

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
WILLAMYS CRISTIANO SAORES SILVA

GERAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE FEIXES POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL

Maceió, Alagoas

2011

WILLAMYS CRISTIANO SOARES SILVA

GERAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE FEIXES POSSUINDO MOMENTO ANGULAR ORBITAL

Tese de doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Ciências

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Dilson Pereira Caetano*

Maceió, Alagoas

2011

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586c Silva, Willamys Cristiano Soares.
Geração e Caracterização de feixes possuindo momento angular orbital / Willamys Cristiano Soares Silva. – 2011.
69 f.: il.

Orientador: Jandir Muguel Hickmann.
Co-Orientador: Dilson Pereira Caetano.
Tese (doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2011.

Bibliografia. f. 67-69.

1. Difração. 2. Feixes Laguerre-gauss. 3. Feixes Bessel. 4. Momento Angular orbital. I. Título.

CDU: 535.4

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

**“Geração e Caracterização de Feixes possuindo
Momento Angular Orbital”**

por

Willamys Cristiano Soares Silva

A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Rogério Fernandes de Souza, do Instituto Federal de Alagoas, Itamar Vidal Silva de Lima, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 21 de novembro de 2011



Prof. Jandir Miguel Hickmann



Prof. Rogério Fernandes de Souza



Prof. Itamar Vidal Silva de Lima



Prof. Eduardo Jorge da Silva Fonseca



Prof. Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar

Aos meus filhos Cauã e Rafael.

Agradecimentos

- Agradeço ao Professor Jandir M. Hickmann pela orientação, paciência, dedicação e confiança que sempre depositou em mim.
- Ao professor Dilson P. Caetano cuja co-orientação foi muito importante para esse trabalho.
- Aos professores Kleber C. Serra, Eduardo J. S. Fonseca e Solange B. Cavalcanti pelo carinho e apoio constante.
- Aos amigos Askery A. Canabarro e André L. Moura. pelas valiosas conversas.
- Aos meus colegas do OPTMA que proporcionam um ambiente alegre e dinâmico no processo de formação.
- À minha namorada Caroline. M. F. Rocha pelo apoio e incansável encorajamento.
- Aos professores, funcionários e alunos do Instituto de Física da UFAL.
- A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica e social.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos uma nova técnica para determinar a carga topológica de um feixe de luz com momento angular orbital. Nossa técnica é baseada na difração por uma abertura triangular. Através da realização de simulações numéricas, para feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel com diferentes valores de l , descobrimos que o padrão de difração contém a assinatura da carga topológica do feixe. Nossas previsões teóricas para uma abertura triangular foram verificadas experimentalmente, demonstrando que o padrão de difração revela a carga topológica do feixe de luz. Esta técnica torna possível a determinação do módulo e do sinal da carga topológica de um feixe de luz de uma maneira simples e direta.

Palavras-chave: Difração. Feixes Laguerre-Gauss. Feixes Bessel. Momento angular orbital.

Abstract

In this work, we develop a new technique to determine the topological charge of a light beam with orbital angular momentum. Our technique is based on the diffraction by a triangular aperture. By performing numerical simulations, for Laguerre-Gauss beams and Bessel beams with different values of l , we found that the diffraction pattern contains the signature of the topological charge of the beam. Our theoretical predictions for a triangular aperture were experimentally verified, demonstrating that the diffraction pattern reveals the topological charge of the light beam.

Key-words: Diffraction. Laguerre-Gauss beams. Bessel beams. Orbital angular momentum.

Lista de Figuras

2.1	Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss em $z = 0$ para $l = 2$ variando p . a) $p = 0$, b) $p = 1$, c) $p = 2$ e d) $p = 3$	27
2.2	Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss em $z = 0$ com $p = 0$. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$	27
2.3	Perfis de intensidade dos modos Hermite-Gauss: a) HG_{10} , b) HG_{01} , c) HG_{11} , d) HG_{21} , e) HG_{12} e f) HG_{22}	29
2.4	Perfil de intensidade para o feixe Bessel de ordem zero.	31
2.5	Perfil de intensidade para um feixe Bessel de alta ordem. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$	32
3.1	Padrão de interferência gravado para produzir em primeira ordem de difração feixes Laguerre-Gauss com a) $l = \pm 1$, b) $l = \pm 2$ e c) $l = \pm 3$	35
3.2	Perfil de intensidade para feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 1$ e b) $l = 2$	36
3.3	Convensor de modos	37
3.4	Hologramas gerados no computador para preparação de feixes Bessel; Feixes Bessel com a) $l = 1$ e b) $l = 4$	39
3.5	Hologramas gerados quando $\gamma = 0$. a) Para $l = 1$ e b) para $l = 4$	40
3.6	Perfil de intensidade um feixe Bessel de primeira ordem.	41
3.7	Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss colinear com uma onda plana. Os valores da carga topológica são: a) $l = 1$, b) $l = 2$ e c) $l = 3$	42
3.8	Padrão de interferência de um feixe Bessel e uma onda plana, no regime não-colinear. Os valores da carga topológica são: a) $l = 1$, b) $l = 2$ e c) $l = 3$	42
3.9	Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda dupla com a) $l = 1$, b) $l = 0$ e c) $l = -1$	43
3.10	Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda dupla com a) $l = 2$, b) $l = 3$ e c) $l = 4$	44

3.11	Distribuição de intensidade de um MPI.	45
3.12	Padrão de difração do campo distante depois de um MPI com $N = 5$ pontos iluminado com um feixe Laguerre-Gauss com modo azimutal: a) $l = -1$, b) $l = 4$ e c) $l = 9$	46
3.13	Padrão de difração do campo distante depois de um MPI com $N = 6$ pontos iluminado com um feixe Laguerre-Gauss com modo azimutal: a) $l = -5$, b) $l = 1$ e c) $l = 7$	47
4.1	Padrão de difração de Fraunhofer para uma onda plana através de uma abertura triangular. O padrão foi saturado para podemos observar o aspecto do padrão.	51
4.2	Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular, mostrada na Fig4.3. Nos resultados numéricos a intensidade da luz aumenta do preto para o vermelho. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$. Observamos que cada lado da rede tem $l + 1$ pontos brilhantes.	52
4.3	a) Esboço para a abertura triangular e b) Linhas de contorno para a distribuição de intensidade de campo distante após o feixe sofrer difração nas três bordas do triângulo.	53
4.4	Padrão de difração produzido pelas fendas simples de uma fenda triangular, a) fenda horizontal, b) fenda da direita, e c) fenda da esquerda do triângulo. Os padrões foram obtidos para $l = 3$	55
4.5	Padrão de difração de um feixe Laguerre-Gauss com $l = 3$ por uma fenda triangular.	56
4.6	Efeito da mudança do sinal da carga topológica no padrão de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular. A escala de intensidade é a mesma que na Fig4.2. A abertura triangular está na mesma posição que na Fig.4.3. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = -1$, b) $l = -2$, c) $l = -3$ e d) $l = -4$	57
4.7	Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Bessel passando por uma abertura triangular mostrado. A escala de intensidade é a mesma que na Fig4.2. A abertura triangular está na mesma posição que na Fig.4.3. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$	58

4.8	Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 10$, b) $l = 11$, c) $l = 12$ e d) $l = 13$. Os Triângulos em branco servem para mostrar os limites da rede.	60
4.9	Arranjo experimental, M_1 e M_2 são espelhos.	61
4.10	Distribuição de intensidade na abertura triangular de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 0$, b) $l = 1$ e c) $l = 2$	62
4.11	Resultados experimentais para a distribuição de intensidade do padrão de difração de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$	63
4.12	Resultados experimentais para a distribuição de intensidade do padrão de difração de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = -2$ e b) $l = -3$	63

Conteúdo

1	Introdução Geral	12
2	Momento Angular Orbital da Luz	16
2.1	Introdução	16
2.2	Equações de Maxwell e Potenciais do campo eletromagnético	17
2.3	Momento angular intrínseco e orbital da luz	19
2.3.1	Momento angular orbital	21
2.3.2	Feixes Laguerre-Gauss	25
2.3.3	Feixes Bessel	30
2.4	Conclusão	32
3	Geração e caracterização de feixes possuindo momento angular orbital	34
3.1	Introdução	34
3.2	Geração de Feixes Laguerre-Gauss	35
3.3	Geração de Feixes Bessel	37
3.4	Caracterização de Feixes Possuindo Momento Angular Orbital	41
3.5	Conclusão	47
4	Determinação da carga topológica de feixes com momento angular orbital.	49
4.1	Introdução	49
4.2	Difração por uma abertura triangular	50
4.3	Experimento	60
4.4	Conclusão	64
5	Conclusão geral	65

1. Introdução Geral

O estudo da luz desempenhou um papel fundamental durante o século *XX* no desenvolvimento de novas teorias físicas. Seja teórica ou experimentalmente, o estudo das ondas eletromagnéticas sempre contribuiu para a expansão das fronteiras da ciência. Com a teoria eletromagnética de Maxwell foi possível explicar muitos fenômenos, em particular demonstrou-se que uma onda eletromagnética transporta energia, momento linear e momento angular [1].

O momento angular da luz tem duas componentes. A primeira está associada ao estado de polarização do campo elétrico, correspondendo ao momento angular intrínseco. Os estados do momento angular intrínseco correspondem à polarização circular no sentido horário e à polarização circular no sentido anti-horário. Estes estados podem ser decompostos em estados de polarização linear. A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico e corresponde ao momento angular orbital.

Quando a luz interage com a matéria, podemos observar efeitos da transferência de momento angular da luz para matéria. Em 1909, Poynting [2] descreveu um equivalente mecânico para o momento angular intrínseco. Um feixe de luz circularmente polarizado deveria exercer um torque ao atravessar uma placa birrefringente e que a razão entre o momento angular e o momento linear era igual a $\lambda/2\pi$, onde λ é o comprimento de onda da radiação. Baseado nessa idéia, em 1936, Beth [3] observou pela primeira vez a presença do momento angular intrínseco de um feixe de luz. Em seu experimento, um feixe de luz circularmente polarizado no sentido horário passa por uma placa birrefringente de $\lambda/2$,

suspensa por uma fibra de quartzo. A placa muda à polarização do feixe para circular no sentido anti-horário, e como conseqüência, a placa birrefringente sofre um torque, devido à transferência do momento angular intrínseco.

Em 1992, Allen e colaboradores, demonstraram que o momento angular orbital é uma conseqüência de feixes com uma distribuição de amplitude que possui uma fase azimutal da forma $\exp(il\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e l é um número inteiro, conhecido como carga topológica. Este resultado é independente dos estados de polarização e é típico para feixes com uma frente de onda helicoidal [4]. A presença deste tipo de fase faz com que o feixe apresente uma singularidade na fase, ou seja, a fase é indeterminada, portanto, a intensidade do feixe deve ser nula no centro. Na óptica tais singularidades são conhecidas como *vórtices ópticos* [5,6]. Desde então, este assunto vem despertando grande interesse, tendo aplicações desde a comunicação óptica [7] até a biologia, onde o uso desta propriedade da luz é usada para conseguir um grau de liberdade a mais na operação de pinças ópticas [8].

