diferentes valores de  $|E_0|^2$  em uma fibra com  $\beta_2 = -20\text{ps}^2/\text{km}$ ,  $\gamma = 2\text{W}^{-1}/\text{km}$



Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [5].

De acordo com a eq. (1.157), o ganho máximo da IM é independente de  $\beta_2$  e cresce linearmente com a potência incidente  $|E_0|^2$ .

## Capítulo 2

# Amplificação de ruído em um meio não linear dispersivo

### 2.1 Introdução

Podemos iniciar nossas discussões neste capítulo com a seguinte pergunta: Por quê estudar a aleatoriedade da luz?

Para responder esta pergunta, vamos salientar que a luz se propaga com flutuações imprevisíveis. Essas flutuações tem origem a partir da emissão de radiação dos inúmeros átomos que vibram independentemente superpondo estas emissões. Este caráter aleatório pode ser compreendido também como resultado do espalhamento da luz em superfícies irregulares, por exemplo, que causariam flutuações na radiação da frente de onda. A natureza estatística das interações da luz com a matéria implica que todas fontes ópticas possuem aspectos estocásticos intrínsecos [40]. Os estudos destas flutuações dão origem ao campo da física conhecido como **Teoria da Coerência Óptica**.

Podemos mencionar dois casos extremos em fenômenos ópticos para salientar a importância da inserção de aspectos estatísticos: De um lado, temos uma fonte térmica de radiação, por exemplo, uma lâmpada incandescente que emite luz caoticamente [41]. Por outro lado, podemos mencionar

um laser de um gás específico emitindo ordenadamente uma onda de radiação. Embora aparentemente sejam diferentes, ambas situações levam consigo aspectos estatísticos, uma vez que nenhum laser real emite luz sem propriedades estatísticas na sua amplitude e na sua fase.

Se considerarmos a propagação da luz, por exemplo, no vácuo, não levaremos em conta as características estatísticas da luz na interação com o vácuo. Porém, se considerarmos um meio diferente do vácuo, o caminho óptico sofrerá alterações. É baseada nessas alterações que as propriedades estatísticas são estudadas.

Neste capítulo desta tese iremos descrever alguns processos aleatórios desde cálculos envolvendo fasores aleatórios (descrevendo o modelo de difusão de fase), a descrição da coerência óptica de pulsos propagantes até a análise do espectro de frequências através do Teorema de Wiener-Khinchine.

## 2.2 Variáveis aleatórias com valores complexos

Como os aspectos fundamentais desta tese se concentram nas propriedades estocásticas da luz se faz necessária uma pequena atenção ao estudo das variáveis aleatórias complexas. Assim sendo, consideraremos nesta seção alguns aspectos importantes nesse contexto.

### 2.2.1 Fasores aleatórios

Considere um número grande de fasores<sup>1</sup> complexos, onde o  $j$ -ésimo fasor possui magnitude  $\frac{\alpha_j}{\sqrt{N}}$  e uma fase aleatória  $\phi_j$ . De modo que o fasor resultante é dado por

$$\mathbf{a} = ae^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{i\phi_j} \quad (2.1)$$

ou ainda,

---

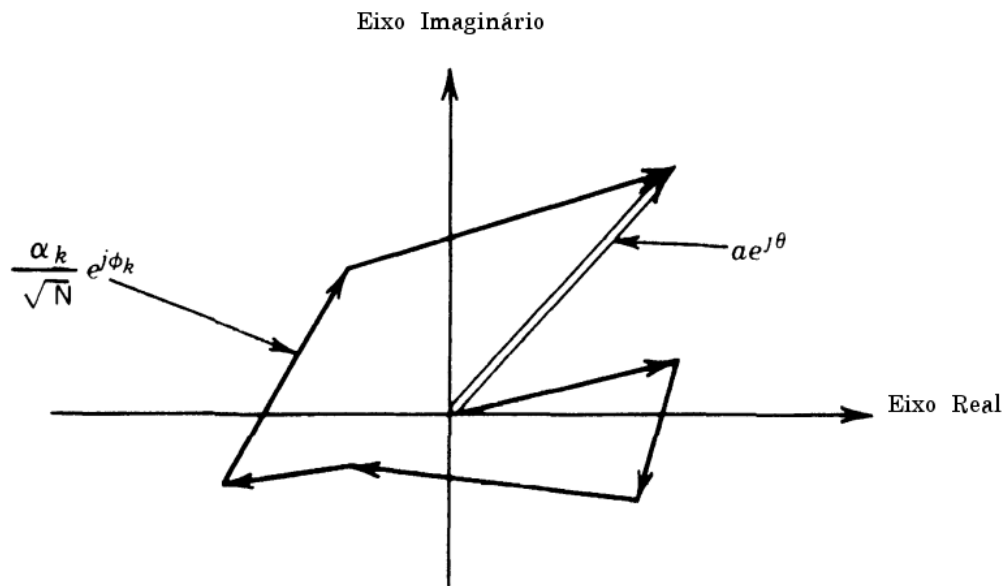
<sup>1</sup>Podemos entender como fasor em um modo simplificado, como um vetor que “gira”

$$r \triangleq \Re(ae^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos(\phi_j) \quad (2.2)$$

$$i \triangleq \Im(ae^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \alpha_j \sin(\phi_j) \quad (2.3)$$

onde  $r$  e  $i$  representam as partes real e imaginária do fasor aleatório  $a$ .

Figura 2.1: Desenho esquemático da soma de fasores aleatórios. Extraído de [42]



Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [42].

Nas nossas análises condicionaremos 3 suposições aos fasores elementares:

1. A amplitude  $\frac{\alpha_j}{\sqrt{N}}$  e a fase aleatória  $\phi_j$  são grandezas estatisticamente independentes entre si;
2. As variáveis aleatórias  $\alpha_j$  são distribuídas igualmente para todo  $j$ , com média e variância  $\bar{\alpha}_j$  e  $\bar{\alpha}_j^2$ , respectivamente;
3. As fases aleatórias  $\phi_j$  são uniformemente distribuídas no intervalo  $(-\pi < \phi_j < \pi)$ .

### 2.2.2 Um fasor constante mais um fasor aleatório

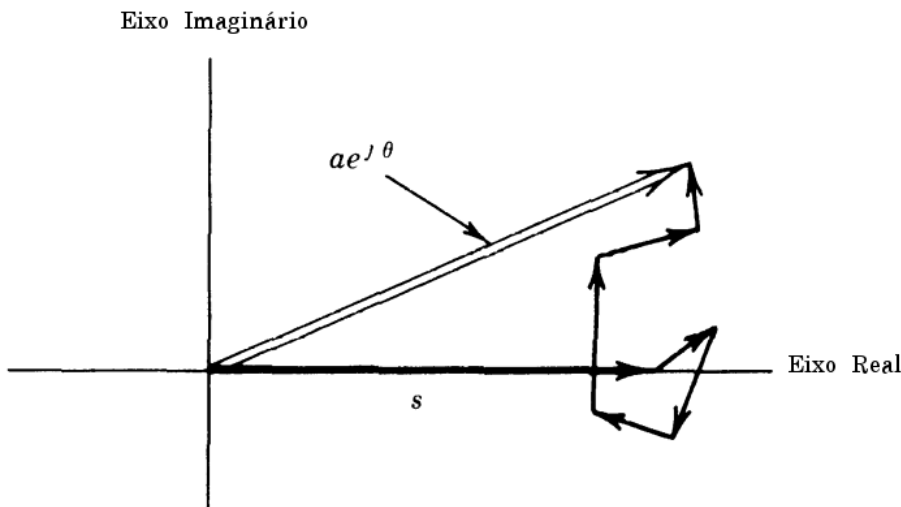
Em alguns campos da óptica, no estudo dos campos elétricos podemos associar o caráter estocástico do campo em sua fase. Para isso, basta que ao invés de considerarmos um fasor aleatório composto por somas de fasores elementares, consideramos que existe uma parte fixa (fasor constante) e então somamos os fasores aleatórios á esta parte do fasor. Matematicamente, podemos reescrever a equação (2.2):

$$r = s + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos \phi_j \quad (2.4)$$

$$i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \alpha_j \sin \phi_j \quad (2.5)$$

Onde  $s$  representa um fasor constante, conhecido, real e positivo. Sem perda de generalidade, uma vez que podemos adotar o sistema de referência que seja mais conveniente.

Figura 2.2: Desenho esquemático para soma de um fasor constante e vários outros fasores aleatórios. Extraído de [42]

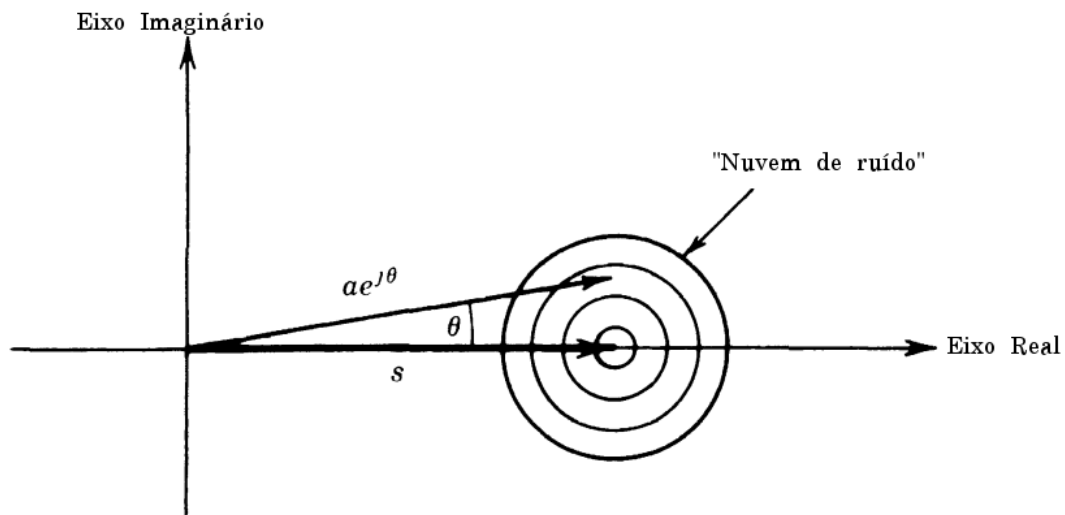


Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [42].

### 2.2.3 Fator constante forte e soma de pequenos fatores aleatórios

Para descrição da aleatoriedade do campo óptico, introduziremos o caráter estocástico do campo na fase e na amplitude do campo elétrico incidente. O modelo que utilizaremos é conhecido como *modelo de difusão de fase aleatória*. Neste modelo, consideraremos que a fase  $\phi$  do campo é descrita pela soma de duas componentes de fase - uma delas constante e determinística e a outra aleatória e pequena em relação ao termo constante. Como o fator conhecido (no nosso caso, o determinístico) é muito maior que o fator aleatório podemos perceber que o fator a resultante se encontra inserido numa “nuvem” de ruído centrada na extremidade do fator  $s$ .

Figura 2.3: Desenho esquemático para soma de um fator “forte” constante e vários outros fatores aleatórios.



Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [42].

## 2.3 Funções de autocorrelação e correlação cruzada

Quando trabalhamos com processos aleatórios, os momentos estatísticos fornecem informações relevantes para os processos levados em conta. Dentre eles, a média e a função de autocorrelação. Para um processo aleatório  $x(t)$  definimos como média  $m(t)$ :

$$m(t) = \langle x(t) \rangle \quad (2.6)$$

e a *autocorrelação* de  $x(t)$ , também conhecida como *função de coerência mútua*,

$$\Gamma(t_1, t_2) \equiv \langle x(t_1)x(t_2) \rangle. \quad (2.7)$$

Vamos assumir que o processo é estatisticamente estacionário. Consequentemente, a média será independente do tempo  $t$  e a função de autocorrelação depende apenas da diferença entre  $t_1$  e  $t_2$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ . Portanto, podemos escrever a função  $\Gamma(t_1, t_2)$  como:

$$\Gamma(t_1, t_2) \equiv \Gamma(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle. \quad (2.8)$$

Quando a variável aleatória é complexa (em geral, quando lidamos com óptica estatística devido a dependência dos campos harmônicos  $e^{i\omega_0 t}$ ), escreveremos  $z(t)$  ao invés de  $x(t)$  e definimos a função de autocorrelação de uma maneira semelhante a definida em (2.8). Para o processo estocástico complexo estacionário e de média zero, temos:

$$\Gamma(\tau) = \langle z^*(t)z(t + \tau) \rangle. \quad (2.9)$$

Motivados pelo problema da motivação de fase cruzada para pulsos parcialmente coerentes, podemos generalizar essa definição e considerarmos quando dois processos aleatórios complexos estão envolvidos. Considere agora, ao invés de  $z(t)$ , os processos envolvidos são  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$ . Esses processos podem representar, por exemplo, a variação de um determinado campo em dois pontos distintos do espaço  $P_1$  e  $P_2$ . Assumindo que os processos são conjuntamente estacionários, ou seja, a probabilidade conjunta de  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  é invariante no que se diz respeito a origem temporal, e então definimos como *função correlação cruzada* como:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle z_1^*(t)z_2(t + \tau) \rangle \quad (2.10)$$

Nossas contribuições na área de óptica estatística foram concentradas na inserção do caráter estocástico no estudo da IM em apenas UM pulso propagante em uma fibra.

## 2.4 Teorema de Wiener-Khintchine

Analisando dimensionalmente a eq. (2.8) é razoável inferir que a função de autocorrelação de um processo  $z(t)$  representando um campo elétrico estocástico, nos forneça informação acerca da intensidade desse campo devido o produto entre os campos em um tempo  $t_1$  e num tempo  $t_2$ .

Considere um processo óptico estocástico com média zero, ou seja,

$$\langle z(t) \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Nesse caso é interessante e muito útil trabalharmos no domínio das frequências. Assim, iremos definir a transformada de Fourier de  $z(t)$  da seguinte maneira:

$$\xi_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z_p(t) e^{i\Omega t} dt \quad (2.12)$$

E conseqüentemente, com duas frequências  $\Omega$  e  $\Omega'$ ,

$$\xi_p^*(\Omega)\xi_p(\Omega') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} z_p^*(t)z_p(t') e^{-i\Omega t} e^{i\Omega' t'} dt dt' \quad (2.13)$$

Podemos utilizar a substituição  $t' = t + \tau$ , e extrair a média no ensemble de ambos os lados e então:



$$\langle \xi^*(\Omega)\xi(\Omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle z^*(t)z(t+\tau) \rangle e^{i\Omega'\tau} e^{i(\Omega'-\Omega)t} dt d\tau \quad (2.14)$$

Substituindo (2.9) em (2.14),

$$\langle \xi^*(\Omega)\xi(\Omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega'\tau} e^{i(\Omega'-\Omega)t} dt d\tau \quad (2.15)$$

Como,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Omega'-\Omega)t} dt = \delta(\Omega' - \Omega) \quad (2.16)$$

Então,

$$\langle \xi^*(\Omega)\xi(\Omega') \rangle = S(\Omega)\delta(\Omega' - \Omega) \quad (2.17)$$

onde:

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (2.18)$$

Ou extraindo a transformada de Fourier inversa, temos:

$$\Gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\Omega) e^{-i\Omega\tau} d\Omega \quad (2.19)$$

$S(\Omega)$  é formalmente definido por (2.17) é conhecido como densidade espectral, ou espectro de Wiener do processo estacionário  $z(t)$ . Podemos calcular este espectro de potências a partir do cálculo da transformada de Fourier da autocorrelação do processo  $z(t)$ . Essa relação (2.18) é con-

hecida como *Teorema de Wiener-Khintchine*. Na aplicação a fenômenos ópticos, a autocorrelação fornece uma medida da intensidade do pulso caracterizado pelo processo estocástico. Quando extrairmos a transformada de Fourier desta função, podemos interpretar como se estivessemos analisando o espectro de potências no domínio das frequências do pulso.

Quando estivermos lidando com dois processos distintos, no caso análogo à correlação cruzada, o teorema de Wiener-Khintchine pode ser generalizado e conseqüentemente para fenômenos ópticos dessa natureza é possível calcular o espectro de potências do pulso devido a interação de dois campos (processos), como o caso, por exemplo, da modulação cruzada de fase.

$$S_{12}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (2.20)$$

## 2.5 Propagação de um pulso parcialmente coerente em um meio dispersivo não linear

Nesta seção, iremos apresentar os estudos acerca do efeito da instabilidade modulacional de um pulso óptico parcialmente coerente em um meio dispersivo não linear com resposta instantânea publicado em (1995) por *Cavalcanti et al* [14]. Para isso, iremos introduzir o caráter estocástico do pulso através de modelo de difusão de fase [24] no campo em questão. Assim, o campo incidente  $E(z, t)$  na aproximação do envelope lentamente variável obedece a seguinte ENLS:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - \gamma |E(z, t)|^2 E(z, t) \quad (2.21)$$

Onde,  $\beta_2$  representa o parâmetro de dispersão da velocidade de grupo e  $\gamma = n_2 k |E_0|^2$  o parâmetro da não linearidade da fibra. Admitimos que o campo incidente possui natureza estocástica constituído por uma parte determinística representado por  $E_0$ , e o ruído que iremos associar ao campo, pode ser representado por pequenas flutuações no estado estacionário, representado por  $\Delta E(z, t)$ . Devido a existência de um termo determinístico e outro termo estocástico, o pulso in-

cidente é dito *parcialmente coerente*. Como qualquer laser real emite luz com flutuações aleatórias na amplitude e na fase devido as oscilações moleculares independentes, escreveremos o campo estocástico como sendo:

$$E(z, t) = (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi(z, t))}, \quad (2.22)$$

onde:  $E_0$  é o campo incidente em  $z = 0$  e  $t = 0$  e  $\Phi_0 = \gamma|E_0|^2 z$ . Note que,  $\delta E(z, t)$  e  $\delta\Phi(z, t)$  representam pequenas flutuações em torno dos valores médios  $\langle E \rangle$  e  $\langle \Phi \rangle$ , e obedecem as relações:

$$\delta E(z, t) \ll E_0(z, t) \quad (2.23)$$

$$\delta\Phi(z, t) \ll \Phi_0(z, t) \quad (2.24)$$

No modelo utilizado, o campo óptico complexo é representado por uma soma de um fasor constante com um fasor gaussiano fraco que varia aleatoriamente entre  $[0, 2\pi]$ . Não obstante, as flutuações  $\delta E(z, t)$  e  $\delta\Phi(z, t)$  representam um processo aleatório Gaussiano [14, 25, 26] com média zero  $\langle \delta E(z, t) \rangle = \langle \delta\Phi(z, t) \rangle = 0$ . No modelo de difusão de fase, o processo  $\Delta\Phi$  é considerado não apenas Gaussiano [25, 26] com as frequências das flutuações representando ruídos brancos, mas, também Markoviano, isto é, com a variância de fase crescendo linearmente com o tempo. Como estamos lidando com pulsos parcialmente coerentes, devemos definir a função de autocorrelação:

$$\Gamma(z, t) = \langle E^*(z, 0) E(z, t) \rangle \quad (2.25)$$

E conseqüentemente, sua transformada de Fourier,

$$S(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.26)$$

Que pelo teorema de Wiener-Khintchine nos fornece o espectro de potência. Neste caso, sub-

stituindo (2.22) em (2.25), temos:

$$\begin{aligned}\Gamma(z, t) &= \langle E^*(z, 0)E(z, t) \rangle = \langle (E_0 + \delta E(z, 0)) (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\delta\Phi(z, t) - \delta\Phi(z, 0))} \rangle \\ \Gamma(z, t) &= |E_0|^2 \langle e^{i\Delta\Phi} \rangle + E_0 \langle [\delta E(z, 0) + \delta E(z, t)] e^{i\Delta\Phi} \rangle\end{aligned}\quad (2.27)$$

onde:

$$\Delta\Phi = \delta\Phi(z, t) - \delta\Phi(z, 0)$$

O primeiro termo da equação (2.27) é a contribuição predominante e fornece a informação sobre a autocorrelação referente a fase do campo propagante. Os demais termos representam o acoplamento entre o ruído na amplitude e na fase do campo  $E$ . Consideraremos apenas a contribuição predominante, o primeiro termo, e admitindo que  $\Delta\Phi$  possua caráter Gaussiano na propagação, a relação

$$\Gamma(z, t) \approx |E_0|^2 e^{-\frac{(\Delta\Phi)^2}{2}} \quad (2.28)$$

é válida. Agora, vamos calcular o conjunto de equações que regem a dinâmica dos ruídos do campo. Para isso, calcularemos algumas quantidades importantes, desconsiderando os termos não lineares em  $\delta E$  e  $\delta\Phi$ :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ \frac{\partial \delta E}{\partial z} + i(E_0 + \delta E) \left( n_2 k |E_0|^2 + \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} \right) \right] e^{i(\Phi + \delta \Phi)} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i(E_0 + \delta E) \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right] e^{i(\Phi + \delta \Phi)} \quad (2.30)$$

$$|E|^2 = E^* E \approx |E_0|^2 + 2E_0 \delta E \quad (2.31)$$

Substituindo essas quantidades na ENLS (2.21), obtém-se:

$$i \frac{\partial \delta E}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} - i \frac{\beta_2}{2} E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} + 2n_2 k |E_0|^2 \delta E = 0 \quad (2.32)$$

Podemos separar a eq. (2.32) em duas partes, uma real e uma complexa. De modo que obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + E_0 \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} - 2n_2 k |E_0|^2 \delta E = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\beta_2}{2} E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \delta E}{\partial z} = 0 \quad (2.34)$$

O conjunto de equações acima é resolvida pelo método de Fourier. Introduzindo as transformadas  $\delta e(z, \Omega)$  e  $\delta \phi(z, \Omega)$ :

$$\delta E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (2.35)$$

$$\delta \Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \phi(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (2.36)$$

Para campos harmônicos:

$$\frac{\beta_2}{2} (-i\Omega)^2 \delta e + E_0 \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} - 2n_2 k |E_0|^2 \delta e = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\beta_2}{2} E_0 (-i\Omega)^2 \delta \phi - \frac{\partial \delta e}{\partial z} = 0 \quad (2.38)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos o seguinte grupo de equações:

$$\frac{\partial^2 \delta e}{\partial z^2} + K^2 \delta e = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial z^2} + K^2 \delta \phi = 0 \quad (2.40)$$

onde:

$$K^2 = \frac{\beta_2 \Omega^2}{4} (\beta_2 \Omega^2 + 4n_2 k |E_0|^2)$$

Note que apenas para  $\beta_2 < 0$  (Dispersão anômala),  $K \in \Im m$ . No regime de dispersão normal,

não há ganho para a IM. Assim, analisaremos apenas esse regime de dispersão. Desta maneira, a relação de dispersão é dada pela expressão:

$$K^2 = \frac{\beta_2^2 \Omega^2}{4} (\Omega^2 - \Omega_c^2) \quad \longrightarrow \quad \Omega_c^2 \equiv \frac{4}{|\beta_2| L_{\text{NL}}} \quad (2.41)$$

$L_{\text{NL}} \equiv (n_2 k |E_0|^2)^{-1}$  representa o comprimento não-linear do meio. Fisicamente, fornece o comprimento do caminho óptico a partir do qual os efeitos não-lineares se tornam significativos. Porém, devido as linearizações, este modelo é restrito ao intervalo em que  $L$  é pequeno, isto é,  $L \approx 2L_{\text{NL}}$ , sendo possível a estimativa dos efeitos para distância acima desta através de simulações computacionais [14] ou experimentos em laboratório.

Como  $g(\Omega) = 2\Im m(K)$ , define-se o ganho:

$$g(\Omega) = |\beta_2 \Omega| (\Omega_c^2 - \Omega^2) \quad \text{para,} \quad |\Omega| < \Omega_c \quad (2.42)$$

$$g(\Omega) = 0 \quad \text{se,} \quad |\Omega| > \Omega_c \quad (2.43)$$

Devido a esta análise, as componentes de ruído na frequência  $\Omega$  dentro do intervalo  $-\Omega_c < \Omega < \Omega_c$ , crescem exponencialmente de acordo, com:

$$\delta e(z, \Omega) = \delta e(0, \Omega) e^{\frac{g(\Omega)z}{2}} \quad (2.44)$$

$$\delta \phi(z, \Omega) = \delta \phi(0, \Omega) e^{\frac{g(\Omega)z}{2}} \quad (2.45)$$

Estamos interessados não apenas no espectro de ganho, mas principalmente, na variância de fase (2.28). Pois, podemos obter a a partir dela as funções de autocorrelação e o espectro de potências, conseqüentemente. Assim, vamos calcular a diferença de fase  $\Delta\Phi(z, t)$  usando as eqs. (2.35) e (2.44):

$$\Delta\Phi = \delta\Phi_t(z, t) - \delta\Phi_0(z, 0) \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\phi(0, \Omega) e^{i(Kz - \Omega t)} d\Omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\phi(0, \Omega) e^{iKz} d\Omega \right] \quad (2.47)$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\phi(0, \Omega) e^{iKz} (e^{-i\Omega t} - 1) d\Omega + c.c. \quad (2.48)$$

Utilizando a seguinte propriedade para o processo estocástico [43, 14]:

$$\langle \delta\phi^*(0, \Omega) \delta\phi(0, \Omega') \rangle = S_\Phi(0, \Omega) \delta(\Omega - \Omega') \quad (2.49)$$

onde:  $S_\Phi(0, \Omega)$  representa o espectro de potência de entrada do processo  $\delta\Phi(0, t)$ . Assim, após algumas manipulações algébricas, encontramos a expressão:

$$\langle (\Delta\Phi)^2(z, t) \rangle = \langle (\Delta\Phi)^2(0, t) \rangle + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega_c} S_\Phi(0, \Omega) (1 - \cos\Omega t) [e^{g(\Omega)z} - 1] d\Omega \quad (2.50)$$

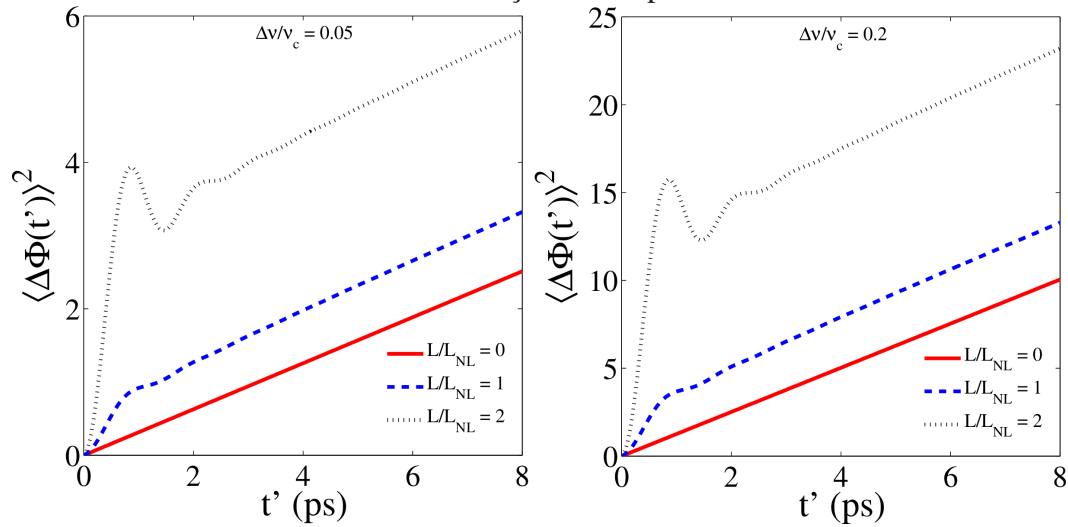
A forma da linha espectral de diversos lasers possuem o perfil Lorentziano [24, 60], matematicamente,  $S_\Phi(0, \Omega) = \frac{2\pi\Delta\nu}{\Omega^2}$  e  $\langle (\Delta\Phi)^2(0, t) \rangle = 2\pi\Delta\nu t$ . Fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \Omega &= x\Omega_c \\ t' &= \nu_c t \\ \Omega_c &= 2\pi\nu_c \end{aligned} \quad (2.51)$$

A variância de fase a uma distância L, pode ser calculada através da equação:

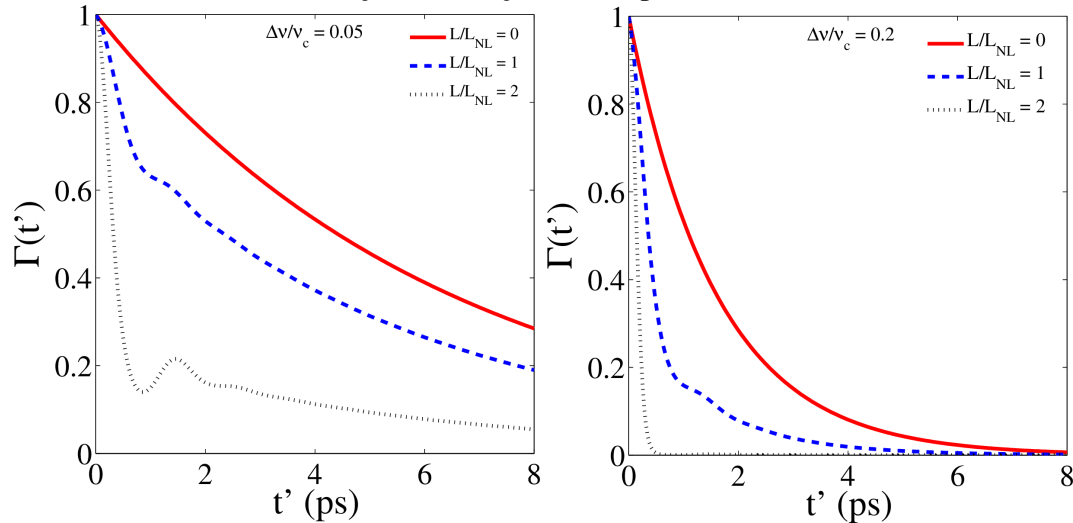
$$\langle (\Delta\Phi^2)(L, t') \rangle = 2\pi \frac{\Delta\nu}{\nu_c} \left( t' + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 [1 - \cos(2\pi x t')] (e^{g(x)L} - 1) \frac{dx}{x^2} \right) \quad (2.52)$$

A equação acima (2.52) mostra que a razão  $\frac{\Delta\nu}{\nu_c}$  desempenha um importante papel no processo

Figura 2.4: Gráfico da variância de fase em função do tempo  $t'$ . Para valores distintos de  $L$  e  $\Delta\nu/\nu_c$ 

Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [14].

de amplificação do ruído. Verificamos que se  $\Delta\nu$  representa o grau de coerência do pulso incidente inicial,  $\nu_c$  deve estar associada com a frequência característica do meio não linear dispersivo.

Figura 2.5: Gráfico da autocorrelação em função do tempo  $t'$ . Para valores distintos de  $L$  e  $\Delta\nu/\nu_c$ 

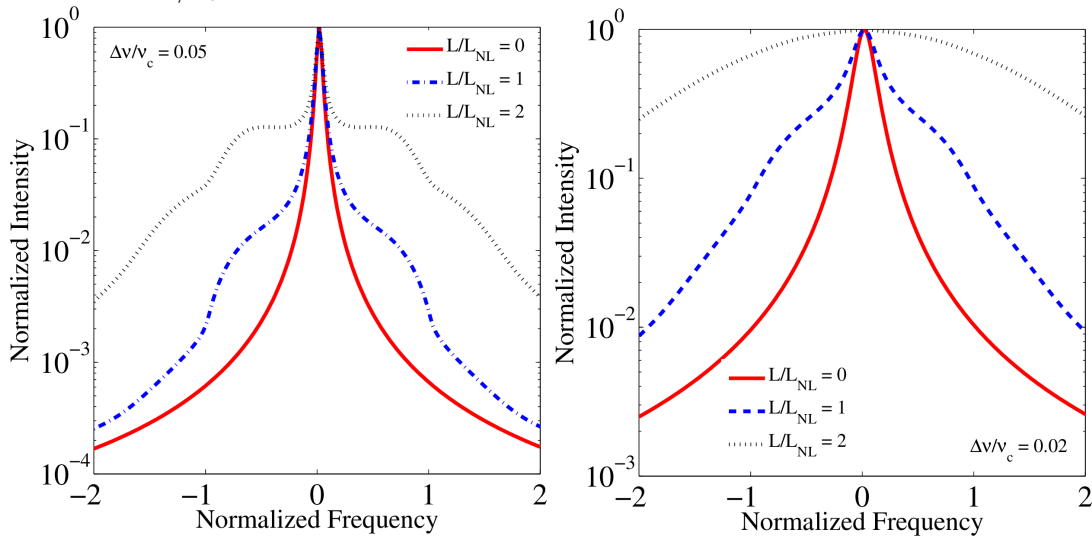
Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [14].

Tanto nos gráficos da autocorrelação quanto no da variância de fase, notamos a existência de estruturas oscilatórias dependentes do comprimento de propagação  $L$  observado. Tais estruturas são responsáveis pelo surgimento das bandas de instabilidade no espectro de potências. Na fig. (2.4) é possível observar que a largura de linha não prejudica a existência das oscilações na variância de fase. Já na fig. (2.5) é possível observar a degradação da correlação devido o aumento da largura



de linha do pulso, note que este mesmo aumento é responsável pelo desaparecimento gradual das estruturas oscilatórias na autocorrelação.

Figura 2.6: Gráfico do espectro de potências em função da frequência normalizada. Para valores distintos de  $L$  e  $\Delta\nu/\nu_c$



Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [14].

Note que na figura (2.6), há o surgimento das bandas de instabilidades laterais. Percebe-se também que o aumento da razão  $\Delta\nu/\nu_c$  do pulso induz uma degradação destas duas bandas de instabilidade. Ainda na figura (2.6), há um alargamento espectral que faz com que as bandas se distanciem da frequência central normalizada. Entretanto, é possível observar que para  $L = 2L_{NL}$  não é possível notar as bandas dentro do intervalo de frequências mostrado. No caso em que a resposta não linear é não instantânea o comportamento é um pouco diferente, principalmente pela existência da IM no regime de dispersão normal.