Para feixes com uma frente de onda helicoidal, o vetor de Poynting tem uma componente azimutal, que produz um momento angular orbital na direção de propagação do feixe [9,10]. Usualmente, feixes de luz possuindo momento angular orbital são descritos em termos de modos Laguerre-Gauss. Estes modos são soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas. É possível decompor modos Laguerre-Gauss em termos de modos Hermite-Gauss [4].

Tradicionalmente, define-se um feixe de luz como um cone de luz estreito composto de raios quase paralelos. O tipo mais comum de feixe de luz é o feixe gaussiano, cujo perfil transversal de intensidade é dado por uma função gaussiana. Em geral, qualquer feixe está sujeito ao efeito de difração, que modifica o perfil transversal do feixe ao longo da propagação livre. Para feixes gaussianos, a difração alarga o perfil transversal de intensidade do feixe [11]. A difração pode ser um fator limitante para aplicações onde

se requer que um feixe mantenha o seu perfil transversal, como por exemplo, imagens ópticas [12], pinças ópticas [13], etc.. Devido às limitações impostas pela difração, existe um grande interesse no desenvolvimento de técnicas que possibilitem a geração de feixes que não sofram os efeitos da difração.

Em 1987, Durnin [14] impressionou a comunidade científica da área, obtendo uma solução para a equação de onda, cujo perfil transversal do feixe era dado por uma função de Bessel. Tal solução, hoje conhecida como feixe Bessel, não sofre modificações transversais devido à difração, mantendo seu perfil transversal ao longo da propagação.

Um feixe Bessel é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de um cone, onde o ângulo de abertura desse cone é igual a θ . Durnin et al. [15] mostraram que é possível gerar um feixe Bessel utilizando aberturas finitas. Neste caso, foi mostrado que os feixes Bessel são capazes de se propagar por longas distâncias mantendo o perfil transversal aproximadamente inalterado. Estas distâncias dependem dos parâmetros de preparação do feixe.

Além de possuírem propriedades não difratantes, os feixes Bessel de alta ordem transportam momento angular orbital [16]. Entre as aplicações dos feixes Bessel, uma que vem causando grande impacto é o uso dos feixes Bessel como pinças ópticas [17–19], onde é possível aprisionar e mover pequenas partículas. O uso de feixes gaussianos para essa finalidade é limitado pelo efeito da difração.

O estudo da difração da luz possuindo momento angular orbital através de aberturas se deu pela primeira vez com a fenda dupla de Young [20], onde demonstrou-se que a carga topológica do feixe influenciava o padrão de interferência da fenda dupla. Desde então, a teoria de difração tem sido utilizada para caracterizar a carga topológica de um feixe de luz possuindo momento angular orbital [21–23].

É possível caracterizar a carga topológica de um feixe através de seu padrão de difração por uma abertura triangular [24]. Com o desígnio de compreender a teoria envolvida e

os resultados desse trabalho, apresentaremos esta tese em quatro capítulos. No capítulo 1, faremos uma descrição do momento angular transportado pela luz. Neste capítulo descrevemos os feixes Laguerre-Gauss e os feixes Bessel, que podem carregar momento angular orbital.

No capítulo 2, faremos um estudo de alguns métodos para obtenção experimental de feixes que possuem momento angular orbital. Discutiremos o método holográfico, onde construímos hologramas capazes de gerar feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel. Também apresentamos o método que utiliza conversores astigmáticos, construídos a partir de lentes cilíndricas. Por fim, mostraremos algumas técnicas de caracterização do estado de momento angular orbital desses feixes.

O resultado principal desta tese é apresentado no capítulo 3. Inicialmente, estudaremos a difração na aproximação do campo distante de feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel de alta ordem por uma abertura formada por um triângulo equilátero. Mostraremos que a distribuição de intensidade do campo forma uma rede triangular truncada. Discutiremos uma técnica simples para determinar o estado do momento angular orbital de feixes com uma frente de onda helicoidal. Por fim, demonstraremos experimentalmente nossos resultados teóricos, mostrando que a técnica que desenvolvemos, determina sem ambigüidade a magnitude e o sinal da carga topológica de um feixe que transporta momento angular orbital.

No capítulo 4, concluímos, destacando os principais resultados dos estudos realizados durante a tese.

2. Momento Angular Orbital da Luz

2.1 Introdução

Neste capítulo, discutiremos a teoria do momento angular transportado por um feixe de luz. O momento angular da luz tem duas componentes: o momento angular intrínseco devido aos estados de polarização; e o momento angular orbital (extrínseco) que está relacionado com a distribuição espacial do campo eletromagnético. A componente orbital é equivalente a $l\hbar$ por fóton (l é um número inteiro). Qualquer feixe com a distribuição de fase azimutal de $\exp(il\phi)$ transporta momento angular orbital. Exemplos de feixes fisicamente realizáveis com esta distribuição de fase são os feixes Laguerre-Gauss e os feixes Bessel. O primeiro é solução de ordem superior da equação de onda na aproximação paraxial, em coordenadas cilíndricas e o segundo é solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndrica.

Iniciaremos o estudo partindo das equações de Maxwell, as quais descrevem os campos eletromagnéticos. Nosso objetivo será o de deduzir as expressões para o momento angular intrínseco e orbital. Mostraremos que um feixe de luz, com uma dependência na fase azimutal do tipo $\exp(il\phi)$, com l inteiro, possui momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton. Utilizando a aproximação paraxial, veremos que modos Laguerre-Gauss possuem momento angular orbital bem definido. Por fim, apresentaremos a descrição de uma família de feixes que tem características não difratantes e que são soluções da equação de Helmholtz. Esta família de feixes é conhecida como feixes Bessel [14, 15].

2.2 Equações de Maxwell e Potenciais do campo eletromagnético

Na eletrodinâmica clássica, o comportamento do campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell [1]. Essas equações formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para os vetores campo elétrico e campo magnético. No Sistema Internacional de Unidades as equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. \mathbf{J} é o vetor densidade de corrente, ρ a densidade de cargas, ε_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo.

Para evitar as complicações inerentes ao uso das equações de Maxwell para os vetores campo elétrico e campo magnético, é conveniente introduzirmos os conceitos de potenciais escalar e vetorial, para obtermos um conjunto de equações mais simples. Usaremos ϕ para denominar o potencial escalar e \mathbf{A} para o potencial vetor. Sabendo que o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial é nulo, neste caso podemos definir a indução magnética em função do potencial vetor como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Usando esta expressão para \mathbf{B} , a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.6)$$

O termo dentro dos parênteses da equação (2.6) pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar, o potencial escalar ϕ , logo:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.5) e (2.7) na equação (2.2), teremos:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J}. \quad (2.8)$$

Usando a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, obtemos:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

A substituição da equação (2.7) na equação (2.3) fornece a expressão:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho, \quad (2.10)$$

Portanto, temos que:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.11)$$

Assim, reduzimos as quatro equações de Maxwell às equações (2.9) e (2.11), que no entanto, ainda permanecem acopladas. Podemos desacoplar estas duas equações usando o calibre de Lorentz, que pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.12)$$

onde, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ é a velocidade da luz no vácuo. Com isso as equações (2.9) e (2.11) podem

ser escritas como:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.14)$$

As equações (2.13) e (2.14) juntamente com a equação (2.12) formam um conjunto completo de equações equivalentes às equações de Maxwell no vácuo.

2.3 Momento angular intrínseco e orbital da luz

Nesta secção, estudaremos o momento angular total do campo eletromagnético. Mostraremos que o momento angular pode ser escrito como uma soma das contribuições intrínseca e orbital.

No vácuo, a densidade de momento linear \mathbf{p} é dada pelo produto vetorial entre o campo elétrico e a indução magnética [1], ou seja:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.15)$$

A densidade de momento angular \mathbf{j}_m está associada com a densidade de momento linear através da relação:

$$\mathbf{j}_m = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.16)$$

O momento angular total é obtido integrando à densidade de momento angular em todo espaço. Utilizando a definição do potencial vetor \mathbf{A} , podemos escrever:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (2.17)$$

onde usamos a identidade $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ e j representa as componentes

x , y e z dos vetores. Substituindo a equação (2.17) na equação (2.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_m &= \varepsilon_0 \mathbf{r} \times \left[\sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] \\ &= \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] - \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Utilizando as seguintes identidades vetoriais:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (2.19)$$

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{E}. \quad (2.20)$$

Das equações de Maxwell na ausência de cargas livres, temos que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, logo o segundo termo do lado direito da equação (2.19) é nulo.

Assim, podemos expressar a densidade de momento angular como:

$$\mathbf{j}_m = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] - \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \right\}. \quad (2.21)$$

Esta equação foi obtida substituindo as equações (2.19) e (2.20) na equação (2.18). O momento angular total é obtido integrando a densidade de momento angular em todo espaço, ou seja:

$$\mathbf{J}_m = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv - \sum_{j=1}^3 \int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv + \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv \right\}. \quad (2.22)$$

Aplicando o teorema da divergência a segunda integral desta equação, obtemos:

$$\int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv = \oint_s E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) ds_j. \quad (2.23)$$

Se supormos que o campo elétrico se anula quando $r \rightarrow \infty$, a integral de superfície na

equação anterior é nula. Finalmente o momento angular total do campo eletromagnético é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m &= \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv \\ \mathbf{J}_m &= \mathbf{S} + \mathbf{L},\end{aligned}\tag{2.24}$$

onde o termo $\mathbf{S} = \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv$ pode ser associado ao momento angular intrínseco e o termo $\mathbf{L} = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv$ pode ser associado ao momento angular orbital. A justificativa para tal distinção entre o momento angular intrínseco e orbital na equação (2.24), é devida simplesmente ao fato de que \mathbf{S} é independente da posição \mathbf{r} , esta componente está associada ao estado de polarização do campo eletromagnético e será diferente de zero caso esta seja circularmente polarizada, enquanto \mathbf{L} depende da escolha do sistema de referência e principalmente pela presença do operador $\mathbf{r} \times \nabla$, que na Mecânica Quântica está associado ao momento angular orbital de uma partícula, isto nos induz a interpretarmos a componente \mathbf{L} como sendo associada ao momento angular orbital do campo eletromagnético.

2.3.1 Momento angular orbital

Em 1992, Allen e colaboradores [4], demonstraram teoricamente que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal $\exp(il\phi)$ possuem momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton ao longo da direção de propagação, onde l é o índice azimutal.

Admitindo que um feixe de luz monocromática tenha polarização linear e seja definido pelo seguinte potencial vetor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp [i(kz - \omega t)] \hat{x},\tag{2.25}$$

onde \hat{x} é o vetor unitário na direção do eixo x , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o módulo do vetor de onda, λ é o

comprimento de onda do feixe, ω é a frequência angular e $u(\mathbf{r})$ é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe, esta função é solução da equação paraxial. A aproximação paraxial é feita ignorando o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ comparado com $k\frac{\partial u}{\partial z}$, e ignorando o termo $\frac{\partial u}{\partial z}$ comparado com ku na equação de onda escalar. A equação paraxial é descrita por:

$$\nabla_t^2 u + 2ik\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.26)$$

onde $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o Laplaciano transversal.