## 2.6 Amplificação de ruído em um meio não linear dispersivo no regime de dispersão zero

Continuando com nossas discussões, podemos estudar as mesmas propriedades da seção anterior para o regime de dispersão zero [44]-[46]. Como o regime de dispersão da velocidade de grupo é mínimo, implica que  $\beta_2 \approx 0$ . Desta maneira, se torna necessário que o campo incidente  $E(z, t)$  na aproximação do envelope lentamente variável obedeça a seguinte ENLS:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 E(z, t)}{\partial t^3} - \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 E(z, t)}{\partial t^4} - \gamma |E(z, t)|^2 E(z, t) \quad (2.53)$$

De maneira análoga a seção anterior, teremos que encontrar a expressão para a relação de dispersão para o nosso pulso estocástico

$$E(z, t) = (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi(z, t))} \quad \therefore \quad \Phi_0 = \gamma |E_0|^2 z$$

neste regime de dispersão. Segue algumas quantidades importantes:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ \frac{\partial \delta E}{\partial z} + i(E_0 + \delta E) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\delta \Phi}{\partial z} \right) \right] e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^3 E}{\partial t^3} = \left( \frac{\partial^3 \delta E}{\partial t^3} + i E_0 \frac{\partial^3 \delta \Phi}{\partial t^3} \right) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^4 E}{\partial t^4} = \left( \frac{\partial^4 \delta E}{\partial t^4} + i E_0 \frac{\partial^4 \delta \Phi}{\partial t^4} \right) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (2.57)$$

$$|E|^2 E = (|E_0|^2 + 2E_0 \delta E + |\delta E|^2) (E_0 + \delta E) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (2.58)$$

Substituindo as relações (3.1) em (2.53) e considerando os termos lineares em  $\delta E$  e  $\delta\Phi$ , após algumas manipulações algébricas simples, podemos dividir o resultado nas partes real e imaginária da seguinte forma:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\beta_2 E_0}{2} \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \delta E}{\partial t^3} - \frac{\beta_4 E_0}{24} \frac{\partial^4 \delta \Phi}{\partial t^4} \quad (2.59)$$

$$-E_0 \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} - \frac{\beta_3 E_0}{6} \frac{\partial^3 \delta \Phi}{\partial t^3} - \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 \delta E}{\partial t^4} - 2\gamma |E_0|^2 \delta E \quad (2.60)$$

Como queremos encontrar a relação de dispersão, podemos resolver esse problema através do método de Fourier (2.35) trabalhando no domínio das frequências. Assim, (3.6) podem ser reescritas como:

$$\delta e \left( -ik + i \frac{\beta_3 \Omega^3}{6} \right) + \delta \phi \left( \frac{\beta_2 E_0 \Omega^2}{2} + \frac{\beta_4 E_0 \Omega^4}{24} \right) = 0 \quad (2.61)$$

$$\delta e \left( 2\gamma |E_0|^2 + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \frac{\beta_4 \Omega^4}{24} \right) + \delta \phi \left( -ik E_0 + i \frac{\beta_3 E_0 \Omega^3}{6} \right) = 0 \quad (2.62)$$

Ou então,

$$\begin{pmatrix} -ik + i \frac{\beta_3 \Omega^3}{6} & \frac{\beta_2 E_0 \Omega^2}{2} + \frac{\beta_4 E_0 \Omega^4}{24} \\ 2\gamma |E_0|^2 + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \frac{\beta_4 \Omega^4}{24} & -ik E_0 + i \frac{\beta_3 E_0 \Omega^3}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta e \\ \delta \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Que admite solução não trivial, quando o determinante da matriz dos coeficientes é nula. Desta maneira,

$$K = \frac{\beta_3 \Omega^3}{6} \pm |\Omega| \sqrt{\beta_2 |E_0|^2 \gamma + \frac{\Omega^2}{4} \left( \beta_2^2 + \frac{\beta_4 \gamma |E_0|^2}{3} \right) + \frac{\beta_2 \beta_4 \Omega^4}{24} + \frac{\beta_4^2 \Omega^6}{(24)^2}} \quad (2.64)$$

Podemos notar que a relação de dispersão para pulsos parcialmente coerentes encontrada aqui, é idêntica a relação de dispersão obtida para pulsos coerentes [44]. A inserção do modelo de difusão de fase, não possui influência no espectro de ganho da IM para este regime de dispersão utilizando a ENLS estendida até quarta ordem.

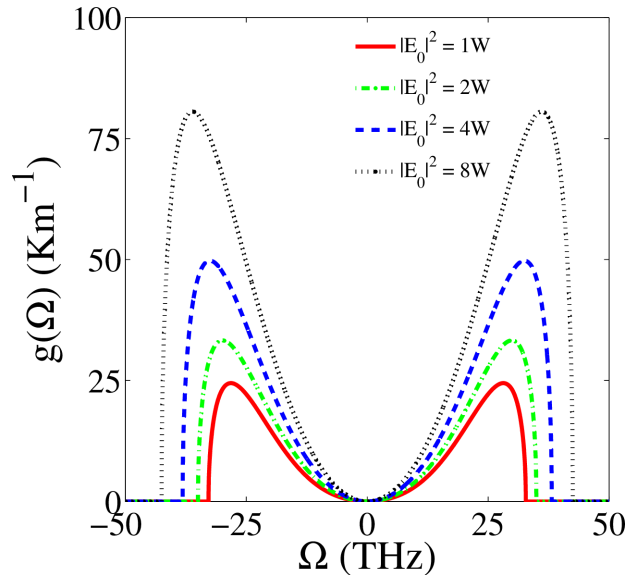
Podemos agora, como estamos lidando com o regime de dispersão mínima,  $\beta_2 \rightarrow 0$ . Portanto, a eq. (3.18) se torna:

$$K = \frac{\beta_3 \Omega^3}{6} \pm |\Omega| \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} \left( \frac{\beta_4 \gamma |E_0|^2}{3} \right) + \frac{\beta_4^2 \Omega^6}{(24)^2}} \quad (2.65)$$

Para plotarmos o ganho, desconsideraremos  $\beta_3$ . Veja que na equação acima, o termo que contém  $\beta_3$  não interfere na geração do ganho. Assim, podemos escrever o ganho como:

$$g(\Omega) = \left( \frac{\Omega^2 |\beta_4|}{12} \right) \sqrt{\Omega_c^4 - \Omega^4} \quad \therefore \quad \Omega_c^4 = \frac{48\gamma |E_0|^2}{|\beta_4|} \quad (2.66)$$

Figura 2.7: Espectro de ganho. Parâmetros da fibra:  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_4 = 7.10^{-4} \text{ ps}^4/\text{Km}$  e  $\gamma = 3.05 \text{ Km}^{-1}\text{W}^{-1}$



Fonte: Reproduzido pelo autor. Extraído de [44].

As funções estatísticas não mudam suas equações devido a mudança na ENLS. Como o modelo utilizado de difusão de fase é o mesmo, a função de autocorrelação é obtida através de (2.28):

$$\Gamma(z, t) \approx |E_0|^2 e^{-\frac{(\Delta\Phi)^2}{2}}$$

E o espectro de potências é dado por (2.26):

$$S(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z, t) e^{i\omega t} dt$$

Nesta seção, não entraremos em detalhes sobre as funções de autocorrelação e do espectro de potências. O objetivo principal da mesma, é apresentar a existência do espectro de ganho para a instabilidade modulacional no regime de dispersão zero. O estudo da influência das propriedades estatísticas na IM será comparada para as respostas instantâneas e atrasadas na apresentação dos trabalhos publicados no capítulo posterior desta tese.

## Capítulo 3

# Amplificação de ruído em um meio com resposta não linear atrasada

### 3.1 Propagação de um pulso parcialmente coerente em um meio dispersivo não linear com resposta não linear atrasada

Como já discutimos anteriormente, a IM é um fenômeno bastante peculiar ocorrente durante a propagação de ondas eletromagnéticas em meios não lineares dispersivos, e se caracteriza pela manifestação de um crescimento exponencial de pequenas perturbações na amplitude e na fase (nesse caso) enquanto a onda se propaga dentro do meio/fibra devido a coexistência dos efeitos não lineares e dispersivos. No campo da óptica não linear, a IM pode ser utilizada na determinação de parâmetros de fibras [27], na produção de lasers baseados na IM [28], na geração de chaveadores ópticos [29], promovendo formação de sólitons em redes ópticas de condensados de Bose-Einstein [15], [30], no controle da não linearidade de meios ópticos, [31] entre outros. Além das aplicações mencionadas, pode ser o mecanismo físico responsável pelo desencadeamento de processos naturais tais como sólitons e formação de *rogue waves* [17],[33]-[34].

No contexto das fibras ópticas, a IM é induzida tanto pela automodulação de fase quanto pela

modulação de fase cruzada. Em geral, as análises acerca do fenômeno da IM são feitas através das resoluções de extensões da ENLS obtendo a relação de dispersão através da linearização das equações que regem a dinâmica das perturbações. Neste ponto de vista, além da dispersão de baixa ordem usual e não linearidade Kerr, muitos outros aspectos físicos já são considerados tais como, não linearidade saturável, não linearidade de quinta ordem, dispersão de ordens mais altas, resposta não linear não instantânea, e assim por diante.

Nos últimos anos, o crescente número de pesquisas nessa área tem contribuindo para o entendimento da resposta não linear retardada devido ao efeito Raman tanto experimentalmente [35] quanto teoricamente [18, 22],[36]-[47]. Atualmente, a suposição da resposta não linear instantânea falha para pulsos ultracurtos ou em meios com alta dispersão, por esta razão é necessária a inserção do retardo na resposta não linear do meio. No nosso trabalho, o artifício utilizado para resolver este problema se dá através de um modelo de relaxação, conhecido como modelo de relaxação de Debye. Porém, neste modelo essa correção é uma função puramente exponencial. Recentemente, Picozzi *et al* mostraram que uma pequena contribuição da resposta de um oscilador harmônico pode mudar drasticamente no dinâmica de feixes incoerentes em um meio não linear instantâneo [48].

Na maioria dos casos de estudos da IM, os pulsos incidentes possuem natureza determinística e as perturbações são produzidas dentro do meio propagante. No ponto de vista prático, todos os campos ópticos são apenas parcialmente coerentes e se torna necessária considerar a análise da óptica não linear de um novo ponto de vista. De sorte, este campo tem recebido uma atenção especial com o estudo da instabilidade modulacional incoerente e de sólitons incoerentes em cristais fotorefrativos [49, 50]. Há pouco tempo, foi demonstrado que a IM pode ocorrer também para ondas parcialmente coerentes, tanto teoricamente [14, 59, 52] quanto experimentalmente [53, 54]. Várias aproximações distintas tem sido propostas para investigar a função de um pulso parcialmente coerente, por exemplo, através da adição de um termo de ruído de Langenvin na ENLS, ou ainda, analisando explicitamente a contribuição da média estatística no ensemble da resposta Kerr,  $\langle |E|^2 \rangle$  na ENLS [59]. Por outro lado, nossa aproximação baseia-se no modelo de difusão de fase e investigamos a evolução das flutuações através da resolução da ENLS semelhante ao realizado na Ref. [14]. Aqui, nós investigamos as propriedades estatísticas de um pulso parcialmente coerente em conexão com a IM proveniente do efeito da automodulação de fase durante a propagação de

uma onda eletromagnética em um meio não linear dispersivo com resposta não linear retardada a partir do estudo da ENLS com um campo incidente estocástico.

Para isso, consideramos o caso em que uma onda contínua incidente dentro de uma fibra. A equação que descreve a propagação dessa onda dentro da fibra com resposta não instantânea para o campo elétrico obedecendo a aproximação do envelope lentamente variável e descrita no modelo de relaxação de Debye é dada por:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - N(z, t) E(z, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N(z, t) + \gamma |E(z, t)|^2) \quad (3.2)$$

Onde  $z$  e  $t$  representam as coordenadas longitudinal e temporal para o sistema referencial se movimentando com o pulso, respectivamente,  $\beta_2$  é o parâmetro de dispersão da velocidade de grupo,  $\gamma$  o parâmetro Kerr,  $\tau$  representa o retardo na resposta não linear do meio e  $N(z, t)$  descreve o índice não linear do meio. Perceba quando  $\lim_{\tau \rightarrow 0}$  a eq. (3.1) recupera o caso descrito por (2.21).

$$\tau \frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = (-N(z, t) + \gamma |E(z, t)|^2) \quad \text{para, } \lim_{\tau \rightarrow 0} \Rightarrow N(z, t) \rightarrow \gamma |E(z, t)|^2 \quad (3.3)$$

E portanto, (3.1) se reescreve como:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - \gamma |E(z, t)|^2 E(z, t) \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

Que é a ENLS que descreve a propagação de pulsos em um meio com resposta não linear instantânea.

Prosseguindo com o nosso caso, escrevemos o campo estocástico como:



$$E(z, t) = (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi(z, t))} \quad \therefore \quad \Phi_0 = \gamma |E_0|^2 z \quad (3.6)$$

$$N(z, t) = N_0 + \delta N(z, t) \quad \therefore \quad N_0 = \gamma |E_0|^2 \quad (3.7)$$

Onde,  $\delta E(z, t)$  e  $\delta\Phi(z, t)$  representam, respectivamente, pequenas flutuações nos valores estacionários da amplitude e da fase, que obedecem as relações:  $\delta E(z, 0) \ll E_0$  e  $\delta\Phi(z, 0) \ll \Phi_0$ . Onde, o pulso é descrito através da soma entre um fasor constante e um ruído Gaussiano, como descrito na seção 2.2.3, representado por um fasor fraco com média zero,  $\langle \delta E(z, t) \rangle = \langle \delta\Phi(z, t) \rangle = 0$  e a fase varia aleatoriamente no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Semelhantemente,  $\delta N(z, 0) \ll N_0$  corresponde a uma pequena flutuação da não linearidade e  $\langle \delta N(z, t) \rangle = 0$ .

Calculando a função de autocorrelação de  $\delta E$  e  $\delta\Phi$ , que por sua vez possuem dependência com as as propriedades estatísticas do campo incidente, iremos extrair algumas propriedades estatísticas de interesse. Logo, por definição:

$$\Gamma(z, t) = \langle E^*(z, 0) E(z, t) \rangle, \quad (3.8)$$

em conjunto com sua transformada de Fourier,

$$S(z, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, t) e^{i\Omega t} dt. \quad (3.9)$$

substituindo (3.6) em (3.8), calculamos a função  $\Gamma(z, t)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(z, t) &= \langle E^*(z, 0) E(z, t) \rangle = \langle (E_0 + \delta E(z, 0)) (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\delta\Phi(z, t) - \delta\Phi(z, 0))} \rangle \\ \Gamma(z, t) &= |E_0|^2 \langle e^{i\Delta\Phi} \rangle + E_0 \langle [\delta E(z, 0) + \delta E(z, t)] e^{i\Delta\Phi} \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde:

$$\Delta\Phi = \delta\Phi(z, t) - \delta\Phi(z, 0)$$

O primeiro termo da equação (3.10) é a contribuição predominante e fornece a informação sobre a autocorrelação referente a fase do campo propagante. Os demais termos representam o acoplamento entre o ruído na amplitude e na fase do campo  $E(z, t)$ . Considerando apenas o primeiro termo, admitindo que  $\Delta\Phi$  possua caráter Gaussiano na propagação,

$$\Gamma(z, t) \approx |E_0|^2 e^{-\frac{(\Delta\Phi)^2}{2}}, \quad (3.11)$$

Isso se mantém para dadas flutuações na amplitude e na fase, que são pequenas em comparação com a intensidade média do pulso. Assim, o sistema não linear pode ser considerado com um comportamento linear no que diz respeito as flutuações. Agora, o nosso problema é calcular a quantidade  $\langle (\Delta\Phi)^2(t) \rangle$ . Na mesma linha de raciocínio utilizado por [14], vamos calcular o conjunto de equações que regem a dinâmica dos ruídos do campo. Para isso, calcularemos algumas quantidades importantes, desconsiderando os termos não lineares em  $\delta E$  e  $\delta\Phi$ :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ \frac{\partial \delta E}{\partial z} + i(E_0 + \delta E) \left( N_0 + \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} \right) \right] e^{i(\Phi + \delta \Phi)} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i(E_0 + \delta E) \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right] e^{i(\Phi + \delta \Phi)} \quad (3.13)$$

$$|E|^2 = E^* E \approx |E_0|^2 + 2E_0 \delta E \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \delta N}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (2\gamma E_0 \delta E - \delta N) \quad (3.15)$$

Substituindo essas quantidades na ENLS (3.1), obtém-se:

$$i \frac{\partial \delta E}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \left( \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right) - \delta N E_0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \delta N}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (2\gamma E_0 \delta E - \delta N) \quad (3.17)$$

definindo as transformadas de Fourier:

$$\delta E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (3.18)$$

$$\delta \Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \phi(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (3.19)$$

$$\delta N(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta n(z, \Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (3.20)$$

Logo temos o conjuntos de equações:

$$i \frac{\partial \delta e}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \left( \frac{\partial^2 \delta e}{\partial t^2} + i E_0 \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial t^2} \right) - \delta n E_0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (2\gamma E_0 \delta e - \delta n) \quad (3.22)$$

Para campos harmônicos:

$$i \frac{\partial \delta e}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} ((-i\Omega)^2 \delta e + i E_0 (-i\Omega)^2 \delta \phi) - \delta n E_0 \quad (3.23)$$

$$(-i\Omega) \delta n = \frac{1}{\tau} (2\gamma E_0 \delta e - \delta n) \quad (3.24)$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos o seguinte grupo de equações:

Separando as partes imaginária e real, respectivamente:

$$\frac{\partial \delta e}{\partial z} = -\frac{\beta_2 \Omega^2 E_0}{2} \delta \phi - \frac{2\Omega \tau \gamma |E_0|^2}{1 + \Omega^2 \tau^2} \delta e \quad (3.25)$$

$$E_0 \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} = \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} \delta e + \frac{2\gamma |E_0|^2}{1 + \Omega^2 \tau^2} \delta e \quad (3.26)$$

E portanto,

$$\frac{\partial^2 \delta e}{\partial z^2} - \left( -\frac{2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} \right) \frac{\partial \delta e}{\partial z} + \left[ \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} \right)^2 + \frac{\beta_2\Omega^2\gamma|E_0|^2}{1 + \Omega^2\tau^2} \right] \delta e = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial z^2} - \left( -\frac{2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} \right) \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} + \left[ \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} \right)^2 + \frac{\beta_2\Omega^2\gamma|E_0|^2}{1 + \Omega^2\tau^2} \right] \delta \phi = 0 \quad (3.28)$$

Ambas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta e}{\partial z^2} - \alpha_1 \frac{\partial \delta e}{\partial z} + \alpha_2 \delta e &= 0, \\ \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial z^2} - \alpha_1 \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} + \alpha_2 \delta \phi &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

E, conseqüentemente a relação de dispersão é dada por:

$$K^2 + iK\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad (3.30)$$

Desta maneira, podemos perceber após cálculos simples, que podemos escrever a relação de dispersão como:

$$\left[ K - i \left( \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right) \right] \times \left[ K - i \left( \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right) \right] = 0, \quad (3.31)$$

onde,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{\beta_2\Omega^2}{2} \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{2\gamma|E_0|^2}{1 + \Omega^2\tau^2} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

Partindo de (3.29), o ganho definido por  $g(\Omega) = 2|\Im m(k)|$  é

$$g(\Omega) = \alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}. \quad (3.33)$$

Como a eq. (3.30) é um polinômio de ordem 2 com coeficientes complexos, as soluções podem ser complexas e distintas. Então, os espectros podem apresentar dois espectros de ganho distintos. Se a frequência  $\Omega$ ,  $g(\Omega) \neq 0$ , as componentes do ruído crescem exponencialmente de acordo com a expressão:

$$\begin{aligned} \delta e(z, \Omega) &= \delta e(0, \Omega) e^{g(\Omega)z/2}, \\ \delta \phi(z, \Omega) &= \delta \phi(0, \Omega) e^{g(\Omega)z/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

A partir da transformada de Fourier de  $\Delta\Phi(z, t)$  utilizando as eqs. (3.18) e (3.34), obtemos

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \delta\phi(0, \Omega) e^{ikz} [e^{(-i\Omega t)} - 1] d\Omega + \text{c.c.}, \quad (3.35)$$

Onde c.c. representa o conjugado complexo. Como sabemos, para um processo estocástico é conhecido que

$$\langle \delta\phi^*(0, \Omega) \delta\phi(0, \Omega') \rangle = S_\Phi(0, \Omega) \delta(\Omega - \Omega'), \quad (3.36)$$

Onde, a densidade espectral das flutuações da fase incidente  $\delta\Phi(0, t)$  são dadas por  $S_\Phi(0, \Omega)$ . Assim, a variância de fase pode ser calculada através da equação:

$$\langle (\Delta\Phi)^2(z, t) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S_\Phi(0, \Omega) [1 - \cos(\Omega t)] [e^{g(\Omega)z} - 1] d\Omega. \quad (3.37)$$

Assumindo que a forma da linha espectral do laser possui um perfil Lorentziano, nós temos que  $S_{\Phi}(0, \Omega) = \frac{2\pi\Delta\nu}{\Omega^2}$  e  $\langle(\Delta\Phi)^2(0, t)\rangle = 2\pi\Delta\nu t$ , onde  $\Delta\nu$  é a largura de meia altura (FWHM - full width at half maximum). Ao propagar-se por uma distância  $L$  dentro da fibra, utilizando as mudanças de variáveis (2.51), nós finalmente encontramos que a variância de fase é dada por:

$$\langle(\Delta\Phi)^2(L, t')\rangle = 2\pi\Delta\nu \left\{ t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega_c} [1 - \cos(\Omega t')] [e^{g(\Omega)L} - 1] \frac{d\Omega}{\Omega^2} \right\}, \quad (3.38)$$

Onde  $\Omega_c$  denota a frequência crítica em que o ganho  $g(\Omega) \approx 0$  para  $\Omega > \Omega_c$ , e pode ser estimado numericamente através da análise do espectro de ganho fornecido por (3.33). Para esta situação dois espectros de ganhos irão surgir, porém como o ganho representa uma amplificação nas perturbações baseado na característica natural do sistema sempre convergir para a situação de maior desordem é razoável que levemos em conta apenas o maior deles. Nossos resultados analíticos apenas são válidos para  $L \sim L_{NL} = (\gamma|E_0|^2)^{-1}$ . Para o caso em que,  $L \gg L_{NL}$ , as flutuações nas amplitudes podem ser comparáveis com a intensidade média da onda incidente, e consequentemente nossas considerações não são razoáveis.

## 3.2 Discussão dos resultados

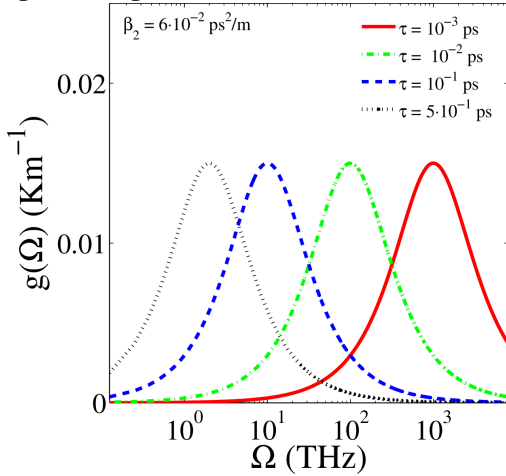
Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados os seguintes parâmetros:  $\beta_2 = \pm 0.06$  ps/m,  $\gamma = 0.015$  W<sup>-1</sup>/m,  $|E_0|^2 = 1$  W, dois valores representativos para a largura à meia altura ( $\Delta\nu = 0.008$  THz e  $\Delta\nu = 0.08$  THz), e  $\tau = 0 - 10$  ps.

### 3.2.1 Regime de dispersão normal

Para ilustrar o papel do tempo de resposta finita na IM devido a automodulação de fase e das propriedades estatísticas, vamos considerar o caso da resposta não linear instantânea ( $\tau = 0$ ), isto é,  $\alpha_1 = 0$  e portanto (3.30) se torna uma equação polinomial com coeficientes reais e, havendo alguma solução complexa, o seu conjugado complexo também deve ser considerado. E então, apenas um espectro pode aparecer. Analisando as eqs. (3.32) e (3.33) percebemos que para  $\tau = 0$ ,

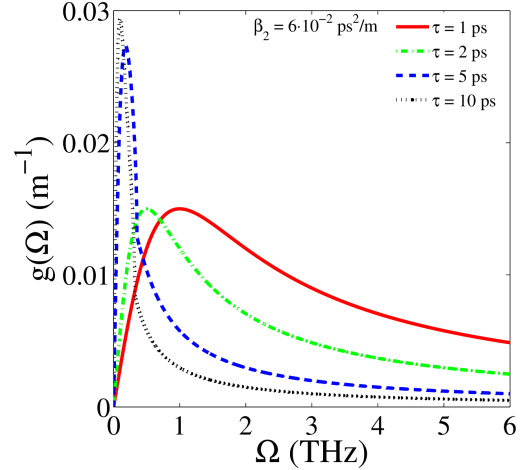
não há nenhum espectro esperado para o regime de dispersão normal  $\beta_2 > 0$ . Basicamente, neste caso a componente de frequência  $\Omega$  experimenta um shift de fase  $Kz$  e sua amplitude permanece inalterada. De modo que, as propriedades estatísticas também permanecem inalteradas, com a variância de fase crescendo linearmente com o tempo.

Figura 3.1: Espectro de ganho para diversos valores para o atraso  $\tau$  para respostas rápidas.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.2: Espectro de ganho para diversos valores para o atraso  $\tau$  para respostas lentas.



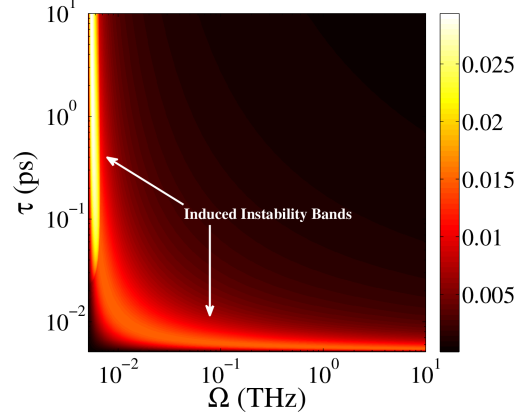
Fonte: Produzido pelo autor.

Porém para  $\tau \neq 0$  a situação muda radicalmente para o regime de dispersão normal. O retardo na resposta não linear estimula o crescimento de uma banda de estabilidade.

Para pequenos valores de  $\tau$  (regime de resposta rápida), devido ao tempo de resposta ser crescente, a banda é deslocada em direção às frequências mais baixas com valor de ganho máximo praticamente constante, conforme (3.1). Isso foi demonstrado por [13], através da análise da estabilidade de um campo determinístico cujo ganho máximo decai com  $\frac{1}{\tau}$ . Entretanto, no regime de resposta lenta (para grandes valores de  $\tau$ ), notasse que o ganho máximo cresce com  $\tau$ , como podemos ver na figura (3.2)

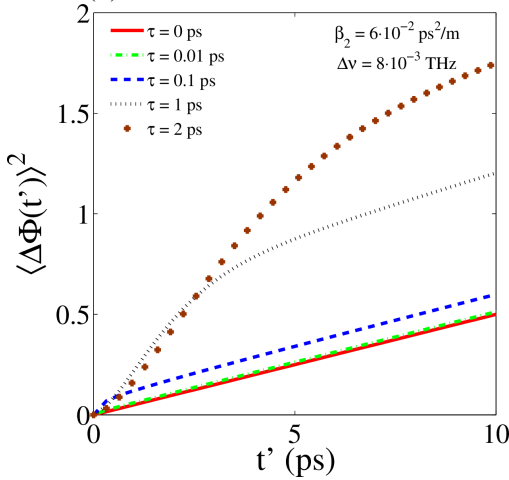
O papel desempenhado pelo tempo de resposta  $\tau$  no espectro da IM pode ser melhor investigado através da variação contínua de  $\tau$  como mostra a fig. (3.3). Podemos visualizar que a banda de instabilidade é deslocado em direção às frequências mais baixas quando  $\tau$  cresce. Notamos também que, para um determinado valor fixo de  $\tau$  há uma banda induzida de instabilidade e quando esse parâmetro for crescente ocorre o deslocamento da banda instável, adquirindo o fator de ganho relevante, como podemos ver na parte escura da figura.

Figura 3.3: Ganho máximo como função da frequência  $\Omega$  e o tempo de resposta  $\tau$  para o regime normal  $\beta_2 > 0$ .



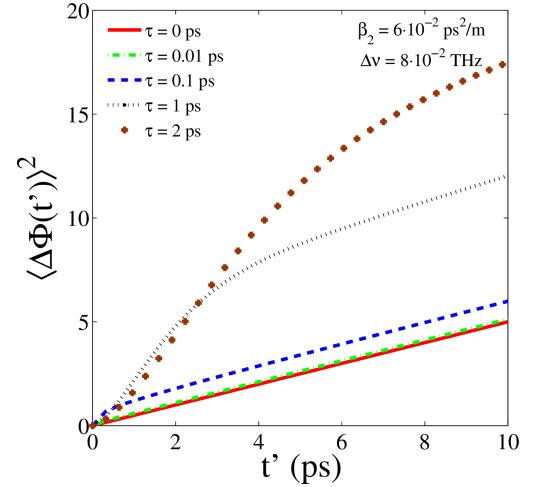
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.4: Variância de fase como função do tempo para alguns valores específicos da resposta não linear retardada: (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.5: Variância de fase como função do tempo para alguns valores específicos da resposta não linear retardada: (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz.



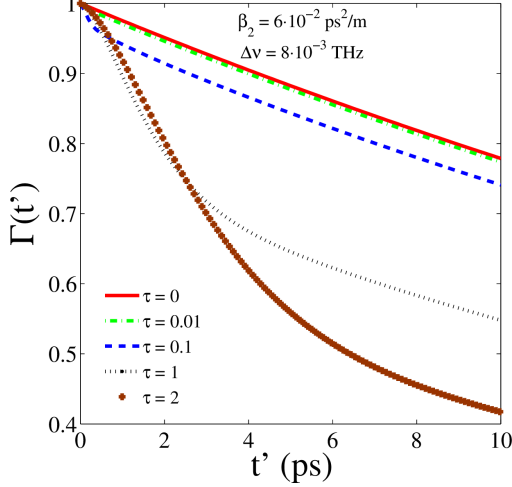
Fonte: Produzido pelo autor.

A partir de (3.38) e dos aspectos gerais supracitados, podemos perceber que, como  $\tau$  induz uma banda de instabilidade para esse regime de dispersão, a integral não desaparece durante o crescimento da variância de fase. A principal contribuição para o espectro óptico é fornecido a partir das flutuações de fase. Podemos extrair as outras propriedades estatísticas.

Após analisarmos os efeitos do tempo de resposta na IM, demonstraremos como esta amplificação no ruído modifica as propriedades de coerência e espectral de um pulso parcialmente coerente pelo cálculo numérico da variância de fase dado por (3.38). Como discutido anteriormente, depois

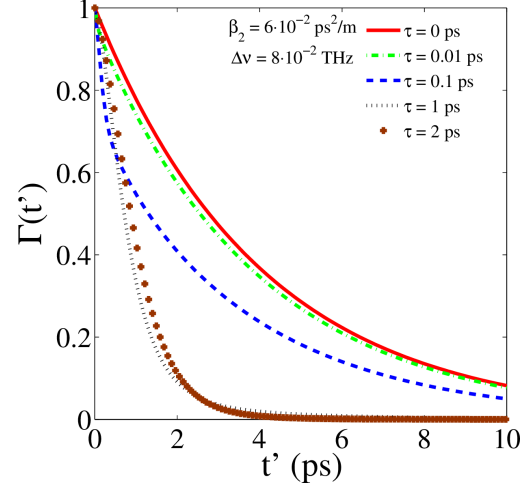


Figura 3.6: Função de correlação ou coerência em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ : (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.7: Função de correlação ou coerência em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ : (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

de computar a variância iremos determinar a forma das linhas espectrais a partir do teorema de Wiener-Khintchine.

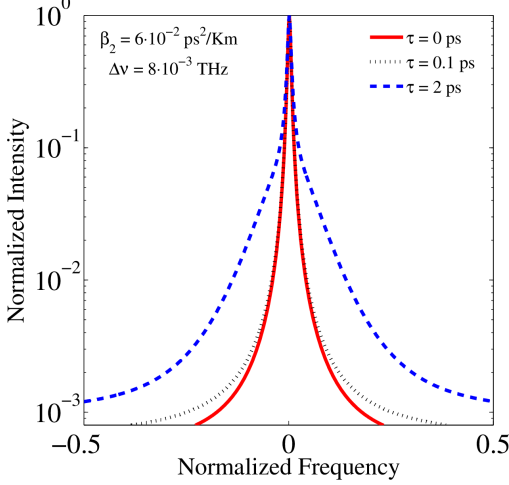
Como  $\tau$  é crescente, as flutuações na fase são os causadores da degradação da luz transmitida. Esses efeitos são mostrados nas figuras (1.4) e (1.5). De qualquer maneira, nenhuma mudança são observadas independente do valor grande ou pequeno para a largura de banda do pulso incidente. Em [14], foi mostrado que as distorções no espectro de potências ou surgimento de bandas explicitamente estão associados a estrutura oscilatória na variância de fase e na função de autocorrelação.

Para investigar o espectro de potência, nós extrairemos numericamente a transformada de Fourier da função de autocorrelação, para os valores de referência adotados para a resposta rápida e lenta do sistema.

Como esperado, o resultado é mostrado em (1.6). Embora a banda de instabilidade seja induzida no espectro de ganho, a forma da linha espectral não se alterará, uma vez que não foi verificado a existência de estruturas oscilatórias nas propriedades estatísticas calculadas anteriormente.

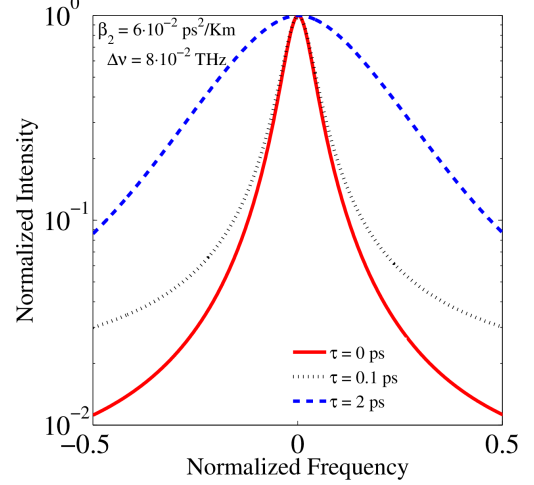
Na próxima seção, consideraremos o caso em que  $\beta_2 < 0$ , o regime de dispersão anômala. Neste regime as bandas laterais convencionais estão relacionados além do aumento da variância de fase e correlação, também estão conectados com o comportamento oscilatório que surgirá nas grandezas estatísticas consideradas.

Figura 3.8: Espectro de potências correspondentes para as funções de autocorrelação na figura (1.5): (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.9: Espectro de potências correspondentes para as funções de autocorrelação na figura (1.5): (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz.



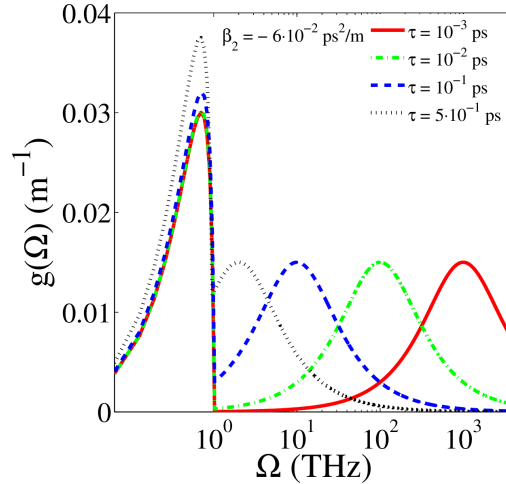
Fonte: Produzido pelo autor.