Adotando a representação do campo eletromagnético pelos potenciais escalar e vetorial, apresentada na secção 1.2 e admitindo a ausência de cargas e correntes elétrica no vácuo, podemos assim, usar calibre de Coulomb (o calibre de Coulomb é freqüentemente usado quando não existem fontes) que é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \implies \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad (2.27)$$

onde \mathbf{A} satisfaz à equação de onda homogênea e a equação (2.7) para o campo elétrico fica reduzida à expressão

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Vamos agora calcular a densidade do momento angular total, dada pela equação (2.16). Visto que os campos são complexos, vamos calcular primeiro a parte real de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ou seja:

$$\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (2.29)$$

Para um vetor potencial dado pela equação (2.25) as expressões para os campos elétrico

e magnético são:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega u \exp[i(kz - \omega t)] \hat{x} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right] \exp[i(kz - \omega t)] \hat{y} - \frac{\partial u}{\partial y} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{z}. \quad (2.31)$$

Portanto,

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \left[\frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} \right] + \omega k |u|^2 \hat{z}, \quad (2.32)$$

como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, então:

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{z}, \quad (2.33)$$

equivalentemente

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = i\omega u \nabla u^* + \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.34)$$

Conseqüentemente, a média temporal da densidade de momento linear do campo eletromagnético é dada por:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \text{Re} [\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{\varepsilon_0}{2} [\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \varepsilon_0 \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.35)$$

Note que este resultado é independente do sistema de coordenadas. Admitindo que a função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe u seja escrita como:

$$u(r, \phi, z) = u_0(r, z) \exp(il\phi), \quad (2.36)$$

sendo solução da equação paraxial em coordenadas cilíndricas, onde l é o índice azimutal. Note que, embora a equação (2.36) viole (2.27), isso não é preocupante dentro da faixa de validade da aproximação paraxial como foi notado por Lax et al. [26]. A aproximação paraxial é a solução de ordem zero das equações de Maxwell obtida pela expansão dos campos em series de potência.

Utilizando a aproximação paraxial podemos desprezar os termos com $\frac{\partial u}{\partial z}$ comparados com ku na média temporal da densidade de momento linear. Por conseguinte, a densidade de momento linear é expressa como:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z}, \quad (2.37)$$

onde \hat{r} , $\hat{\phi}$ e \hat{z} são vetores unitários em coordenadas cilíndricas. Na equação acima podemos notar que a média temporal do vetor de Poynting que é dado por $c^2 \langle \mathbf{p} \rangle$, descreve uma trajetória na forma de um helicóide ao longo da direção de propagação, onde a componente \hat{r} está relacionada com a dispersão do feixe, a componente $\hat{\phi}$ é responsável pelo surgimento do momento angular orbital na direção de propagação e a componente \hat{z} relaciona-se com o momento linear na direção z .

Calculando a média temporal da densidade de momento angular, temos:

$$\langle \mathbf{l} \rangle = -\frac{l\varepsilon_0\omega}{r} z |u_0|^2 \hat{r} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left[\left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) z + 2ikr |u_0|^2 \right] \hat{\phi} + l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 \hat{z}. \quad (2.38)$$

Integrando $\langle \mathbf{l} \rangle$ e $\langle \mathbf{p} \rangle$ no perfil do feixe, constatamos que restará apenas a componente paralela ao sentido de propagação, pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo z . Consequentemente, o mesmo acontecerá integrando no volume do feixe.

Sabendo que a densidade de energia do feixe é $u = cp_z = \varepsilon_0\omega^2 |u_0|^2$, isto é, a velocidade da luz multiplicada pela densidade de momento linear [27], então o momento angular orbital por unidade de energia do feixe, é dado por:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{U} = \frac{\int \mathbf{l} dv}{\int u dv} = \frac{\int l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0\omega^2 |u_0|^2 dv} = \frac{l}{\omega}. \quad (2.39)$$

A relação entre o momento angular orbital e o momento linear é:

$$\frac{\mathbf{L}_z}{\mathbf{P}_z} = \frac{\int \mathbf{l} dv}{\int \mathbf{p} dv} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0 \omega k |u_0|^2 dv} = \frac{l}{k} = l \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (2.40)$$

Como o feixe é polarizado linearmente, então o momento angular não poder ser devido ao spin. Se consideramos um feixe com N fótons, seu momento angular orbital é dado por $Nl\hbar$, enquanto sua energia é $N\hbar\omega$. É esperado então que a razão entre o momento angular orbital e a energia do feixe, ou mesmo entre o fluxo de momento angular orbital e o fluxo de energia, seja dada por l/ω . A equação (2.39) está de acordo com este fato. A analogia entre óptica paraxial e mecânica quântica sugere que feixes com variação de fase de $\exp(il\phi)$ sejam auto-modos do operador momento angular orbital \mathbf{L}_z . Assim sendo, um feixe com dependência azimutal de $\exp(il\phi)$ possui momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton. A maior parte da literatura a respeito de feixes com momento angular orbital tem sido dedicada aos modos Laguerre-Gauss (*LG*), que passaremos a descrever a seguir.

2.3.2 Feixes Laguerre-Gauss

Um conjunto completo de soluções da equação paraxial é formado pelos feixes conhecidos como Laguerre-Gauss. Eles podem ser obtidos da resolução da equação (2.26) em coordenadas cilíndricas usando a técnica de separação de variáveis em ρ e ϕ [28]. A descrição dos modos Laguerre-Gauss é dada por:

$$u_{pl}(r, \phi, z) \propto (-1)^p \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^l \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-i \frac{kr^2}{2R(z)} \right] \exp(il\phi) \\ \times L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[-i(2p + l + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_r} \right) \right], \quad (2.41)$$

onde as funções

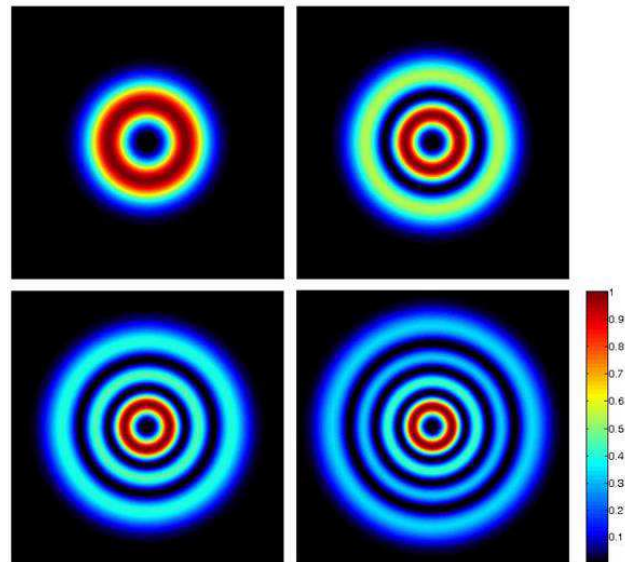
$$w(z) = w_0 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2\right]} \quad (2.42)$$

e

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_r}{z}\right)^2\right] \quad (2.43)$$

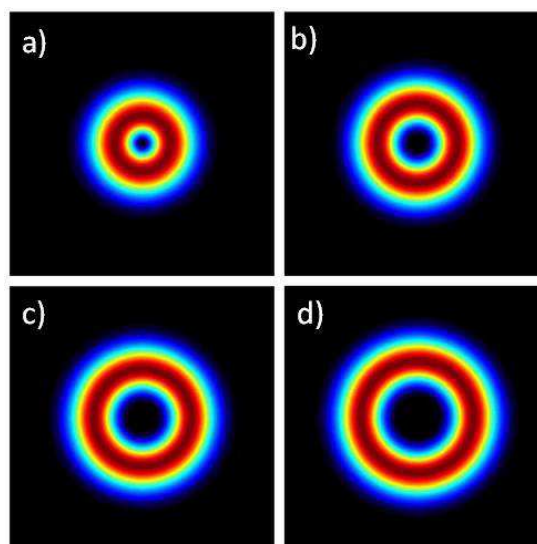
são respectivamente, o raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda no plano z , w_0 é a cintura mínima do feixe e $z_r = kw_0^2/2$ é o comprimento Rayleigh, L_p^l é o polinômio generalizado de Laguerre e o termo $(2p + l + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)$ é a fase de Gouy do modo. Os índices p e l são inteiros que definem a ordem dos modos que é dada por $N = 2p + |l|$. l é o número de 2π ciclos da fase na direção azimutal ao redor do modo e $(p + 1)$ dá o número de anéis através da distribuição radial do campo, como é mostrado na Fig. (2.1). Para um modo Laguerre-Gauss com $p = 0$ e qualquer valor de $l \neq 0$, o feixe Laguerre-Gauss possui o perfil espacial com a forma de um anel luminoso que aumenta de tamanho à medida que se propaga ao longo do eixo que determina o seu centro. Para um dado valor de z , o raio do anel aumenta conforme cresce o valor de l , como vemos na Fig. (2.2).

Figura 2.1: Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss em $z = 0$ para $l = 2$ variando p . a) $p = 0$, b) $p = 1$, c) $p = 2$ e d) $p = 3$.



Fonte: Autor (2011)

Figura 2.2: Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss em $z = 0$ com $p = 0$. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$.



Fonte: Autor (2011)

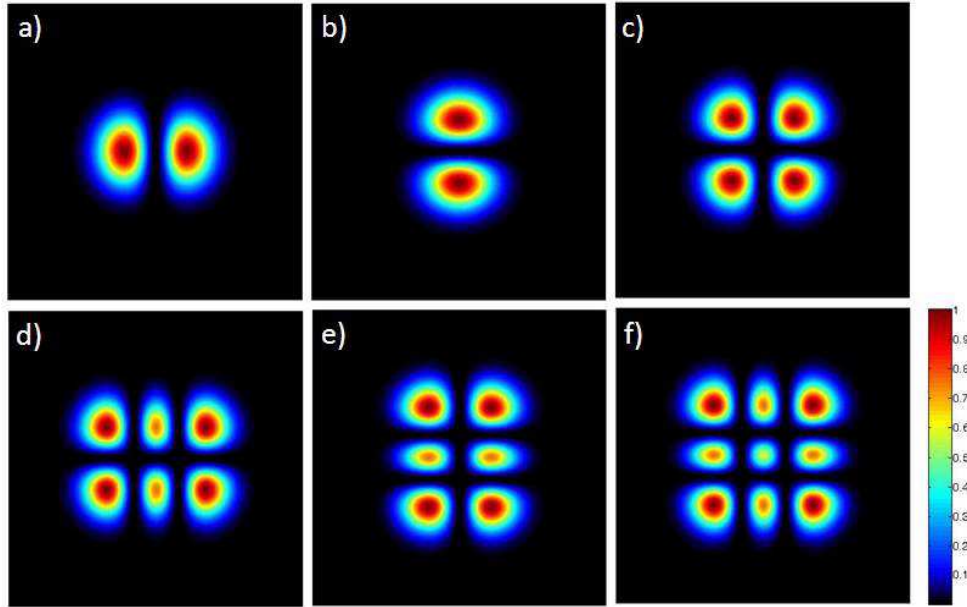
Os modos Laguerre-Gauss com $l \neq 0$ são interessantes porque possuem uma fase azimutal que causa o surgimento de uma frente de onda helicoidal, a presença de tal fase faz com que o feixe apresente uma singularidade, ou seja, a fase não é bem definida na origem do plano, essa singularidade dará origem ao momento angular orbital do feixe. O índice inteiro l é conhecido como a carga topológica do feixe, ele é que dará o módulo e o sentido do momento angular orbital. Levando em conta a quantização do campo, dizemos que um fóton possuirá um momento angular orbital bem definido de $l\hbar$ [4].