### 3.2.2 Regime de dispersão anômala

Mais uma vez, vamos analisar como o espectro de ganho é influenciado pelo para de retardo  $\tau$ . Mostraremos que, para o regime de dispersão anômala, tanto o espectro quanto as propriedades estatísticas apresentam um comportamento mais rico que o da dispersão normal. Isso ocorre devido às bandas induzidas de instabilidade receberem influência da ambos mecanismos: tanto o regime de dispersão anômalo por si só, quanto do tempo de resposta [13]. Para a resposta instantânea  $\tau = 0$ , observa-se apenas a banda convencional no lugar das frequências mais baixas. Neste caso, o ganho e o intervalo de frequências para existência dessa banda são determinados por (3.29) e (3.30). Entretanto, quando as duas contribuições coexistem uma nova banda de instabilidade é induzida para frequências mais altas, e por isso, uma banda Raman.

Neste regime de dispersão, para sistemas com pouco retardo, como podemos visualizar, duas bandas estão presentes. A banda convencional está relacionada com as energias mais baixas e a banda de altas energias relacionada com a banda Raman em que  $\tau$  é responsável pelo surgimento desta última. Note que o ganho máximo da banda Raman é praticamente independente de  $\tau$ , mas sua  $\Omega_{\max}$  decai com o parâmetro obedecendo a relação  $\frac{1}{\tau}$  [13]. Por outro lado, a frequência otimizada da banda convencional é praticamente a mesma para os diversos valores de  $\tau$  utilizado

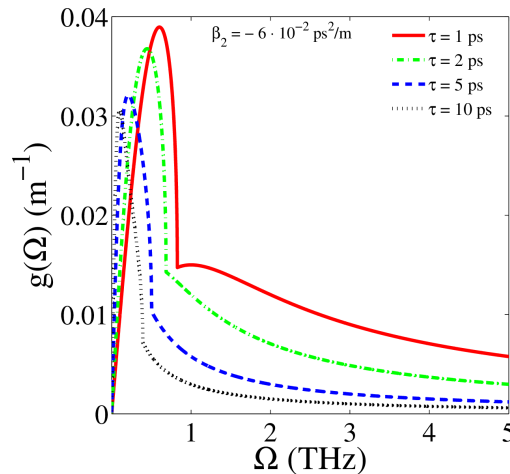
Figura 3.10: Espectro de ganho para diferentes valores de  $\tau$ ,  $\beta_2 = -0.06 \text{ ps}^2/\text{m}$ . Meios com resposta rápida.



Fonte: Produzido pelo autor.

em (3.10).

Figura 3.11: Espectro de ganho para diferentes valores de  $\tau$  para  $\beta_2 = -0.06 \text{ ps}^2/\text{m}$ . Meios com resposta lenta.



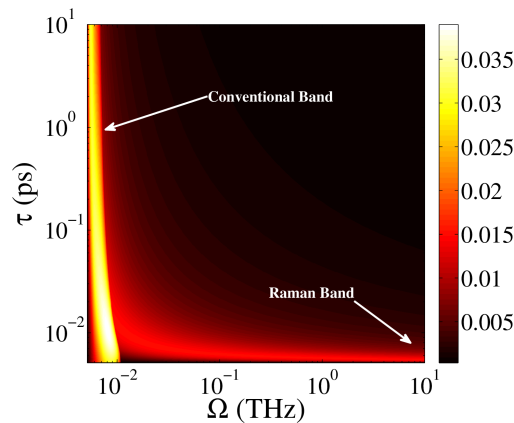
Fonte: Produzido pelo autor.

Para meios ópticos não lineares que a resposta é lenta, a relaxação da não linearidade apresenta apenas um “deslize” da banda convencional. Entretanto, a banda Raman induzida se estende aumentando o intervalo das frequências instáveis. Como  $\tau$  é crescente, as duas bandas se fundem uma com a outra para baixas frequências e o ganho máximo é reduzido razoavelmente e consequentemente, as duas bandas não são bem distintas. Essa coalescência entre as bandas é mostrada na fig. (3.11). Quando as bandas são emergidas e o ganho máximo é reduzida, a frequência cor-

respondente do  $g_{\max}$  decrescem proporcionalmente a  $\frac{1}{\tau^{1/3}}$  e a redução do máximo obedece a lei de potência  $\frac{1}{\tau^{2/3}}$  conforme [13].

Esses aspectos gerais da influência do tempo de resposta podem ser visualizados no fig.(3.12) onde o degradê de cores mostra o ganho máximo como função da frequência e do tempo de resposta finito  $\tau$ . A banda de frequências mais baixas corresponde à instabilidade inerente do meio respondendo instantaneamente. Essa figura demonstra claramente a rapidez do aumento do deslocamento da banda Raman para a coalescência final destas bandas de instabilidade.

Figura 3.12: Ganho máximo como função da frequência  $\Omega$  e do tempo de resposta não linear  $\tau$  para o regime anômalo.



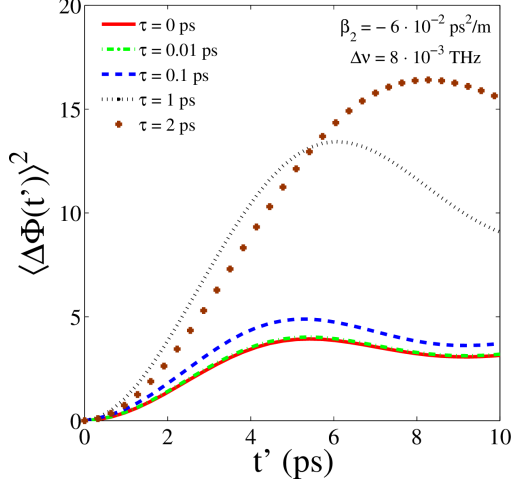
Fonte: Produzido pelo autor.

Novamente, a partir de (3.38) e  $\tau \neq 0$ , não apenas alarga o intervalo de frequências da instabilidade modulacional, como também cria uma nova banda espectral, que por sua vez, aumenta o limite superior da integral nesta equação e aumentando também a variância de fase e outras propriedades estatísticas significativas como mencionamos anteriormente.

Na fig. (1.10) plotamos a variância de fase como função do tempo para alguns valores representativos para o tempo de resposta finito  $\tau$  para dois valores diferentes da largura de banda  $\Delta\nu$  do campo. Como mostrado em [14] nos casos em que a variância de fase é crescente e possuem uma estrutura oscilatória essas características estão associadas à bandas laterais espectrais da IM. Para ambos valores de  $\Delta\nu$ , a propagação não linear relaxada é responsável não apenas pelo crescimento da variância de fase mas também pela criação da estrutura oscilatória.

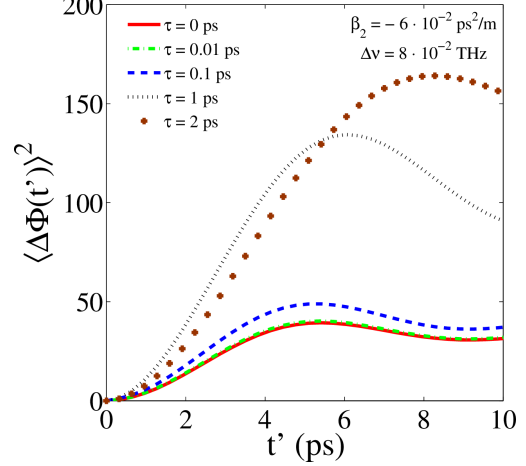
Espera-se que o crescimento das flutuações de fase degrade a coerência de pulsos ópticos propagantes. Na fig. (1.11), mostramos a função de autocorrelação ou de coerência,  $\Gamma(z, t)$ , dada por (3.11) correspondente a variância de fase mostrada na fig. (1.10).

Figura 3.13: Variância de fase em função do tempo para valores distintos de  $\tau$  no regime anômalo: (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz.



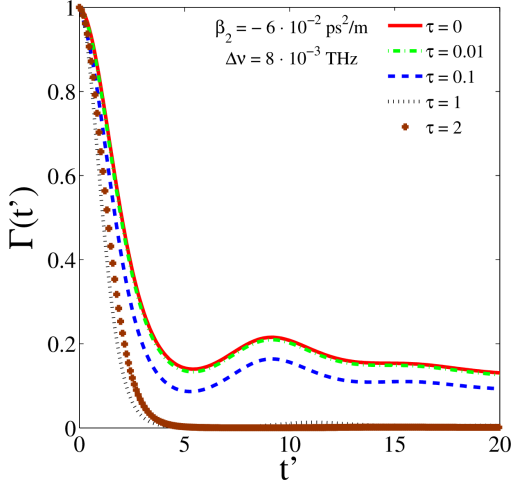
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.14: Variância de fase em função do tempo para valores distintos de  $\tau$  no regime anômalo: (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz.



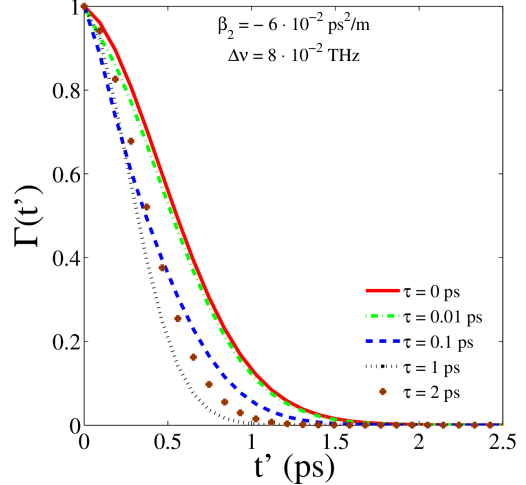
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.15: Função de autocorrelação em função do tempo para valores distintos de  $\tau$  no regime anômalo: (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

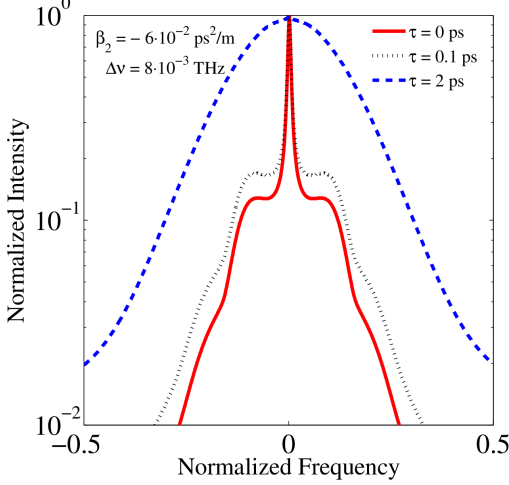
Figura 3.16: Função de autocorrelação em função do tempo para valores distintos de  $\tau$  no regime anômalo: (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz.



Fonte: Produzido pelo autor.

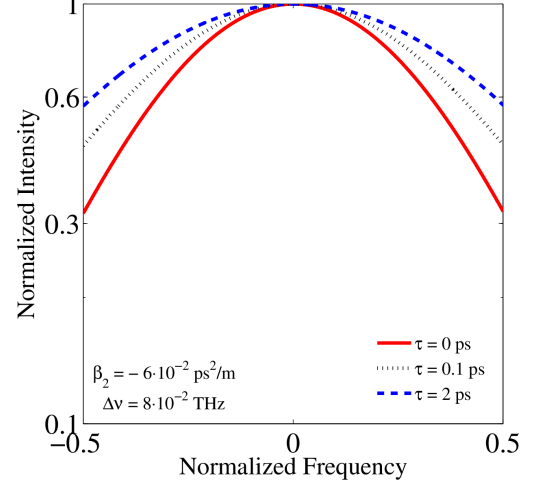
Essas figuras mostram claramente que o nível de degradação de coerência depende da largura de banda  $\Delta\nu$  do pulso inicial e do tempo de resposta finita do meio em questão. Vemos também que apenas para a largura de banda menor o caráter oscilatório está presente tanto na variância de fase quanto na função de autocorrelação.

Figura 3.17: Linhas espectrais correspondendo as funções de autocorrelação mostradas na fig. (3.15): (a)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-3}$  THz e para  $\beta_2 = -0.06$  ps<sup>2</sup>/m.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3.18: Linhas espectrais correspondendo as funções de autocorrelação mostradas na fig. (3.16): (b)  $\Delta\nu = 8 \cdot 10^{-2}$  THz para  $\beta_2 = -0.06$  ps<sup>2</sup>/m.



Fonte: Produzido pelo autor.

Investigamos numericamente a forma das linhas espectrais através do teorema de Wiener-Khintchine, a partir da função de autocorrelação encontrada para dois valores representativas da resposta atrasada, um deles no regime de resposta lenta e outro no regime de resposta rápida. Na mesma figura com objetivo comparativo, plotamos também o caso convencional para ( $\tau = 0$ ) na fig. (1.12).

Este aumento das flutuações de fase induzida pelo retardo no tempo de resposta, do pulso inicial são a fonte para o surgimento das instabilidades modulacionais identificados pelas bandas laterais na [1.12(a)] para os valores de  $\tau$  explicitados. Entretanto, para um pulso de luz com largura de banda grande, esses efeitos podem não serem facilmente visualizados, como mostrado na fig. [1.12(b)]. Esse resultado é esperado desde que a linha central pode se alargar a ponto de se fundir com as bandas laterais.

Essas características podem ser utilizadas para entender o papel que as oscilações das flutuações desempenham como fonte da instabilidade modulacional. Quando um comportamento oscilatório está presente na variância de fase e na função de correlação, bandas laterais semelhantes serão visualizadas, causando distorção nas linhas espectrais, como mostrado em [14]. Não obstante, a interação entre o tempo de resposta finito e a largura de onda do pulso inicial são também cruciais para alterações abruptas na forma das linhas espectrais.

Os resultados, para os regimes normal e anômalos, exibem uma importante diferença com a dinâmica de ondas incoerentes com resposta não linear relaxada, que exhibe apenas IM para um regime em que  $\tau \gg \tau_{MI} = 2\pi\sqrt{\beta_2 L_{NLI}/2}$ , onde  $\tau_{MI}$  representa o período temporal da IM [38]. Nós, consideramos em nosso trabalho que a relação  $\tau \sim \tau_{MI} \sim 10$  ps é obedecida. Onde a dinâmica de ondas incoerentes é conhecida por ser descrita através de uma equação cinética (turbulência de Langmuir fraca) que não retrata a IM para meios respondendo rapidamente [55, 56, 57].

Em suma, neste capítulo estão apresentadas as nossas investigações acerca da propagação de pulsos parcialmente coerentes em um meio não linear dispersivo com resposta do tipo Kerr não instantânea através de um modelo de difusão de fase, assumindo ser um campo médio intenso independente do tempo cujos ruídos estocásticos aparecem como pequenas flutuações nos valores médios da amplitude e da fase. Para isso, utilizamos um conjunto de ENLS acopladas com o modelo de relaxação de Debye incorporado.

Demonstramos como o tempo de resposta finita muda o espectro de ganho e algumas propriedades estatísticas de segunda ordem durante a propagação do pulso para o meio exibindo dispersão da velocidade de grupo normal e anômala, nos regimes de resposta rápida e lenta. Mostramos também que se o meio apresentar um atraso considerável, a resposta usual Kerr deve ser substituído por um comportamento não usual, especialmente a partir de algumas pesquisas recentes na produção de fibras de cristais fotônicos dopados com materiais mostrando respostas muito atrasadas [58], complementando o entendimento total do fenômeno.

Para dispersão normal, a banda de instabilidade é induzida pela resposta não linear do material, porém as linhas espectrais não mudam consideravelmente. No caso da dispersão anômala, a banda Raman emerge e sob certas condições as flutuações na fase mostraram um estrutura oscilatória temporal, que é responsável pela bandas laterais características relacionadas pela IM. Aqui, prevemos a existência da IM em um regime que a IM não ocorre para ondas genuinamente incoerentes. Por fim, tais resultados acerca da relaxação da não linearidade estão aqui propostas para testes experimentais em todos sistemas físicos em que a IM podem ocorrer.

# Capítulo 4

## Amplificação de ruído em um meio com resposta não linear atrasada no regime de dispersão zero

### 4.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar os últimos resultados inéditos deste trabalho ainda não publicados. Aqui, nossa atenção está concentrada em analisar teoricamente as propriedades estatísticas influenciadas pela IM em um pulso parcialmente coerente se propagando dentro de um meio não linear dispersivo, com resposta não linear atrasada em um regime de dispersão mínima. Os estudos apresentados aqui complementam o trabalho desenvolvido em [20], para pulsos parcialmente coerentes. Na região de dispersão mínima, apenas pulsos ultracurtos são considerados, e em virtude disto, os sistemas que sofrerão influência da IM serão aqueles em que o tempo de resposta é relativamente curto.

Para esta análise, utilizamos uma ENLS estendida e modificada, em que o tempo de resposta do sistema é descrito através do modelo de relaxação de Debye e o caráter estocástico dos campos é incorporado através de um modelo de difusão de fase.



## 4.2 Propagação de pulsos luminosos em meios não lineares com resposta não linear atrasada para ( $\lambda \approx \lambda_D$ )

Considere um pulso incidente em uma fibra. A equação que descreve a propagação dessa onda dentro da fibra com resposta não instantânea para o campo elétrico obedecendo a aproximação do envelope lentamente variável é dada por:

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - \gamma N(z, t) E(z, t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N(z, t) + \gamma |E(z, t)|^2) \quad (4.2)$$

Para o comprimento de onda do pulso propagante próximo a  $\lambda_D$ , ou seja, no regime de dispersão zero, iremos utilizar a ENLS estendida em conjunto com o modelo de relaxação de Debye. Desta forma, a eq. (4.1) deve ser reescrita incorporando estas condições supracitadas. Assim,

$$i \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 E(z, t)}{\partial t^3} - \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 E(z, t)}{\partial t^4} - N(z, t) E(z, t) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N(z, t) + \gamma |E(z, t)|^2) \quad (4.4)$$

Mais uma vez, note que no limite de  $\tau \rightarrow 0$ , recupera-se a eq. (2.53). O objetivo na utilização deste modelo é estudar como as propriedades estatísticas influenciam a IM neste regime de dispersão para um meio com resposta atrasada. No capítulo anterior, verificamos como tais propriedades influenciavam nas bandas de instabilidades em regimes de resposta lenta e rápida do meio. A existência do atraso enriquece o sistema no surgimento da IM, uma vez que quando  $\tau = 0$ , o único regime que sustenta a IM é o regime dispersivo anômalo onde  $K \in \Im m$ . Os estudos apresentados neste capítulo complementam os trabalhos realizados para pulsos determinísticos em meios não lineares com resposta instantânea [44]-[46]. Para pulsos ultracurtos na ordem de fs, na região de dispersão mínima, verifica-se que o efeito da IM só se torna significativo para sistemas que possuam resposta não linear rápida. De agora em diante, iremos deduzir analiticamente o es-

pectro de ganho a partir de (4.3) introduzindo o modelo de difusão de fase utilizado neste trabalho. Sendo assim, escrevendo o campo estocástico propagante como:

$$E(z, t) = (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\Phi_0 + \delta\Phi)} \quad (4.5)$$

$$N(z, t) = N_0 + \delta N(z, t) \quad \therefore \quad \Phi_0 = \gamma|E_0|^2 z \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) em (4.3), e considerando apenas os termos lineares em  $\delta E$  e  $\delta\Phi$  conseguimos obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \delta E}{\partial z} - (E_0 + \delta E) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} \right) &= \frac{\beta_2}{2} \left( \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right) + i \frac{\beta_3}{6} \left( \frac{\partial^3 \delta E}{\partial t^3} + i E_0 \frac{\partial^3 \delta \Phi}{\partial t^3} \right) \\ &- \frac{\beta_4}{24} \left( \frac{\partial^4 \delta E}{\partial t^4} + i E_0 \frac{\partial^4 \delta \Phi}{\partial t^4} \right) - (N_0 + \delta N)(E_0 + \delta E) \\ \frac{\partial \delta N}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (-N_0 - \delta N + \gamma|E|^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \delta E}{\partial z} - (E_0 + \delta E) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} \right) &= - \sum_{n=2}^4 i^n \frac{\beta_n}{n!} \left( \frac{\partial^n \delta E}{\partial t^n} + i E_0 \frac{\partial^n \delta \Phi}{\partial t^n} \right) - (N_0 + \delta N)(E_0 + \delta E) \\ \frac{\partial \delta N}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (-N_0 - \delta N + \gamma|E|^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

reorganizando as equações:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \delta E}{\partial z} - E_0 \frac{\partial \delta \Phi}{\partial z} &= \frac{\beta_2}{2} \left( \frac{\partial^2 \delta E}{\partial t^2} + i E_0 \frac{\partial^2 \delta \Phi}{\partial t^2} \right) + i \frac{\beta_3}{6} \left( \frac{\partial^3 \delta E}{\partial t^3} + i E_0 \frac{\partial^3 \delta \Phi}{\partial t^3} \right) \\ &- \frac{\beta_4}{24} \left( \frac{\partial^4 \delta E}{\partial t^4} + i E_0 \frac{\partial^4 \delta \Phi}{\partial t^4} \right) - \delta N E_0 \\ \frac{\partial \delta N}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (2\gamma E_0 \delta E - \delta N) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para encontrarmos o espectro de ganho, iremos transferir o nosso problema para o domínio das

frequências através do método de Fourier. Para isso, definiremos as transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned}\delta E(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta e(K, \Omega) e^{iKz} e^{-i\Omega t} d\Omega dK, \\ \delta \Phi(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \phi(K, \Omega) e^{iKz} e^{-i\Omega t} d\Omega dK, \\ \delta N(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta n(K, \Omega) e^{iKz} e^{-i\Omega t} d\Omega dK,\end{aligned}$$

Dessa maneira, podemos extrair a seguinte relação:

$$\delta n = \frac{2\gamma E_0}{1 + \Omega^2 \tau^2} (1 - i\Omega\tau) \delta e \quad (4.10)$$

Separando as partes imaginária e real de (4.9) e extraindo as transformadas de Fourier:

$$-iK\delta e + \frac{\beta_2 E_0}{2} \Omega^2 \delta \phi + i\frac{\beta_3 E_0}{6} \Omega^3 \delta e + \frac{\beta_4 E_0}{24} \Omega^4 \delta \phi - \frac{2\gamma |E_0|^2 \Omega \tau}{1 + \Omega^2 \tau^2} \delta e = 0 \quad (4.11)$$

$$iK E_0 \delta \phi + \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 \delta e - i\frac{\beta_3 E_0}{6} \Omega^3 \delta \phi + \frac{\beta_4}{24} \Omega^4 \delta e + \frac{2\gamma |E_0|^2}{1 + \Omega^2 \tau^2} \delta e = 0 \quad (4.12)$$

Agora, podemos reescrever da forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -iA - C\Omega\tau & E_0 B \\ B + C & iE_0 A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta e \\ \delta \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

onde:

$$A = K - \frac{\beta_3 \Omega^3}{6} \quad (4.14)$$

$$B = \frac{\beta_2 \Omega^2}{2} + \frac{\beta_4 \Omega^4}{24} \quad (4.15)$$

$$C = \frac{2\gamma |E_0|^2}{1 + \Omega\tau} \quad (4.16)$$

Para que a equação (4.13) admita solução não-trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo, ou seja,  $K$  obedeça a seguinte relação de dispersão:

$$K^2 + iK \left( \frac{-2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} + i\frac{\beta_3\Omega^3}{6} \right) + \left( \left( \frac{\beta_3\Omega^3}{6} \right)^2 + i\frac{\beta_3\Omega^3}{6} \left( \frac{2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} \right) - \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{\beta_4\Omega^4}{24} \right) \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{\beta_4\Omega^4}{24} + \frac{2\gamma|E_0|^2}{1 + \Omega\tau} \right) \right) = 0$$

reescrevendo,

$$\alpha_1 \equiv \left( \frac{-2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} + i\frac{\beta_3\Omega^3}{6} \right)$$

$$\alpha_2 \equiv - \left( \left( \frac{\beta_3\Omega^3}{6} \right)^2 + i\frac{\beta_3\Omega^3}{6} \left( \frac{2\gamma|E_0|^2\Omega\tau}{1 + \Omega^2\tau^2} \right) - \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{\beta_4\Omega^4}{24} \right) \left( \frac{\beta_2\Omega^2}{2} + \frac{\beta_4\Omega^4}{24} + \frac{2\gamma|E_0|^2}{1 + \Omega\tau} \right) \right)$$

e com a relação de dispersão:

$$K^2 + iK\alpha_2 - \alpha_2 = 0 \tag{4.17}$$

Podemos calcular o ganho de maneira análoga a [20],

$$\left[ K - i \left( \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right) \right] \times \left[ K - i \left( \frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2} \right) \right] = 0, \tag{4.18}$$

como, o ganho é definido por  $g(\Omega) = 2|\Im m(K)|$ , sabemos que o mesmo é dado por:

$$g(\Omega) = \alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}. \tag{4.19}$$

Analisando a eq. (4.19) matematicamente, percebemos que o espectro de ganho pode se apresentar em dois espectros distintos. O ganho da IM representa uma “medida de desordem”no

sistema, e naturalmente verificam-se que os sistemas físicos tendem a selecionar o estado de maior desordem. Assim, o espectro de ganho fisicamente mais aceitável se dá para o qual  $g(\Omega)$  possui o maior valor. Não obstante, a eq. (4.19) nos sugere que as componentes do ruído cresçam exponencialmente, de acordo com:

$$\begin{aligned}\delta e(z, \Omega) &= \delta e(0, \Omega)e^{g(\Omega)z/2}, \\ \delta \phi(z, \Omega) &= \delta \phi(0, \Omega)e^{g(\Omega)z/2},\end{aligned}\tag{4.20}$$

E assim, extrair as propriedades estatísticas de nosso interesse. Como estamos considerando apenas uma onda propagante no meio, calcularemos a função de autocorrelação do pulso, por definição:

$$\Gamma(z, t) = \langle E^*(z, 0)E(z, t) \rangle,\tag{4.21}$$

Em conjunto com sua transformada de Fourier,

$$S(z, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z, t)e^{i\Omega t} dt.\tag{4.22}$$

substituindo (4.5) em (4.21), temos:

$$\begin{aligned}\Gamma(z, t) &= \langle E^*(z, 0)E(z, t) \rangle = \langle (E_0 + \delta E(z, 0)) (E_0 + \delta E(z, t)) e^{i(\delta\Phi(z,t) - \delta\Phi(z,0))} \rangle \\ \Gamma(z, t) &= |E_0|^2 \langle e^{i\Delta\Phi} \rangle + E_0 \langle [\delta E(z, 0) + \delta E(z, t)] e^{i\Delta\Phi} \rangle\end{aligned}\tag{4.23}$$

onde:

$$\Delta\Phi = \delta\Phi(z, t) - \delta\Phi(z, 0)$$

A contribuição predominante como já vimos anteriormente, é o primeiro termo. Os demais termos representam respectivamente, as contribuições do acoplamento entre o ruído na amplitude

e na fase do campo E. Desta maneira, considerando apenas o primeiro termo, e devido ao grande número de átomos envolvidos na geração da aleatoriedade na fase do pulso, admitiremos que  $\Delta\Phi$  possua caráter Gaussiano na propagação,

$$\Gamma(z, t) \approx |E_0|^2 e^{-\frac{(\Delta\Phi)^2}{2}}, \quad (4.24)$$

Mais uma vez, o sistema não linear pode ser considerado com um comportamento linear no que diz respeito as flutuações.

A partir da transformada de Fourier de  $\Delta\Phi(z, t)$  utilizando as eqs. (4.10) e (4.20), obtemos

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \delta\phi(0, \Omega) e^{ikz} [e^{(-i\Omega t)} - 1] d\Omega + \text{c.c.}, \quad (4.25)$$

onde c.c. representa o conjugado complexo. De acordo com a eq. (2.17), temos:

$$\langle \delta\phi^*(0, \Omega) \delta\phi(0, \Omega') \rangle = S_\Phi(0, \Omega) \delta(\Omega - \Omega'), \quad (4.26)$$

onde, a densidade espectral das flutuações da fase incidente  $\delta\Phi(0, t)$  pode ser fornecida por  $S_\Phi(0, \Omega)$ . Assim, a variância de fase pode ser calculada por,

$$\langle (\Delta\Phi)^2(z, t) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S_\Phi(0, \Omega) [1 - \cos(\Omega t)] [e^{g(\Omega)z} - 1] d\Omega. \quad (4.27)$$

Levamos em conta também, que a linha espectral do laser possui um perfil Lorentziano. Consequentemente,  $S_\Phi(0, \Omega) = \frac{2\pi\Delta\nu}{\Omega^2}$  e  $\langle (\Delta\Phi)^2(0, t) \rangle = 2\pi\Delta\nu t$ , onde  $\Delta\nu$  é a largura de meia altura. Na propagação no meio por uma distância  $L$ , utilizando os artifícios (2.51), a variância de fase é dada por:

$$\langle (\Delta\Phi)^2(L, t') \rangle = 2\pi\Delta\nu \left\{ t + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega_c} [1 - \cos(\Omega t')] [e^{g(\Omega)L} - 1] \frac{d\Omega}{\Omega^2} \right\}, \quad (4.28)$$

onde,  $\Omega_c$  denota a frequência crítica em que o ganho  $g(\Omega) \approx 0$  para  $\Omega > \Omega_c$ , e deve ser estimado numericamente através da análise de (4.19). Repetidamente nesse caso, nossos resultados analíticos apenas são válidos para  $L \sim L_{NL} = (\gamma|E_0|^2)^{-1}$ . Para o caso em que,  $L \gg L_{NL}$ , as flutuações nas amplitudes podem ser comparáveis com a intensidade média da onda incidente e nossos resultados apresentados aqui não correspondem a uma aproximação adequada e suficiente.

### 4.3 Discussão dos resultados

No caso em que  $\beta_2 \approx 0$ , utilizamos os seguintes parâmetros para o meio e pulso:

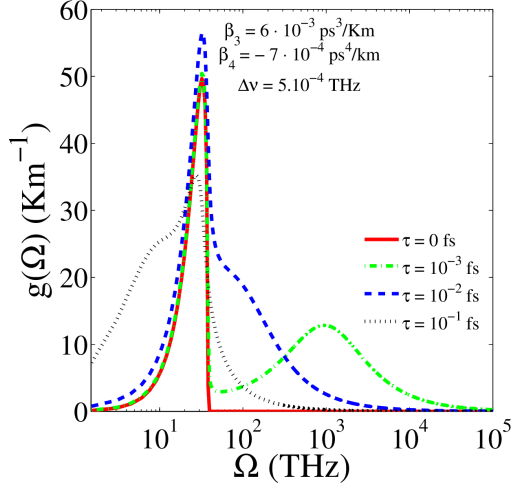
$$\lambda \approx \lambda_D \Rightarrow \beta_2 = 0, \beta_3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^3/\text{Km}, \beta_4 = -7 \cdot 10^{-Q4} \text{ ps}^4/\text{Km}, \gamma = 3.05 \text{ W}^{-1}/\text{Km}, \\ |E_0|^2 = 4.0 \text{ W}, \Delta\nu = 5 \cdot 10^{-4}$$

Neste regime de dispersão, o efeito do tempo de resposta finita na IM devido a automodulação de fase será considerado apenas para meios em que o tempo de resposta é rápida. Através de (4.19), nota-se o surgimento de uma nova banda de instabilidade no espectro de ganho neste regime de dispersão.

A medida que  $\tau$  cresce, a nova banda de instabilidade emergente é deslocada para baixas frequências como mostrado em (4.1). Quando o tempo de resposta é tal que existe a coalescência das bandas, o ganho máximo da banda convencional é reduzido e a banda deslocada apresenta um novo máximo aproximadamente fixo evidenciado em (4.2), porém, mantendo o aumento de  $\tau$ , a banda Raman deslocada continua com o movimento de “deslize” para frequências cada vez mais baixas. Nesse faixa de frequências, quanto mais rapidamente o sistema responder, mais curto deverão ser os pulsos para que a IM seja percebida. O deslocamento da nova banda pode ser melhor visualizado na fig. (4.3) através do ganho máximo em relação a frequência e tempo de resposta  $\tau$ .

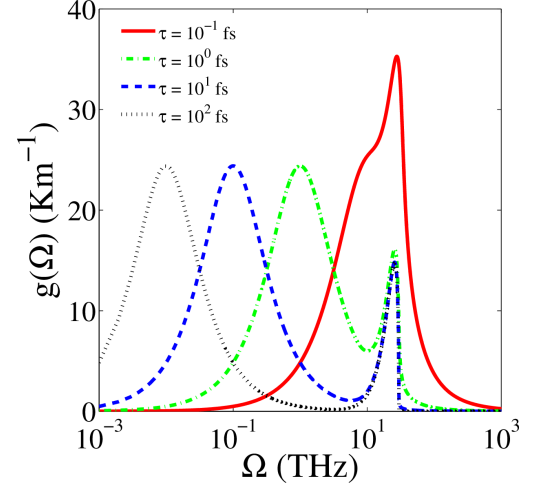
Para a identificação das bandas de instabilidade é necessária a existência de uma estrutura oscilatória nas propriedades estatísticas do pulso. Como podemos verificar, plotamos a variância de

Figura 4.1: Espectro de ganho como função da frequência  $\Omega$  e do tempo de resposta não linear  $\tau$  (pequeno) para o regime de dispersão mínima.



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4.2: Espectro de ganho como função da frequência  $\Omega$  e do tempo de resposta não linear  $\tau$  (grande) para o regime de dispersão mínima.



Fonte: Produzido pelo autor.

fase afim de observar tal estrutura.

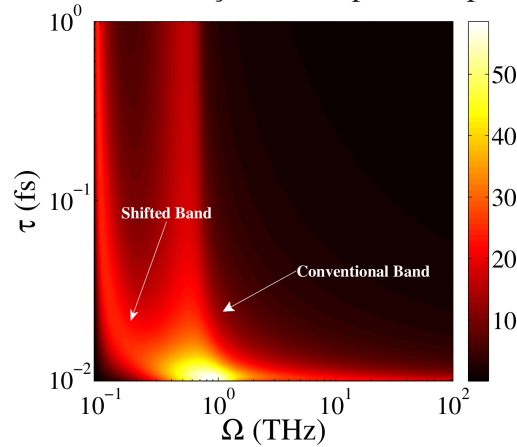
Veja que a partir dos valores em que  $\tau$  cujas as bandas são coalescentes, notamos o desaparecimento da estrutura oscilatória na variância de fase devido a largura de linha do pulso utilizado em nossas simulações. Para as faixas de frequências muito baixas, é necessário que  $\Delta\nu$  seja muito estreito para que o fenômeno da IM possa ser notado. Mesmo para o comprimento de fibra  $L = 2L_{NL}$  que corresponde ao limite da nossa modelagem, as oscilações não são significativas, e não poderemos simular nossos resultados para sistemas com alto retardo.

É possível notar que o período das oscilações é muito baixo durante pouco tempo. Essas bruscas oscilações são responsáveis pela degradação da luz durante a propagação no meio não linear considerado. Mostramos na fig. (4.7) e na fig. (4.8) a influência do atraso durante a transmissão de luz dentro desse meio. Devido a diferença no comportamento oscilatório entre os pontos  $L_{NL}$  e  $2L_{NL}$  na função de autocorrelação, espera-se que as bandas de instabilidade no espectro de potência sejam visualizadas mais nitidamente, onde as oscilações estiverem mais presentes figs. (4.7) - (4.8). Como estas estruturas estão presentes em ambas situações, independentemente dessas diferenças de comportamento, é esperado o surgimento de bandas no espectro durante a propagação do pulso em ambos pontos do meio.