Os modos Laguerre-Gauss LG_p^l podem ser decompostos em termos dos modos Hermite-Gauss HG_{mn} [29]. Os índices (m, n) são relacionados com os índices (p, l) por $l = |m - n|$ e $p = \min(m, n)$, a ordem do modo HG_{mn} é definida por $N = m + n$. Os modos HG_{mn} são soluções da equação de onda na aproximação paraxial, mas diferentes dos modos LG_p^l esses modos são deduzidos em coordenadas Cartesianas e não possuem momento angular orbital. Os modos Hermite-Gauss são descritos por:

$$E_{mn}(x, y, z) \propto \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) \exp(ikz) \\ \times \exp\left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right] \exp\left[-i(m + n + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_r}\right)\right], \quad (2.44)$$

onde $H_n(\xi)$ é o polinômio de Hermite de ordem n . Os Perfis de intensidade para alguns modos Hermite-Gauss são mostrados na Fig. (2.3).

Figura 2.3: Perfis de intensidade dos modos Hermite-Gauss: a) HG_{10} , b) HG_{01} , c) HG_{11} , d) HG_{21} , e) HG_{12} e f) HG_{22} .



Fonte: Autor (2011)

Os modos Hermite-Gauss e os modos Laguerre-Gauss formam um conjunto completo de soluções ortogonais da equação paraxial, isto caracteriza duas bases distintas do espaço de soluções da equação paraxial. De fato, existe uma combinação linear de polinômios de Hermite que gera um polinômio de Laguerre, e vice-versa. Para os modos de primeira ordem esta combinação é bastante simples

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm HG_{0,1}). \quad (2.45)$$

De forma geral, pode-se usar esta decomposição para obter ordens mais altas dos modos Laguerre-Gauss, bastando uma combinação de ordens transversais mais altas para os modos Hermite-Gauss [29].

Qualquer feixe de luz, cuja energia está confinada a uma região finita em torno de seu eixo de propagação é sujeito a difração quando se propaga no espaço livre. Para distâncias

de propagação maiores que comprimento Rayleigh, o padrão de difração do feixe se torna cada vez mais perceptível. Este é o caso dos feixes Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss que se propagam com um ângulo de divergência $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ [30]. No entanto, existe uma família de feixes que mantêm um perfil de intensidade constante ao longo da direção de propagação, os chamados feixes não-difratantes, que veremos a seguir.

2.3.3 Feixes Bessel

Os fenômenos de difração são conhecidos há muito tempo, sendo muitas vezes um fator limitante nas aplicações que usam feixes ópticos. A equação de Helmholtz descreve a propagação da luz levando em conta a difração, que é um efeito intrínseco da propagação espacial. Porém, em 1987 J. Durnin, publicou um importante trabalho que mostra que a equação de Helmholtz possui uma família de soluções que se propagam livres de difração [14]. Ele obteve essas soluções para a equação de Helmholtz utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas, hoje conhecidas como feixes Bessel. A expressão geral de um feixe Bessel de ordem l é dada por:

$$E(\rho, \phi, z) = E_0 J_l(\alpha \rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z), \quad (2.46)$$

onde E_0 é uma constante, J_l é a função de Bessel de ordem l , α e β são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, com $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e ρ , ϕ e z são as componentes radial, azimutal e longitudinal do feixe, respectivamente.

O resultado interessante é que esta solução para a equação de Helmholtz tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação. A intensidade do feixe obedece a seguinte igualdade:

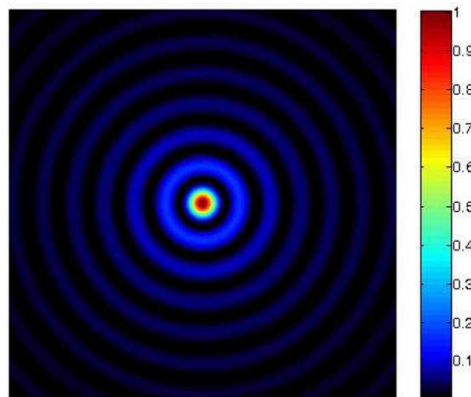
$$I(\rho, \phi, z > 0) = I(\rho, \phi). \quad (2.47)$$

Isto significa que não existe variação no perfil transversal do feixe durante a propagação no vácuo.

No entanto, um feixe Bessel perfeito possui energia infinita, pois se estende por todo o plano transversal. Este fato impossibilita a realização experimental dos feixes Bessel. Por outro lado, podemos considerar feixes Bessel truncados, que podem ser gerados por aberturas finitas. Nestes casos, é possível mostrar que os feixes Bessel se propagam por uma distância que depende dos parâmetros de preparação, mantendo o padrão transversal aproximadamente inalterado [15, 38].

Os feixes Bessel são caracterizados por sua estrutura de anéis concêntricos. No caso do feixe Bessel da ordem zero, o centro do feixe é a região onde a intensidade é máxima, veja Fig. (3.1), enquanto que nos feixes de ordem superior ($l \neq 0$), o centro do feixe é ocupado por uma região cuja intensidade é nula, como é mostrado na Fig. (2.5).

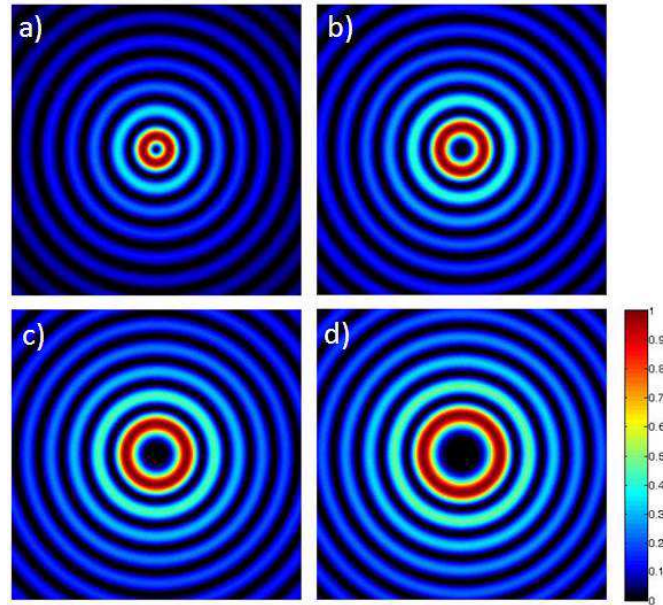
Figura 2.4: Perfil de intensidade para o feixe Bessel de ordem zero.



Fonte: Autor (2011)

Os feixes Bessel de alta ordem possuem singularidades na fase e uma frente de onda helicoidal, desta forma, além de possuírem propriedades não difratantes, transportam momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton [16]. Os perfis de intensidade para os feixes Bessel de alta ordem são mostrados na Fig. (2.5).

Figura 2.5: Perfil de intensidade para um feixe Bessel de alta ordem. a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$.



Fonte: Autor (2011)

2.4 Conclusão

Utilizando a teoria eletromagnética, vimos que o momento angular total de um feixe de luz pode ter duas componentes bem definidas: o momento angular intrínseco que depende apenas do estado de polarização do feixe; e o momento angular orbital, que depende da estrutura de fase azimutal. Dentro da aproximação paraxial mostramos que um feixe de luz linearmente polarizado com uma fase azimutal $\exp(il\phi)$ possui momento angular orbital bem definido na direção de propagação. Diferentemente do momento angular intrínseco, que tem exclusivamente três estados independentes, correspondendo às polarizações circular no sentido horário e anti-horário e a polarização linear, o momento angular orbital tem um número ilimitado de estados, correspondendo a todos os valores inteiros de l .

Neste capítulo, estudando os feixes Laguerre-Gauss e os feixes Bessel, vimos que tais feixes possuem momento angular orbital bem definido de $l\hbar$ por fóton. No próximo capítulo estudaremos como gerar esses tipos de feixes e como caracterizar o seu estado de momento angular orbital.

3. Geração e caracterização de feixes possuindo momento angular orbital

3.1 Introdução

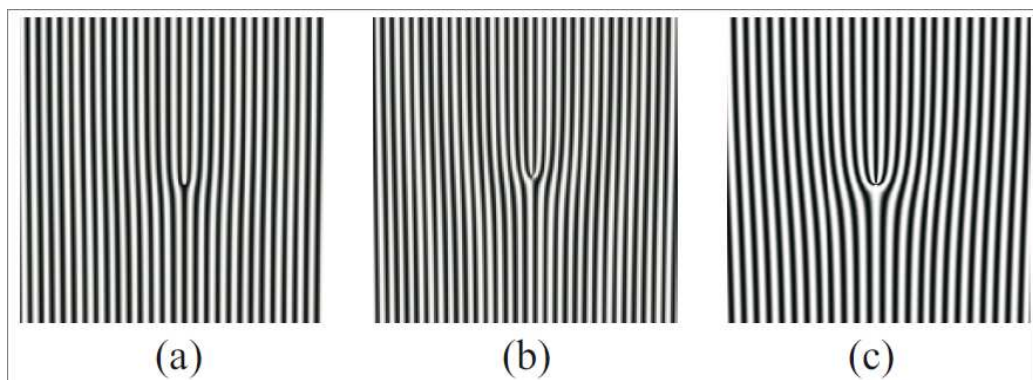
A produção de feixes de luz possuindo momento angular orbital não é uma das tarefas mais fáceis. A maioria dos lasers comerciais produzem feixes com frentes de ondas aproximadamente planas e perfil de intensidade gaussiano, pois esse é o modo de excitação de menor energia da cavidade. Entretanto, existem vários métodos para gerar feixes com momento angular orbital de maneira estável. Devido a ter aplicações em campos da ciência e tecnologia, como processamento de informações em óptica quântica [31], comunicação no espaço livre [7] e micromanipulações ópticas [13, 32], o interesse na geração de feixes com momento angular orbital tem aumentado muito. A carga topológica é um parâmetro importante para a caracterização do momento angular orbital de um feixe. Medir a carga topológica de feixes tem se tornado um campo de pesquisa interessante atraindo mais e mais atenção. A seguir, descreveremos alguns métodos para obtenção experimental de feixes com momento angular orbital, assim como, algumas técnicas de identificação da carga topológica desses feixes.