Para investigarmos os espectros de potências, extraímos a transformada de Fourier da função

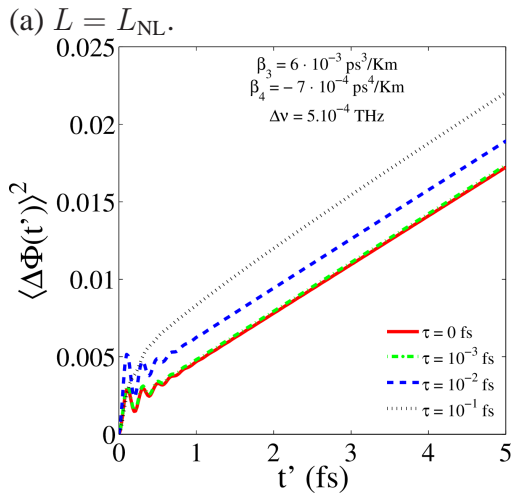


Figura 4.3: Ganho máximo em função do tempo de resposta  $\tau$  e frequência  $\Omega$ .



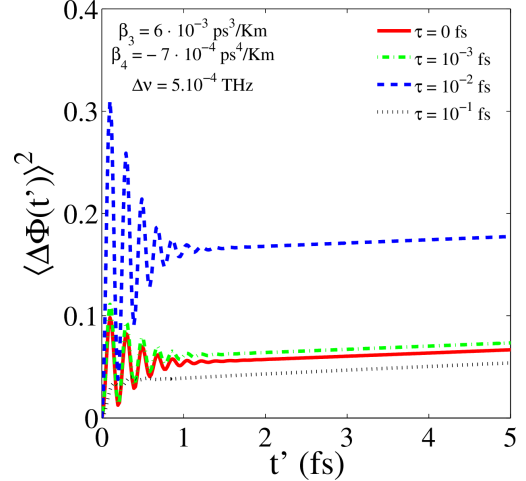
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4.4: Variância de fase em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ :



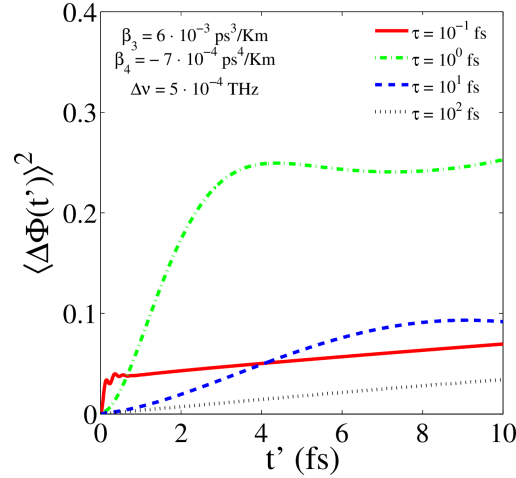
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4.5: Variância de fase em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ :  
(b)  $L = 2L_{NL}$ .

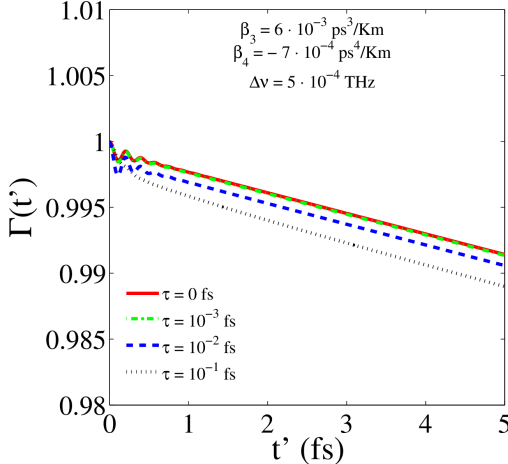


Fonte: Produzido pelo autor.

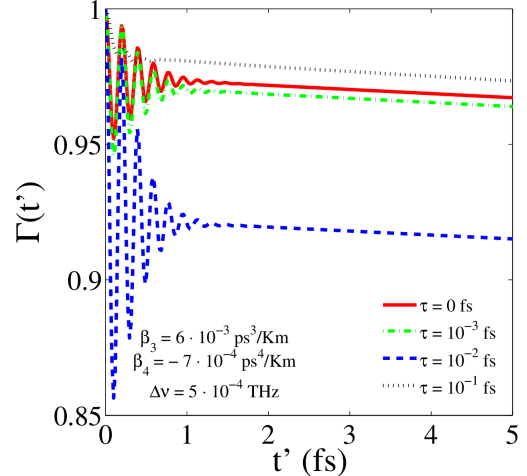
de autocorrelação via Teorema de Wiener-Khintchine. Plotamos as figs. (4.9) e (4.10) e percebemos que os valores de máximos e mínimos que surgem no decorrer da propagação, permanecem inalterados em relação as suas frequências correspondentes. Devido a amplificação das flutuações, quando a comprimento de propagação é  $L = 2L_{NL}$  há o surgimento de novas bandas de instabilidades originários do acentuamento das oscilações na função de coerência. Como nosso modelo não se estende a propagação durante toda a fibra, não é possível estimar com exatidão satisfatória o período do surgimento destas novas bandas, embora este período no eixo da frequência, empiricamente, siga a mesma razão do comprimento não linear da fibra. Com o aumento do tempo de

Figura 4.6: Variância de fase em função do tempo para valores distintos de  $\tau$  (grande):  $L = 2L_{NL}$ .

Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4.7: Função de coerência em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ : (a)  $L = L_{NL}$ .

Fonte: Produzido pelo autor.

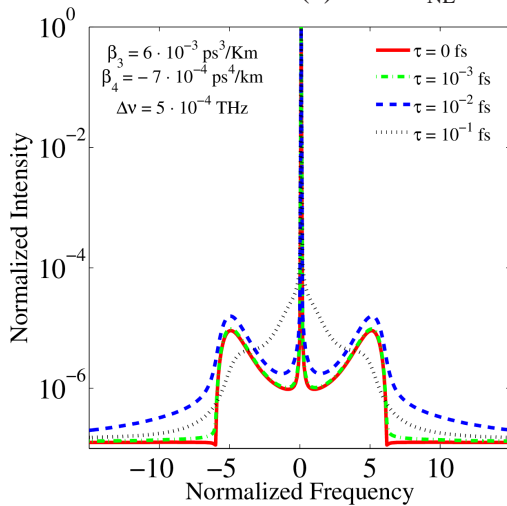
Figura 4.8: Função de coerência em função do tempo para valores distintos de  $\tau$ : (b)  $L = 2L_{NL}$ .

Fonte: Produzido pelo autor.

resposta, notamos que há um aumento sutil no valor máximo da intensidade normalizada, até que haja a coalescência das bandas provocado pelo aumento de  $\tau$ . Deste ponto em diante, é notado a supressão gradativa das bandas de IM para ambos comprimentos de propagação.

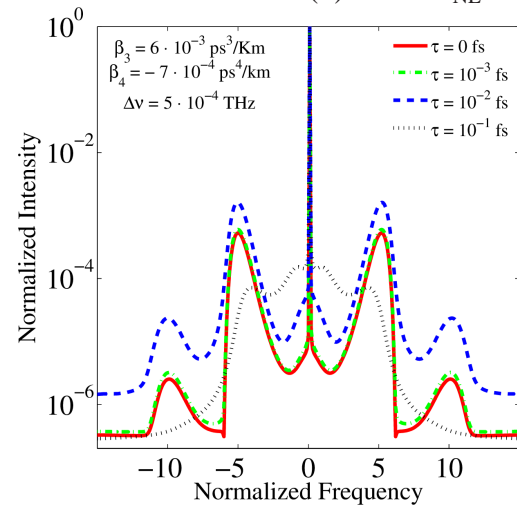
Mais uma vez investigamos teoricamente a propagação de um pulso parcialmente coerente em um meio não linear dispersivo com as características do capítulo anterior. Porém, aqui levamos em conta pulsos com comprimentos de onda próximos a  $\lambda_D$  correspondentes a região de dispersão mínima. Nós apresentamos as mudanças no espectro de ganho e nas funções estatísticas de segunda ordem causadas pelo atraso no tempo de resposta, para diferentes larguras de linha do campo inci-

Figura 4.9: Espectro de potências em função da frequência normalizada para valores distintos de  $\tau$ : (a)  $L = L_{NL}$ .



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4.10: Espectro de potências em função da frequência normalizada para valores distintos de  $\tau$ : (b)  $L = 2L_{NL}$ .



Fonte: Produzido pelo autor.

dente. Para dispersão normal, a banda de instabilidade é induzida pelo atraso no tempo de resposta, mas as linhas espectrais não mudam consideravelmente, apenas há um alargamento em tais linhas. Verificamos por fim, a supressão gradativa das bandas de IM devido ao aumento de  $\tau$ , e investigamos a diferença de comportamento nas funções apresentadas quando há coalescimento de tais bandas.

# Capítulo 5

## Considerações finais e perspectivas futuras

Neste trabalho, investigamos a influência do fenômeno da instabilidade modulacional nas propriedades estatísticas de pulsos luminosos parcialmente coerentes, se propagando em um meio dispersivo não linear com resposta não linear atrasada (de origem Raman). Para isso, apresentamos um modelo já conhecido, com os parâmetros de dispersão e de atraso na ENLS. Encontramos a relação de dispersão para cada um dos casos apresentados, linearizando as equações que regem a dinâmica dos ruídos inseridos através de um modelo de difusão na amplitude e na fase. Resolvemos cada caso utilizando o método de Fourier e assim, calculamos a variância de fase e a função de autocorrelação de cada pulso estudado. Apresentamos o espectro de ganho da IM, a variância de fase, função de autocorrelação e o espectro de potências no domínio das frequências em diferentes regimes: normal, anômalo e de dispersão mínima.

Mostramos que a existência do atraso na IM nos distintos regimes, possui influência direta nas propriedades estatísticas. Para o caso em que a resposta é instantânea,  $\tau = 0$ , a IM só se apresenta no caso em que o regime de dispersão é anômalo,  $\beta_2 < 0$ . Neste regime, as funções variância de fase e de autocorrelação apresentam um comportamento oscilatório. A existência de tais estruturas na funções estatísticas de segunda ordem provocam o surgimento de bandas de instabilidade no espectro de potências. Para o caso em que a resposta possui atraso,  $\tau > 0$ , a IM se apresenta tanto no caso de regime de dispersão normal, quanto anômalo. No caso do regime de dispersão normal, as funções estatísticas de segunda ordem não apresentam uma estrutura oscilatória acentuada. Mesmo verificando a existência da instabilidade modulacional através do

espectro de ganho, não foi possível observar as bandas de instabilidade surgindo no espectro de potências. Para respostas atrasadas, as bandas de instabilidades são suprimidas pela aumento na resposta do meio. Não obstante, o aumento no tempo de resposta do meio além de suprimir as estruturas oscilatórias nas funções estatísticas, degrada a função autocorrelação de cada pulso.

Também estudamos o regime de dispersão mínima caracterizada por  $\beta_2 = 0$ . Para isso, utilizamos um modelo com a relaxação de Debye incorporado na ENLS estendida, onde consideramos a expansão do parâmetro  $\beta$ , até a quarta ordem,  $\beta_4$ . Nesta situação, as estruturas oscilatórias das funções estatísticas possuem períodos muito curtos, responsáveis pelo surgimento de bandas de IM, geradas no decorrer da propagação do pulso no meio apresentado nesse regime de dispersão. Com a influência do atraso, verificou-se que as bandas possuem um aumento em seus máximos até o atraso atingir um nível inicial de degradação do efeito. Neste regime, apenas visualiza-se o efeito para tempos de respostas extremamente curtos, uma vez que os pulsos considerados neste regime são da ordem de fs. Quando o atraso aumenta, verificamos a degradação na estrutura oscilatória tanto da variância de fase, quanto da autocorrelação do pulso propagante.

Como o fenômeno da IM indica a possibilidade na formação de sólitons, os resultados inéditos mostrados nesta tese possibilitam a existência de regimes distintos de resposta e de dispersão na propagação de sólitons devido a propagação de pulsos luminosos parcialmente coerentes. No âmbito das perspectivas, podemos sugerir alguns trabalhos na produção de pulsos parcialmente coerentes, em meios com as características apresentadas, para verificação experimental dos nossos resultados. A utilização deste cenário é comumente observado em dispositivos ópticos utilizados para telecomunicações. Portanto, o estudo detalhado realizado acerca da influência do tempo de resposta em pulsos parcialmente coerentes se tornaram necessário.

Como trabalhos futuros, podemos citar a influência da IM em pulsos parcialmente coerentes devido a modulação de fase cruzada. Este trabalho está em processo de desenvolvimento. Também estamos interessados em utilizar os resultados aqui apresentados para eventuais parcerias com outras universidades que possuam grupos de pesquisa na área de telecomunicações.

Por fim, esta tese deu origem ao artigo [20] aceito para o evento Latin America Optics & Photonics Conference (LAOP) (14-19 de Novembro de 2014), Cancun - Mexico. E outro paper submetido cujos resultados estão apresentados no cap. 4.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Clerk Maxwell, “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **155**, 459-512. 1865
- [2] Bell, A. G.: “On the Production and Reproduction of Sound by Light”, *American Journal of Sciences, Third Série*, vol. XX, #118, October 1880, pp. 305 — 324; also published as “Selenium and the Photophone” in *Nature*, September 1880.
- [3] PEDROTTI, Frank L. S.J. and PEDROTTI, Leno S. *Introduction to Optics*. Prentice Hall International, Inc. 1997.
- [4] D. Marcuse, *Light Transmission Optics* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1982), Caps. 8 e 12.
- [5] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2007).
- [6] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953), Chap. 9.
- [7] P.N. Butcher, and D.N. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics* - Cambridge University Press, Cambridge, UK, Chap. 2 (1990)
- [8] A. Hasegawa and F. Tappert, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers I: Anomalous dispersion,” *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142-144 (1973).
- [9] A. Hasegawa and F. Tappert, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers II: Normal dispersion,” *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171-172 (1973).

- [10] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita, "Observation of Modulational Instability in Optical Fibers," *Physical Review Letters*, Vol. **56**, No. 2, 135-139 (1986).
- [11] M. L. Lyra, A. S. Gouveia Neto, "Saturation effects on modulational instability in non-Kerr-like monomode optical fibers," *Opt. Comm.* **108**, 117-120 (1994).
- [12] S. B. Cavalcanti, M. L. Lyra, "Modulational instability of ultrashort pulses via a generalized nonlinear Schrödinger equation with deviating arguments," *Phys. Lett. A* **211**, 276-280 (1996).
- [13] G. L. da Silva, I. Gleria, M. L. Lyra, A. S. B. Sombra, "Modulational instability in lossless fibers with saturable delayed nonlinear response," *J. Opt. Soc. Am. B* **26**, 183-188 (2009).
- [14] S. B. Cavalcanti, M. Yu and G. P. Agrawal, "Noise amplification in dispersive nonlinear media," *Phys. Rev. A* **51**, 4086 (1995).
- [15] V. V. Konotop and M. Salerno, "Modulational instability in Bose-Einstein condensates in optical lattices," *Phys. Rev. A* **65**, 021602 (2002).
- [16] M. Onorato, A. R. Osborne, M. Serio and S. Bertone, "Freak waves in random oceanic sea states," *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5831-5834 (2001).
- [17] M. Onorato, A. R. Osborne and M. Serio, "Modulation instability in crossing sea states", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 014503 (2006).
- [18] A. A. Canabarro, B. Santos, I. Gleria, M. L. Lyra and A. S. B. Sombra, "Interplay of XPM and nonlinear response time in the modulational instability of copropagating optical pulses," *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, 1878-1885 (2010).
- [19] V. E. Zakharov, L.A. Ostrovsky, "Modulation Instability: The beginning," *Physica D* **238**, 540-548 (2009).
- [20] G. L. da Silva, T. P. Lobo, and A. A. Canabarro, "Stochastic noise amplification in noninstantaneous Kerr media," *J. Opt. Soc. Am. B* **31**, 2012-2020 (2014)
- [21] J.S. Roussell, "Report on waves" in Report of 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, p. 331 (1844)

- [22] G.L. da Silva, Dissertação de Mestrado: “Da Instabilidade Modulacional em fibras sem perdas com resposta não-linear atrasada e saturável”, (UFAL, Maceió-AL, 2009).
- [23] A. A. Canabarro, Tese de Doutorado: “Da interação entre a modulação de fase cruzada e o tempo de atraso da resposta não-linear e seus efeitos na instabilidade modulacional de feixes co-propagantes”, (UFAL, Maceió-AL, 2010)
- [24] S.A. Akhmanov, V.A. Vysloukh and A.S. Chirkin, *Optics of femtosecond laser pulses* (American Institute of Physics, New York, 1992)
- [25] A. Mecozzi, J. D. Moores, H. A. Haus, and Y. Lai, *J. Opt. Soc. Am.* **8 9**, 1350 (1992)
- [26] A. Mecozzi, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 2321 (1993); A. Mecozzi, *J. Opt. Soc. Am. B* **11**, 462 (1994)
- [27] J. Fatome, S. Pitois, and G. Millot, “Measurement of nonlinear and chromatic dispersion parameters of optical fibers using modulation instability,” *Opt. Fiber Technol.* **12**, 243-250 (2006).
- [28] Y. D. Gong, P. Shum, D. Tang, C. Lu, and X. Guo, “660GHz Solitons Source Based on Modulation Instability in Short Cavity,” *Opt. Express* **11**, 2480-2485 (2003).
- [29] N. Da Dalt, C. De Angelis, G. F. Nalesso, and M. Santagiustina, “Dynamics of induced modulational instability in waveguides with saturable nonlinearity,” *Opt. Commun.* **121**, 69-72 (1995).
- [30] L. D. Carr and J. Brand, “Spontaneous soliton formation and modulational instability in Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040401 (2004).
- [31] M. Centurion, M. A. Porter, Y. Pu, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, D. Psaltis, “Modulational instability in nonlinearity-managed optical media,” *Phys. Rev. A* **75**, 063804 (2007).
- [32] C.-S. Chou and M.-F. Shih, “Slow light achieved by non-instantaneous modulation instability,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 105204 (2009).
- [33] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath and B. Jalali, “Optical rogue waves,” *Nature* **450**, 1054-1057 (2007).