3.2 Geração de Feixes Laguerre-Gauss

Um método simples para a obtenção dos modos Laguerre-Gauss é usando um holograma gerado por computador. Essencialmente um holograma é a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, em geral uma onda plana. Ao iluminarmos o holograma com o feixe de referência, reconstruímos o feixe de interesse pela difração da luz.

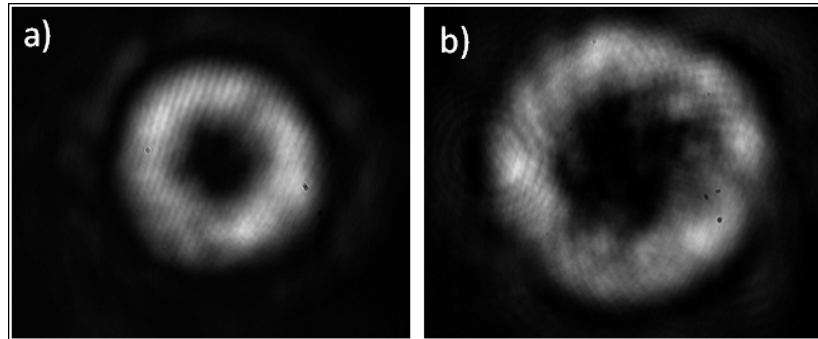
Obtemos os hologramas a partir do padrão de interferência de um feixe Gaussiano e um modo Laguerre-Gauss com carga topológica l . O padrão resultante é apresentado na Fig.(3.1), neste caso, o padrão tem a forma de uma grade de difração, cujas ordens possuem modos Laguerre-Gauss de diferentes cargas topológicas [33]. Podemos observar franjas de interferência com l bifurcações em seu centro, sendo l , a carga topológica do modo a ser gerado em primeira ordem de difração. Estes padrões são impressos com uma impressora de alta resolução, fotografados e então revelados. A Fig.(3.2) mostra o padrão de difração de primeira e segunda ordem de uma onda plana após passar pelo holograma da Fig.(3.1)(a), gerando feixes Laguerre-Gaus com $l = 1$ e $l = 2$.

Figura 3.1: Padrão de interferência gravado para produzir em primeira ordem de difração feixes Laguerre-Gauss com a) $l = \pm 1$, b) $l = \pm 2$ e c) $l = \pm 3$.



Fonte: Autor (2011).

Figura 3.2: Perfil de intensidade para feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 1$ e b) $l = 2$.



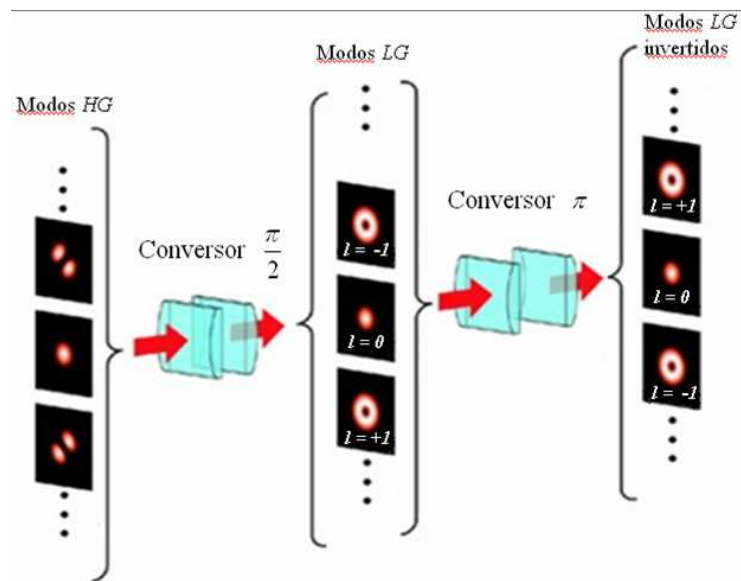
Fonte: Autor (2011).

O método holográfico nos permite obter modos Laguerre-Gauss de diferentes cargas topológicas, este método é bastante vantajoso devido a sua praticidade e ao baixo custo. Um fator limitante neste método é a utilização dos hologramas em experimentos onde o regime de intensidade é baixo, o uso de alta intensidade irá derreter o plástico do filme fotográfico. Portanto, este método se torna inadequado em experimentos onde precisamos de alta potência do feixe.

Podemos contornar as desvantagens do método holográfico de produção de modos Laguerre-Gauss num regime de alta potência utilizando lentes cilíndricas para transformar um modo Hermite-Gauss em um modo Laguerre-Gauss [37]. Se um par de lentes cilíndricas idênticas com comprimento focal f estiverem separadas por $\sqrt{2}f$, então um modo Hermite-Gauss passando por esse conjunto de lentes será convertido no modo Laguerre-Gauss, esse dispositivo é chamado de conversor $\pi/2$. Esse sistema de lentes cilíndricas é equivalente a uma placa de $\lambda/4$ que transforma luz linearmente polarizada em luz circularmente polarizada. Quando a separação entre as lentes é aumentada para $2f$, um modo LG com índice azimutal l é convertido em um modo LG com índice azimutal $-l$, esse sistema de lentes é chamado de conversor π . Esse conversor é análogo a uma placa de $\lambda/2$ que inverte o sentido da luz circularmente polarizada transmitida. A Fig.(3.3) mostra esse sistema

de lentes cilíndricas. Embora este processo de conversão seja altamente eficiente, cada modo Laguerre-Gauss requer um modo Hermite-Gauss particular. O pré-requisito de um determinado modo Hermite-Gauss limita a gama de modos Laguerre-Gauss que podem ser produzidos.

Figura 3.3: Conversor de modos



Fonte: Padgett (2008).

3.3 Geração de Feixes Bessel

Matematicamente, um feixe Bessel perfeito contém um número infinito de anéis, e assim, sobre uma área infinita transportaria uma energia infinita. Portanto, não é possível criar um feixe Bessel perfeito. Na prática, consegue-se uma boa aproximação para os feixes Bessel, mesmo eles sendo produzidos em regiões finitas.

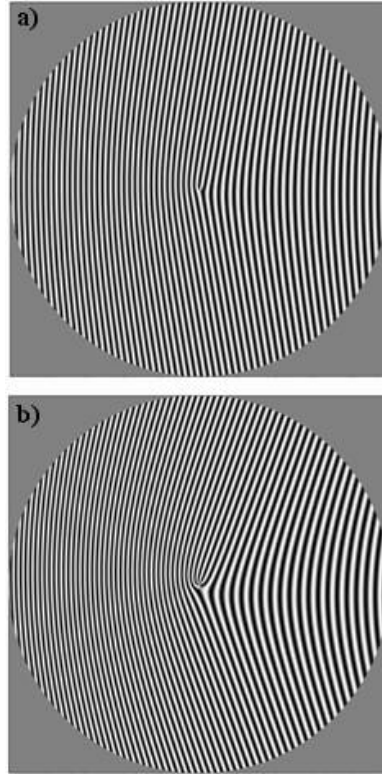
A geração experimental de feixes Bessel pode ser feita iluminando uma fenda circular colocada no plano focal de uma lente [15], usando holograma gerado por computador [38] ou utilizando um áxicon (lente cônica) [39]. Aqui descreveremos apenas a técnica de

geração de feixes Bessel através de holograma gerado por computador. No caso dos feixes Bessel com a onda plana como o feixe de referência o padrão de interferência formado possui bifurcações no centro do holograma, com número destas bifurcações sendo igual ao índice azimutal do feixe Bessel formado pela difração de primeira ordem. A função transmissão de um holograma circular de raio R é dada por [38]:

$$t(\rho, \phi) = \exp \left[i \left(2\pi\nu\rho \cos(\phi) + l\phi - \frac{2\pi}{\rho_0} \rho \right) \right] \quad (3.1)$$

onde ρ e ϕ são as coordenadas radial e azimutal no plano do holograma, respectivamente. O termo $\exp [i (2\pi\nu\rho \cos(\phi))]$ define o parâmetro que especifica o ângulo de difração pela projeção no plano do holograma da onda plana de referência, incidindo com um ângulo γ em relação a normal ao plano do holograma, sendo $\nu = \frac{\sin \gamma}{\lambda}$ a frequência que separa as ordens de difração produzida pelo holograma e λ é o comprimento de onda. O fator $\exp \left(-i \frac{2\pi}{\rho_0} \rho \right)$ corresponde a uma onda cônica, que é característica dos feixe Bessel [15], onde ρ_0 é uma constante e o termo $\frac{2\pi}{\rho_0}$ é a frequência espacial transversal do feixe Bessel. A Fig. (3.4) mostra hologramas que geram feixes Bessel de ordem, $l = 1$ e $l = 4$. Um feixe Bessel gerado por esse tipo de holograma se propaga sem sofrer difração por uma distância dada por $z_{\max} = \frac{\rho_0 R}{\lambda}$.

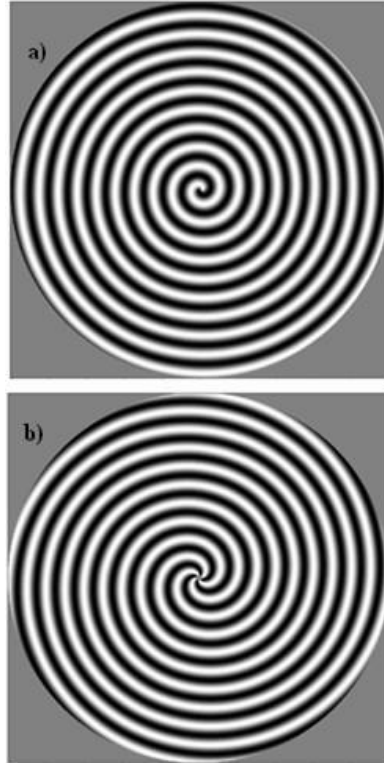
Figura 3.4: Hologramas gerados no computador para preparação de feixes Bessel; Feixes Bessel com *a)* $l = 1$ e *b)* $l = 4$.



Fonte: Autor (2011).

Para $\gamma = 0$, a onda plana tem o vetor de propagação perpendicular ao holograma, desta forma, a estrutura do holograma gerado no computador terá um padrão de espiral, como indica a Fig. (3.5), onde o número de espirais é igual ao índice l do feixe Bessel.

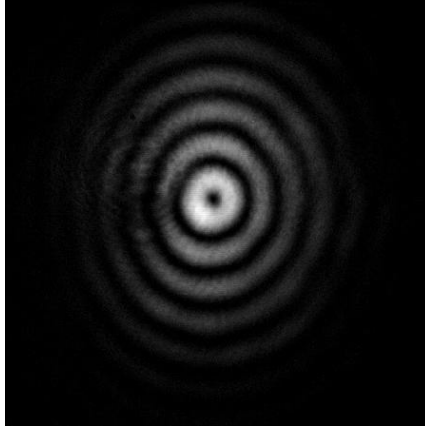
Figura 3.5: Hologramas gerados quando $\gamma = 0$. a) Para $l = 1$ e b) para $l = 4$.



Fonte: Autor (2011).

A Fig.(3.6) mostra o perfil de intensidade de um feixe Bessel com $l = 1$, produzido em primeira ordem de difração, gerado por um holograma com parâmetros: $\nu = 6000m^{-1}$, $\rho_0 = 1mm$ e $R = 10mm$. Podemos ver uma estrutura de anéis de intensidade concêntricos, esse feixe se propaga sem sofrer difração por aproximadamente $19,4m$.

Figura 3.6: Perfil de intensidade um feixe Bessel de primeira ordem.



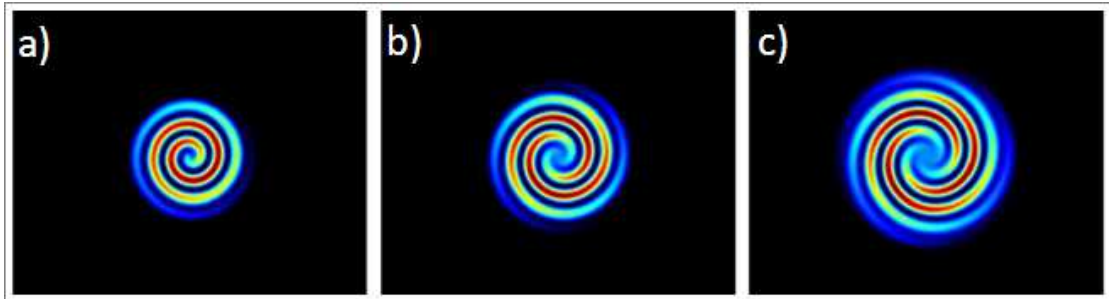
Fonte: Autor (2011).

3.4 Caracterização de Feixes Possuindo Momento Angular Orbital

Vimos que uma característica de feixes com momento angular orbital é uma região no centro do feixe onde a intensidade é nula. No entanto, para identificar a carga topológica do feixe não é suficiente identificar os pontos de intensidade zero. Em vez disso, deve-se obter informações sobre a fase, verificando se a fase é harmônica, satisfazendo esta condição, também será satisfeita a exigência de que a intensidade no centro do feixe será nula.

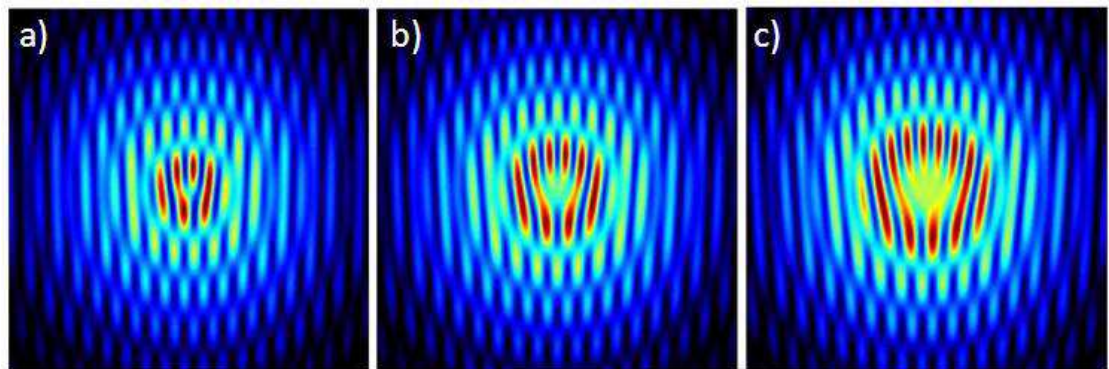
Um dos métodos mais comuns de caracterização de cargas topológicas em feixes é a interferência com uma onda de referência. Em uma interferência de ondas colineares, ocorre um padrão de franjas em espiral, como mostra a Fig.(3.7), o número de espirais corresponde ao valor da carga topológica. Quando feixes são não-colineares, a localização e a carga topológica do feixe pode ser identificado por um padrão característico de bifurcações no padrão de interferência, como é mostrado na Fig.(3.8).

Figura 3.7: Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss colinear com uma onda plana. Os valores da carga topológica são: a) $l = 1$, b) $l = 2$ e c) $l = 3$.



Fonte: Autor (2011).

Figura 3.8: Padrão de interferência de um feixe Bessel e uma onda plana, no regime não-colinear. Os valores da carga topológica são: a) $l = 1$, b) $l = 2$ e c) $l = 3$.



Fonte: Autor (2011).

No entanto, a identificação da carga topológica fica mais e mais difícil com o aumento do valor do índice azimutal, isso limita o uso de técnicas interferométricas para caracterizar o momento angular orbital de um feixe.

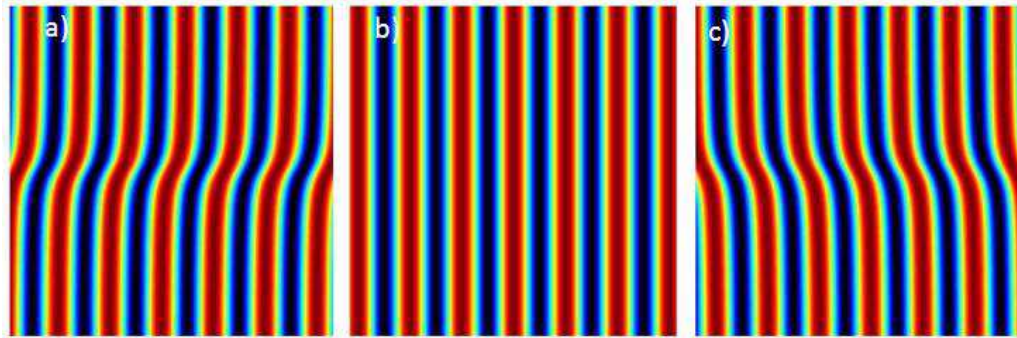
Recentemente, H. I. Sztul e R. R. Alfano [20] propuseram um método para investigar o momento angular orbital de feixes ópticos. Neste método, é possível identificar a dependência de fase azimutal de um feixe através da interferência em um típico experimento

de fenda dupla de Young. A intensidade do padrão de difração do campo distante de um feixe Laguerre-Gauss incidente em uma fenda dupla, é dado por

$$I(x, y) \propto \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{\lambda d} + \frac{\Delta\phi(y)}{2} \right), \quad (3.2)$$

onde, λ é o comprimento de onda do feixe incidente, a é largura das fendas, d é distância das fendas ao plano de observação e $\Delta\phi(y)$ é a variação de fase adicional entre as duas fendas. O padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss incidente nas duas fendas, é mostrado na Fig.(3.9), calculado da relação (3.2).

Figura 3.9: Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda dupla com a) $l = 1$, b) $l = 0$ e c) $l = -1$.

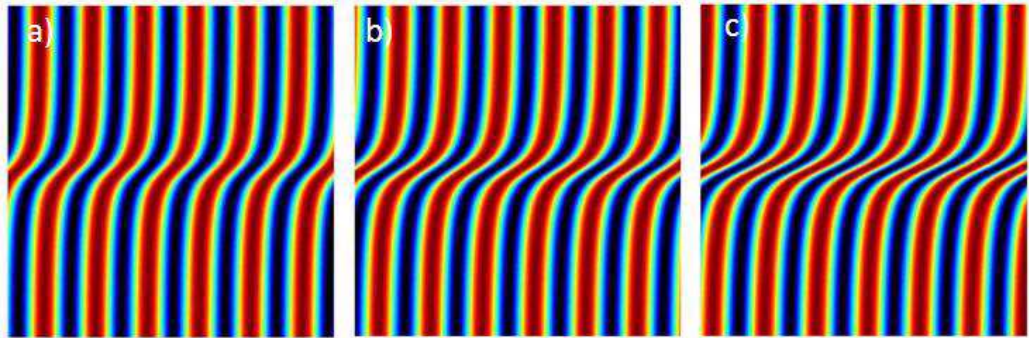


Fonte: Autor (2011).

Quando a carga topológica é $l \neq 0$ há um descolamento das franjas de interferência, observando o topo da Fig.(3.9) (a), temos um deslocamento da esquerda para a direita das franjas de interferência, e na Fig.(3.9) (c) o deslocamento das franjas de interferência é da direita para esquerda. A variação da fase na direção y ao longo das fendas é o que afeta o padrão de interferência. Com esses resultados, H. I. Sztul e R. R. Alfano concluíram que este método de fenda dupla é um bom candidato para medir o estado de momento angular orbital de feixes Laguerre-Gauss.

Analisando a eq.(3.2) para valores de $l > 1$, encontramos os padrões de interferência que são mostrados na Fig.(3.10).

Figura 3.10: Padrão de interferência de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda dupla com a) $l = 2$, b) $l = 3$ e c) $l = 4$.



Fonte: Autor (2011).

Pode ser visto que o padrão de interferência muda com o aumento da carga topológica, o deslocamento se torna maior e mais perceptível. No entanto, é difícil identificar o valor da carga topológica observando apenas a imagem de interferência, esta configuração parece mais adequada para determinar o sinal da carga topológica.

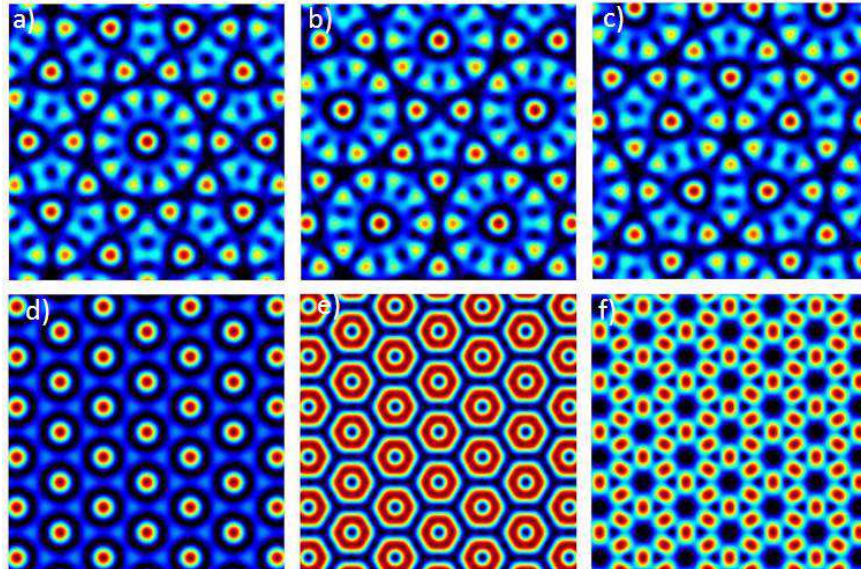
Em outro trabalho recente, Berkhout e Beijersbergen [21] descreveram um sistema de dois ou mais pontos, abrangendo a singularidade de um feixe óptico, que eles chamaram de interferômetro de multiponto (MPI), e mostraram que pode ser usado para medir o estado de momento angular orbital de feixes com frente de onda helicoidal. Neste método, a carga topológica do feixe pode ser reconhecida de acordo com o fato de que diferentes valores para carga topológica correspondem a diferentes padrões de difração do campo distante, após o feixe passar através do MPI. Os autores mostram que a intensidade do padrão de difração de um feixe Laguerre-Gauss ao passar por um MPI no limite de

Fraunhofer é dada por

$$I_l^N \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-il\alpha_n) \exp \left[i \frac{ka}{z} (x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n) \right] \right|^2 \quad (3.3)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o módulo do vetor de onda, $\alpha_n = 2\pi n/N$ é a coordenada azimutal do n -ésimo ponto, a é a coordenada radial do ponto e N é o número de pontos. A Fig.(3.11) reproduz alguns padrões de intensidade do campo distante de um MPI de N pontos iluminado por um feixe Laguerre-Gauss com índice azimutal l calculado da eq.(3.3). Na Fig.(3.11) (a), (b) e (c) temos $N = 5$ e para Fig.(3.11) (d), (e) e (f) temos $N = 6$ com carga topológica $l = 0, 1, 2$, respectivamente. Com esses resultados, os autores concluem que observando o padrão de difração do campo distante de um MPI iluminado por um feixe com frente de onda helicoidal, é possível determinarmos o estado do momento angular orbital desse feixe.