- [34] M. Stepić, A. Maluckov, M. Stojanović, F. Chen, D. Kip, “Modulational instability and solitary waves in one-dimensional lattices with intensity-resonant nonlinearity,” *Phys. Rev. A* **78**, 043819 (2008).
- [35] I. Velchev, R. Pattnaik, J. Toulouse, “Two-Beam Modulation Instability in Noninstantaneous Nonlinear Media,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 093905 (2003).
- [36] C. Cambournac, H. Maillotte, E. Lantz, J. M. Dudley and M. Chauvet “Spatiotemporal behavior of periodic arrays of spatial solitons in a planar waveguide with relaxing Kerr nonlinearity,” *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 574-585 (2002).
- [37] M. J. Potasek, “Modulation instability in an extended nonlinear Schrödinger equation,” *Opt. Lett.* **12**, 921-923 (1987).
- [38] B. Kliber, C. Michel, J. Garnier and A. Picozzi, “Temporal dynamics of incoherent waves in noninstantaneous response nonlinear Kerr Media,” *Opt. Lett.* **37**, 2472-2474 (2012).
- [39] X. Liu, J. W. Haus and S. M. Shahriar, “Modulation instability for a relaxational Kerr medium,” *Opt. Comm.* **281**, 2907-2912 (2008).
- [40] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons.
- [41] GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, Third Edition, Roberts & Company.
- [42] GOODMAN, Joseph W. *Statistical Optics*, Wiley Classics Library, (2000)
- [43] WOLF, Emil, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (2007)
- [44] S. B. Cavalcanti, J. C. Cressoni, H. R. da Cruz, A. S. Gouveia-Neto, “Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation,” *Physical Review A*, Vol. **43**, No. 11, 6162-6165 (1991).
- [45] H. R. da Cruz, S. B. Cavalcanti, A. S. Gouveia-Neto, “Dynamics of Femtosecond Pulses in the Region of Zero Second Order Dispersion of Single Mode Optical Fibers,” *Brazilian Journal of Physics*, Vol. **23**, No. 1, 85-879 (1993).

- [46] A. Mussot, E. Lantz, H. Maillotte, T. Sylvestre, C. Finot, and S. Pitois, "Spectral broadening of a partially coherent CW laser beam in single-mode optical fibers," *Opt. Express* **12**, 2838-2843 (2004)
- [47] G. Carbou and B. Hanouzet, "Relaxation approximation of the Kerr model for the impedance initial-boundary value problem," *Discrete Contin. Dyn. Syst. (2007); Dynamical systems and differential equations*, Proc. 6th AIMS International Conference, suppl., pp. 212-220;
- [48] J. Garnier, G. Xu, S. Trillo, and A. Picozzi, "Incoherent Dispersive Shocks in the Spectral Evolution of Random Waves," *Phys. Rev. Lett.* **111**, 113902 (2013).
- [49] M. Mitchell, Z. Chen, M. Shih, and M. Segev, "Self-Trapping of Partially Spatially Incoherent Light," *Phys. Rev. Lett.* **77**, 490-493 (1996).
- [50] M. Soljacić, M. Segev, T. Coskun, D. N. Christodoulides, and A. Vishwanath, "Modulation Instability of Incoherent Beams in Noninstantaneous Nonlinear Media," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 467-470 (2000).
- [51] T. Hansson, D. Anderson, M. Lisak, V. E. Semenov and U. Österberg, "Quasilinear evolution and saturation of the modulational instability of partially coherent optical waves," *Phys. Rev. A* **78**, 011807 (2008).
- [52] B. Hall, M. Lisak, D. Anderson, R. Fedele, and V. E. Semenov, "Statistical theory for incoherent light propagation in nonlinear media," *Phys. Rev. E* **65**, 035602 (2002).
- [53] D. Kip, M. Soljacić, M. Segev, E. Eugenieva, and D. N. Christodoulides, "Modulation Instability and Pattern Formation in Spatially Incoherent Light Beams," *Science* **290**, 495-498 (2000).
- [54] J. Klinger, H. Martin, and Z. Chen, "Experiments on induced modulational instability of an incoherent optical beam," *Opt. Lett.* **26**, 271-273 (2001).
- [55] A. Picozzi, S. Pitois, and G. Millot, "Spectral Incoherent Solitons: A Localized Soliton Behavior in the Frequency Domain" *Phys. Rev. Lett.* **101**, 093901 (2008).

- [56] B. Kibler, C. Michel, A. Kudlinski, B. Barviau, G. Millot, and A. Picozzi, “Emergence of spectral incoherent solitons through supercontinuum generation in photonic crystal fiber,” *Phys. Rev. E* **84**, 066605 (2011)
- [57] A. Picozzi, J. Garnier, T. Hansson, P. Suret, S. Randoux, G. Millot, and D. N. Christodoulides, “Optical wave turbulence: Toward a unified nonequilibrium thermodynamic formulation of statistical nonlinear optics”, *Physics Reports* (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2014.03.002>
- [58] C. Condit, M. A. Schmidt, P. St. J. Russel, and F. Biancalana, “Highly Noninstantaneous Solitons in Liquid-Core Photonic Crystal Fibers,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 263902 (2010).
- [59] T. Hansson, D. Anderson, M. Lisak, V. E. Semenov, U. Österberg, “Quasilinear evolution and saturation of the modulational instability of partially coherent optical waves,” *Phys. Rev. A* **78**, 011807(R) (2008).
- [60] J. N. Elgin, *Opt. Lett.* **18**, 10 (1993); *Phys. Rev. A* **47**, 4331 (1993)
- [61] BOYD, Robert W, *Nonlinear Optics* (Academic Press, INC.)
- [62] D.L. Mills, *Nonlinear Optics*, Springer-Verlag. (1991)
- [63] FOWLES, G. R., *Introduction to Modern Optics*, Second Edition, Dover Publications.
- [64] GIBILISCO, Stan., *Optics demystified*, Mc Graw Hill Companies.
- [65] MALDONADO, Edison Puig e MATOS, Dinaldo de Castilho, *Aspectos Fundamentais da Tecnologia de Fibras Ópticas*, Centro Universitário São Camilo.
- [66] ABBADE, Marcelo Luís Francisco. *Contribuição para o Estudo de não-linearidades em fibras ópticas monomodo*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
- [67] Mandel e Wolf, Section 3.1, pag. 99-100
- [68] K. Nithyanandan and K. Porsezian, “Interplay between relaxation of nonlinear response and coupling coefficient dispersion in the instability spectra of dual core optical fiber,” *Opt. Comm.* **303**, 46-55 (2013).

- [69] S. Trillo, S. Wabnitz, G. I. Stegeman, and E. M. Wright, "Parametric amplification and modulational instabilities in dispersive nonlinear directional couplers with relaxing nonlinearity," *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 889-900 (1989)
- [70] T. Hansson, D. Anderson, M. Lisak, "Propagation of Partially Coherent Light in Nonlinear Media", *Piers Online*. **5**, n. 8, 761-765 (2009).
- [71] U. Bortolozzo, S. Residori, and P. Sebbah, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 103903 (2011).
- [72] Jared C. Bronski and J. Nathan Kutz, *Optics Letters*, Vol. **21**, Issue 13, pp. 937-939 (1996).
- [73] B. Kibler, C. Finot, J.M. Dudley, *Eur. Phys. J. Special Topics* **173** 289-295 (2009).
- [74] T. Hansson, M. Lisak, D. Anderson, "Generalized dressing method for nonlinear evolution equations describing partially coherent wave propagation in noninstantaneous Kerr media", *Physical Review E* **84**, 056601 (2011).
- [75] Claire Michel, Bertrand Kibler, Antonio Picozzi, "Discrete spectral incoherent solitons in nonlinear media with noninstantaneous response", *Physical Review A* **83**, 023806 (2011).
- [76] Karen Marie H. et al. "Supercontinuum generation in a photonic crystal fiber with two zero dispersion wavelengths", *Optics Express*, Vol. **12**, No. 6, 1045-1054 (2004).
- [77] Hanna Lajunen et al. "Pulse-by-pulse method to characterize partially coherent pulse propagation in instantaneous nonlinear media", *Optics Express*, Vol. **18**, No. 14, 14979-14991 (2010).
- [78] F.Kh. Abdullaev, S.A. Darmanyan, S. Bischoff, P.L. Christiansen, M.P. Sorensen, "Modulational instability in optical fibers near the zero dispersion point", *Optics Communications* **108** 60-64 (1994).
- [79] Yongqian Liu, Sang-Gyu Park, and A. M. Weiner, "Terahertz Waveform Synthesis via Optical Pulse Shaping," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol. **2**, No. 3, 709-719 (1996)
- [80] K. Porsezian, K. Nithyanandan, R. Vasantha Jayakantha Raja, P. K. Shukla, "Modulational instability at the proximity of zero dispersion wavelength in the relaxing saturable nonlinear system," *J. Opt. Soc. Am. B*, **29**, 2803-2813 (2012).

- [81] A. Sauter, S. Pitois, G. Millot, A. Picozzi, "Incoherent modulation instability in instantaneous nonlinear Kerr media," *Optics Letters*, **30**, 2143-2145, (2005).
- [82] V. Semenov, M. Lisak, D. Anderson, T. Hansson, L. Helczynski-Wolf, U. Österberg, "Mathematical basis for analysis of partially coherent wave propagation in nonlinear, non-instantaneous, Kerr media," *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 335207, (2008).
- [83] C.G. Latchio Tiofack, Alidou Mohamadou, Timoléon C. Kofané, "Modulational instability in optical fiber with stochastic parameters and noninstantaneous response", *Optics Communications* **283**, 1096â1101, (2010).
- [84] L. Helczynski, D. Anderson, R. Fedele, B. Hall, and M. Lisak, "Propagation of Partially Incoherent Light in Nonlinear Media via the Wigner Transform Method", *IEEE Journal of Selected topics in Quantum Electronics*, Vol. **8**, No. 3, 408-412, (2002).
- [85] S. B. Cavalcanti, "Theory of incoherent self-phase modulation of non-stationary pulses". *New Journal of Physics*, Vol. **4**, p. 19.1-19.11, (2002).
- [86] Jamal T. Manassah, "Induced phase modulation by noisy fields", *Optics Letters*, Vol. **16**, No. 18, 1379-1381 (1991).
- [87] Edmund J. R. Kelleher, John C. Travers, Sergei V. Popov, James R. Taylor, "Role of pump coherence in the evolution of continuous-wave supercontinuum generation initiated by modulation instability," *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. **29**, No. 3, 502-512 (2012).
- [88] E. Brainis, D. Amans, M. Haelterman, P. Emplit, and S. Massar, "Pulse propagation in birefringent Kerr media: Stochastic coupled nonlinear Schrödinger equations," in *Nonlinear Guided Waves and Their Applications*, Technical Digest on CD (Optical Society of America, 2004), paper MC17.
- [89] Slaven Moro, Aleksandar Danicic, Nikola Alic, Bryan Stossel, and Stojan Radic, "Noise-induced nonlinear frequency chirping in  $\mathbb{I}(3)$  nonlinear media," *Opt. Express* **18**, 23413-23419 (2010)

- [90] V.P. Kandidov, O.G. Kosareva, I.S. Golubtsov, W. Liu, A. Becker, N. Akozbek, C.M. Bowden, S.L. Chin, "Self-transformation of a powerful femtosecond laser pulse into a white-light laser pulse in bulk optical media (or supercontinuum generation)," *Appl. Phys. B* **77**, 149-165 (2003)
- [91] Ian A. Walmsley and Christophe Dorrer, "Characterization of ultrashort electromagnetic pulses," *Advances in Optics and Photonics* **1**, 308-437 (2009)
- [92] N. C. Kothari "Theory of modulational instability in optical fibers", *Opt. Comm.*, vol. **62**, No. 4, pp.247 -249 1987
- [93] K. Tai, A. Tomita, J. L. Jewell, and A. Hasegawa, "Generation of subpicosecond solitonlike optical pulses at 0.3 THz repetition rate by induced modulational instability," *Applied Physics Letters* **49**, 236-238 (1986).
- [94] Stéphane Pitois, Guy Millot, "Experimental observation of a new modulational instability spectral window induced by fourth-order dispersion in a normally dispersive single-mode optical fiber," *Optics Communications*, **226**, 415-422, (2003).
- [95] P. Tchofo Dinda, C.M. Ngabireng, K. Porsezian, B. Kalithasan, "Modulational instability in optical fibers with arbitrary higher-order dispersion and delayed Raman response," *Optics Communications* **266**, 142-150 (2006).
- [96] S. Trillo, S. Wabnitz, E. M. Wright, G. I. Stegeman, "Optical solitary waves induced by cross-phase modulation," *Optics Letters*, Vol. **13**, No. 10, 871-873 (1988).
- [97] Anders Höök and Magnus Karlsson, "Ultrashort solitons at the minimum-dispersion wavelength: Effects of fourth-order dispersion," *Optics Letters*, Vol. **18**, No. 17 (1993).
- [98] P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, H. H. Chen, Y. C. Lee, "Effect of Axial Inhomogeneity on Solitons Near the Zero Dispersion Point," *IEEE Journal of Quantum Electronics*. Vol. **24**, No. 2, 373-381 (1988).
- [99] T. A. B. Kennedy and E. M. Wright, "Quantization and phase-space methods for slowly varying optical fields in a dispersive nonlinear medium," *Physical Review A*, Vol. **38**, No. 1, 212-221 (1988).

- [100] K. Nithyanandan, R. Vasantha Jayakantha Raja, K. Porsezian, and B. Kalithasan, “Modulational instability with higher-order dispersion and walk-off in Kerr media with cross-phase modulation,” *Physical Review A*, Vol. **86**, 023827 (2012)
- [101] Robert McGraw, “Stochastic models for light-scattering noise in nonlinear optical Kerr media,” *Physical Review A*, Vol. **45**, No. 5, 3250-3259 (1992).
- [102] A.G. Shagalov, “Modulational instability of nonlinear waves in the range of zero dispersion,” *Physics Letters A*, **239**, 4145 (1998).
- [103] M. Z. Wu and B. A. Kalinikos BA, “Coupled modulational instability of copropagating spin waves in magnetic thin films,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 027206 (2008).
- [104] K. L. Henderson, K. L. Peregrine and J. W. Dold, “Unsteady water waves modulations: fully nonlinear solutions and comparison with nonlinear Schrödinger equation,” *Wave Motion* **29**, 341-361 (1999).
- [105] A. M. Rubenchik, S. K. Turitsyn, and M. P. Fedoruk, “Modulation instability in high power laser amplifiers,” *Opt. Express* **18**, 1380-1388 (2010).
- [106] P. Tchofo Dinda and K. Porsezian, “Impact of fourth-order dispersion in the modulational instability spectra of wave propagation in glass fibers with saturable nonlinearity,” *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, 1143-1152 (2010).
- [107] K. Nithyanandan, R. Vasantha Jayakantha, K. Porsezian, and B. Kalithasan, “Modulational instability with higher-order dispersion and walk-off in Kerr media with cross-phase modulation,” *Phys. Rev. A* **86**, 023827 (2012).
- [108] X. Zhong, A. Xiang, “Cross-phase modulation induced modulation instability in single-mode optical fibers with saturable nonlinearity,” *Opt. Fib. Tech.* **13** 271 - 279 (2007).
- [109] Y. Xianq, X. Dai, S. Wen, and D. Fan, “Modulation instability in metamaterials with saturable nonlinearity,” *J. Opt. Soc. Am. B* **28**, 908-916 (2011).

- [110] W. Zhou, W. Su, X. Cheng, Y. Xiang, X. Dai, S. Wen, “Copropagation of two pulses of different frequencies and modulation instabilities induced by cross-phase modulation in metamaterials,” *Opt. Comm.* **282**, 1440-1447 (2009).
- [111] M. Yu, C.J. McKinstree, and G.P. Agrawal, “Instability due to crossphase modulations in the normal-dispersion regime,” *Phys. Rev. E* **48**, 2178-2183 (1993).
- [112] T. Tanemura, K. Kikuchi, “Unified analysis of modulational instability induced by cross-phase modulation in optical fibers,” *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 2502-2514 (2003).
- [113] K.J. Blow, D. Wood, “Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers,” *J. Quantum Electron.* **24**, 2665-2673 (1989).
- [114] MACHADO, Kleber D., *Teoria do Eletromagnetismo - Vol. 1* (2004)
- [115] Y.R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics - Wiley, New York, Chap. 1* (1984)
- [116] JACKSON, John David, *Classical Electrodynamics - Third Edition*, Editora John Wiley, 1998.
- [117] P. Diament, *Wave Transmission and Fiber Optics - Macmillan, New York, Chap. 3*, (1990)
- [118] GRIFFITHS, David J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall. 3rd Edition, New Jersey, 1999.
- [119] D. Driver, *Ordinary and delay differential equations* (Springer, Berlin, 1977)
- [120] L.E. El'sgol'ts and S.B. Norkin, *Introduction to the theory and applications of differential equations with deviating arguments* (Academic Press, New York, 1973)