Figura 3.11: Distribuição de intensidade de um MPI.



Fonte: Autor (2011).

Agora, calculemos o padrão de intensidade do campo distante de um MPI, repassando

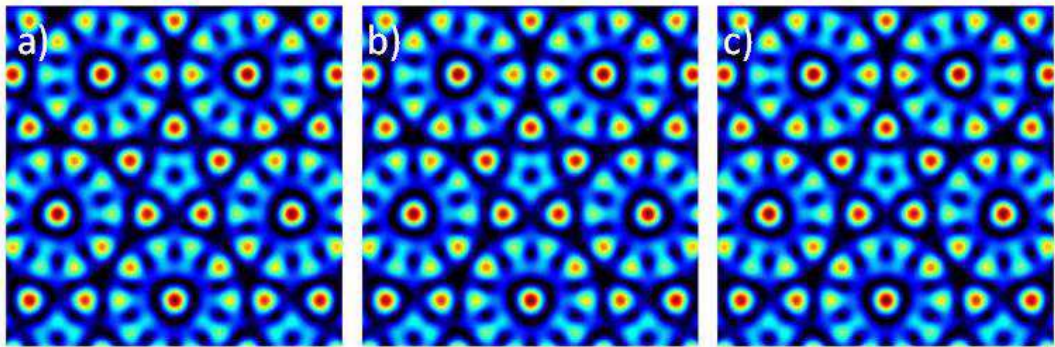
l por $l + pN$, onde p é um número inteiro e N é o número de pontos do MPI, temos

$$I_{l+pN}^N \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp[-i(l+pN)\alpha_n] \exp\left[i\frac{ka}{z}(x\cos\alpha_n + y\sin\alpha_n)\right] \right|^2$$

$$I_{l+pN}^N \propto \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-il\alpha_n) \exp(-ipN\alpha_n) \exp\left[i\frac{ka}{z}(x\cos\alpha_n + y\sin\alpha_n)\right] \right|^2 \quad (3.4)$$

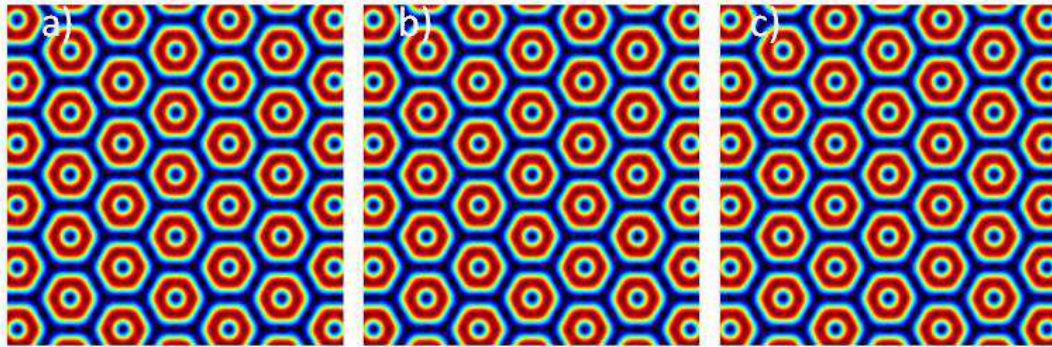
Note que o termo $\exp(-ipN\alpha_n) = 1$ na eq.(3.4), fazendo com que tenhamos $I_l^N = I_{l+pN}^N$, ou seja, a distribuição de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica l difratado pelo MPI tem a mesma distribuição de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica $l' = l + pN$. Por exemplo, um feixe com carga topológica $l = 1$ difratado por um MPI com seis pontos, $N = 6$, possui a mesma distribuição de intensidade de feixes com carga topológica $l' = \dots - 11, -5, 7, 13, \dots$. A Fig.(3.12) ilustra esses resultados para um MPI com $N = 5$. Na Fig.(3.13), mostramos os padrões de intensidade do campo distante de um MPI com $N = 6$, iluminado por um feixe Laguerre-Gauss com $l = -5, 1, 7$, respectivamente.

Figura 3.12: Padrão de difração do campo distante depois de um MPI com $N = 5$ pontos iluminado com um feixe Laguerre-Gauss com modo azimutal: a) $l = -1$, b) $l = 4$ e c) $l = 9$.



Fonte: Autor (2011).

Figura 3.13: Padrão de difração do campo distante depois de um MPI com $N = 6$ pontos iluminado com um feixe Laguerre-Gauss com modo azimuthal: a) $l = -5$, b) $l = 1$ e c) $l = 7$.



Fonte: Autor (2011).

É fácil observarmos que analisando os padrões de difração do campo distante de um MPI, iluminado por um feixe Laguerre-Gauss de alta ordem, não é possível caracterizar a carga topológica do feixe difratado devido a ambigüidade dos resultados. Dessa forma, a técnica desenvolvida pelo autores do artigo [21] não pode ser utilizada para determinar o estado de momento angular orbital de um feixe.

3.5 Conclusão

Neste capítulo, Apresentamos algumas técnicas de obtenção de feixes com simetria cilíndrica, os feixes Laguerre-Gauss e feixes Bessel, portadores de momento angular orbital. Discutimos o método holográfico, onde o holograma é uma grade de difração bifurcada, que nos permite obter várias ordens dos modos desejados simultaneamente. Também foi discutido o método astigmático, onde um par de lentes cilíndricas é utilizado para transformar um modo Hermite-Gauss em um modo Laguerre-Gauss. Descrevemos o método interferométrico de verificação da carga topológica de um feixe. Finalizamos esse capítulo descrevendo outros dois métodos de caracterização da carga topológica de um feixe, a

fenda dupla de Young e o interferômetro de multiponto MPI, mostramos que ambos os métodos produzem resultados ambíguos. Com a fenda dupla de Young é possível apenas determinar o sinal da carga topológica, enquanto que o MPI não é possível distinguir os estados de momento angular orbital do feixe. No próximo capítulo, mostraremos uma técnica onde somos capazes de caracterizar o sinal e o módulo da carga topológica de forma simples e sem ambigüidades.

4. Determinação da carga topológica de feixes com momento angular orbital.

4.1 Introdução

No capítulo anterior, discutimos alguns métodos para obtenção experimental de feixes com momento angular orbital, assim como, algumas técnicas de identificação da carga topológica desses feixes. Neste capítulo, estudaremos o padrão de difração na aproximação de Fraunhofer de um feixe com frente de onda helicoidal por uma abertura triangular. Nós mostraremos que o padrão de distribuição de intensidade do campo devido à difração apresenta uma rede óptica de vórtices triangular truncada, associada a abertura iluminada e a carga topológica do feixe. Com base nessas propriedades, proporemos um método simples e viável para determinar a magnitude e o sinal da carga topológica de um feixe possuindo momento angular orbital .

4.2 Difração por uma abertura triangular

Consideremos um feixe Laguerre-Gauss com índice $p = 0$ no plano $z = 0$, cuja amplitude complexa é dada por:

$$U_0(r, \phi, z = 0) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_0} \right)^l \exp \left[-\frac{r^2}{w_0^2} \right] \exp(il\phi) \quad (4.1)$$

onde w_0 é a cintura mínima do feixe, $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ é a coordenada radial, $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$ é a coordenada azimutal e l é a carga topológica do feixe. Admitindo que uma abertura triangular tem uma função transmissão $\tau(x_0, y_0)$, dessa forma, o padrão de difração na aproximação de Fraunhofer (campo distante) do feixe Laguerre-Gauss ao incidir perpendicularmente nesta abertura é dado pela integral [30]:

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{-i}{\lambda z} \exp \left[ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right] \iint U_0(x_0, y_0, z = 0) \tau(x_0, y_0) \\ &\times \exp \left[-\frac{ik}{z} (xx_0 + yy_0) \right] dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

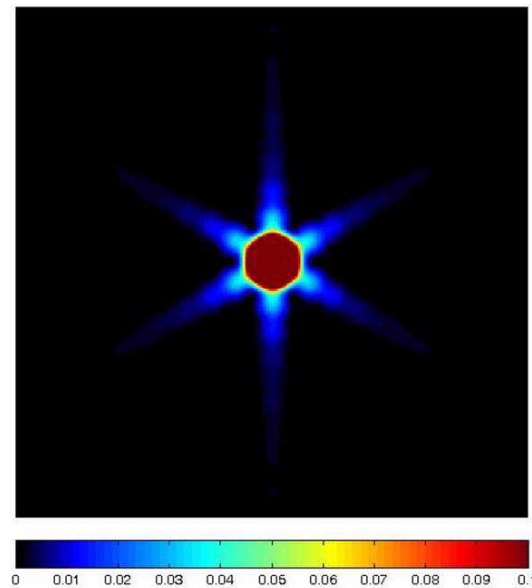
fazendo as seguintes substituições na integral da eq.(4.2) $k_x = \frac{k}{z}x$ e $k_y = \frac{k}{z}y$, onde k_x e k_y são as componentes transversais do vetor de onda no plano de observação, a eq.(4.2) pode ser escrita como

$$E(k_x, k_y) = \iint U_0(x_0, y_0, z = 0) \tau(x_0, y_0) \exp [-i(k_x x_0 + k_y y_0)] dx_0 dy_0. \quad (4.3)$$

Na eq.(4.3) desconsideamos o termo de fase já que estamos interessados apenas nas intensidades em um plano fixo colocado na posição z , dessa forma, a distribuição do campo é obtida da transformada de Fourier do produto da função que descreve a abertura triangular $\tau(x_0, y_0)$ e o campo incidente $U_0(x, y, z = 0)$. Note que as componentes transversais do vetor onda podem ser associadas com o sistema de coordenadas na região do campo distante, elas formam as coordenadas do espaço recíproco. Quando o feixe incidente é

uma onda plana, a eq.(4.3) geralmente pode ser resolvida, sendo uma transformada de Fourier bidimensional da função da abertura [34]. A Fig.(4.1), mostra o padrão de difração no campo distante para uma onda plana passando por uma abertura, formada por um triângulo equilátero.

Figura 4.1: Padrão de difração de Fraunhofer para uma onda plana através de uma abertura triangular. O padrão foi saturado para podemos observar o aspecto do padrão.

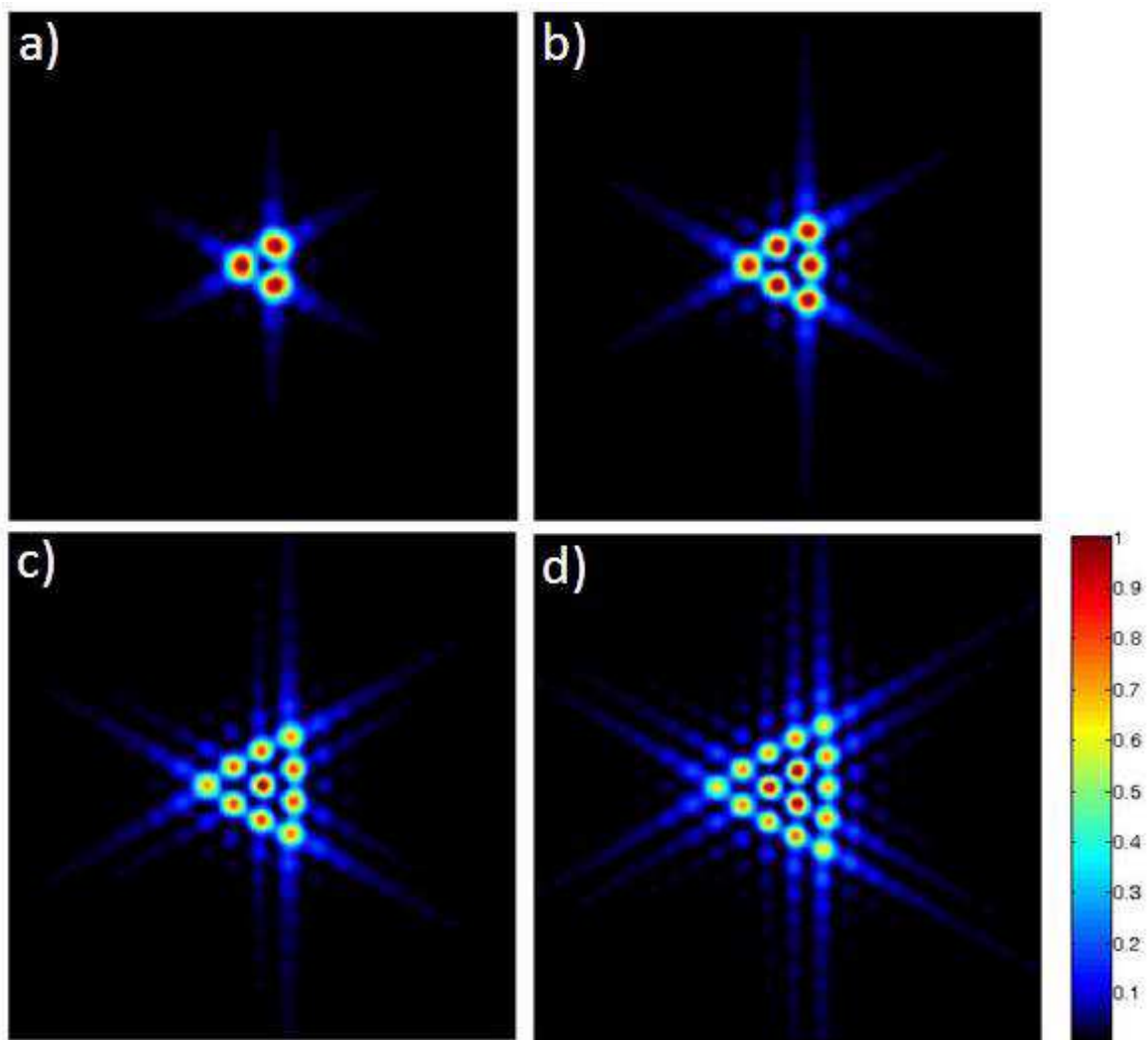


Fonte: Autor (2011).

Entretanto, a integral não tem sido resolvida analiticamente para aberturas poligonais, quando o campo incidente tem uma estrutura de frente de onda helicoidal.

Resolvendo numericamente a eq.(4.3), podemos obter os padrões de difração de Fraunhofer para uma abertura triangular (triângulo equilátero), usando como condição inicial do campo a eq.(4.1). As distribuições de intensidade do padrão de difração de Fraunhofer para diferentes valores da carga topológica l do campo incidente, é mostrado na Fig(4.2).

Figura 4.2: Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular, mostrada na Fig4.3. Nos resultados numéricos a intensidade da luz aumenta do preto para o vermelho. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$. Observamos que cada lado da rede tem $l + 1$ pontos brilhantes.



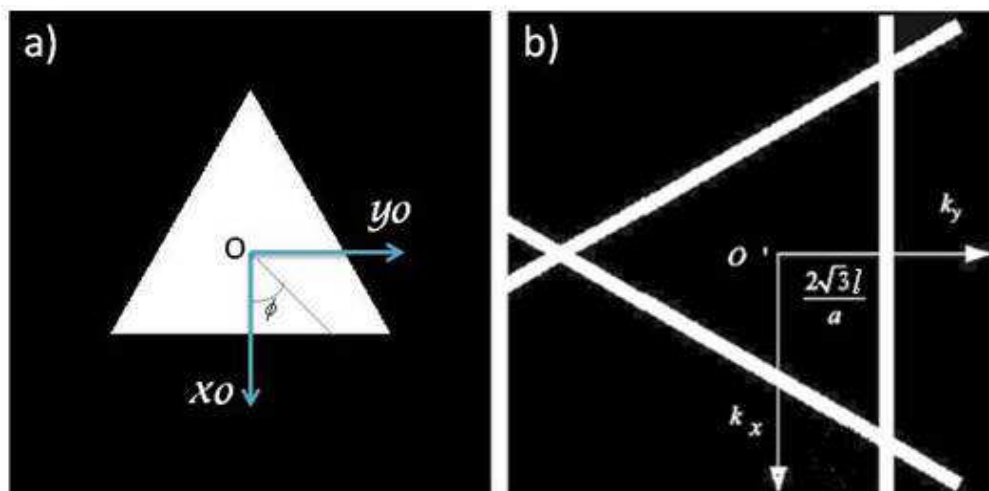
Fonte: Autor (2011).

Note que as distribuições de intensidade do campo distante exibem um padrão de rede óptica triangular. Observe que o tamanho da rede óptica aumenta com a carga topológica l , aumentando também o número de máximos de intensidade. Além disso, observe que a rede é girada em 30° no sentido horário em relação a abertura triangular, mostrada na

Fig.(4.2)(a).

Os padrões mostrados na Fig.(4.2), podem ser explicados a partir da teoria de interferência. É bem conhecido que o padrão de difração de um feixe de luz por uma abertura é o resultado da interferência dos campos difratados pela bordas da abertura. Utilizaremos um argumento qualitativo simples para analisar o efeito da fase azimutal ao longo da borda do triângulo, analisando cada borda separadamente.

Figura 4.3: a) Esboço para a abertura triangular e b) Linhas de contorno para a distribuição de intensidade de campo distante após o feixe sofrer difração nas três bordas do triângulo.



Fonte: Autor (2011).

Supondo que o eixo de propagação do feixe incidente coincide com o centro da abertura triangular, a fase correspondente a cada uma das bordas do triângulo terá a mesma distribuição. Tomando o sistema de coordenadas com origem O no centro do triângulo, mostrado a Fig.(4.3)(a), a fase ao longo de uma das bordas pode ser escrita como

$$\phi(y) = \sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{a^2}{12} + y^2}} \right), \quad (4.4)$$

onde a é o tamanho de cada lado do triângulo. Expandindo a função $\phi(y)$ em séries de Taylor e utilizando apenas o termo de primeira ordem temos

$$\phi(y) \approx \frac{2\sqrt{3}y}{a}. \quad (4.5)$$

Aproximando as bordas do triângulo por fendas com larguras infinitesimais, de modo que possamos tratá-las como uma delta de Dirac e ignorando a variação da amplitude do campo por simplicidade, o campo na fenda horizontal pode ser expresso aproximadamente como

$$U_0 \sim \delta\left(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \exp\left(\frac{i2\sqrt{3}ly_0}{a}\right) \quad (4.6)$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas Cartesianas no plano da abertura. Substituindo a eq.(4.6) na eq.(4.3) temos

$$E(k_x, k_y) = \iint \delta\left(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \exp\left(\frac{i2\sqrt{3}ly_0}{a}\right) \exp[-i(k_x x_0 + k_y y_0)] dx_0 dy_0. \quad (4.7)$$

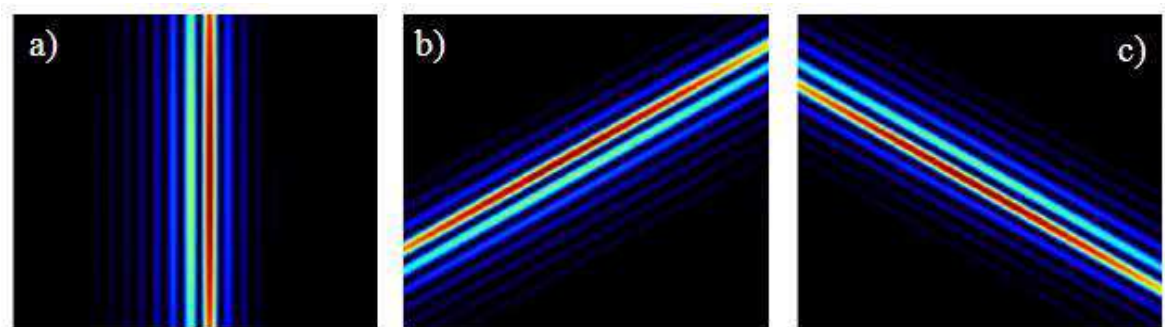
A integral pode ser resolvida facilmente utilizando as propriedades da transformada de Fourier, assim, a distribuição do campo no plano de Fourier é escrito como

$$E(k_x, k_y) = \delta\left(k_y - \frac{2\sqrt{3}l}{a}\right) \exp\left(-i\frac{\sqrt{3}a}{6}k_x\right), \quad (4.8)$$

onde k_x e k_y são as coordenadas transversas no plano de Fourier. Podemos ver das eq.(4.6) e (4.8) que o campo na fenda é rotacionado de 90° no plano de Fourier. Como esperado, podemos ver que uma fenda infinitesimal ao longo de y produz um padrão que é deslocado na direção k_y (ou seja, o centro do padrão é deslocado) por um montante proporcional à l . O efeito da fase azimutal sobre este padrão de difração é produzir um deslocamento proporcional à carga topológica, podemos ver também uma dependência desse deslocamento proporcional ao inverso do tamanho do lado do triângulo. Podemos chegar a resulta-

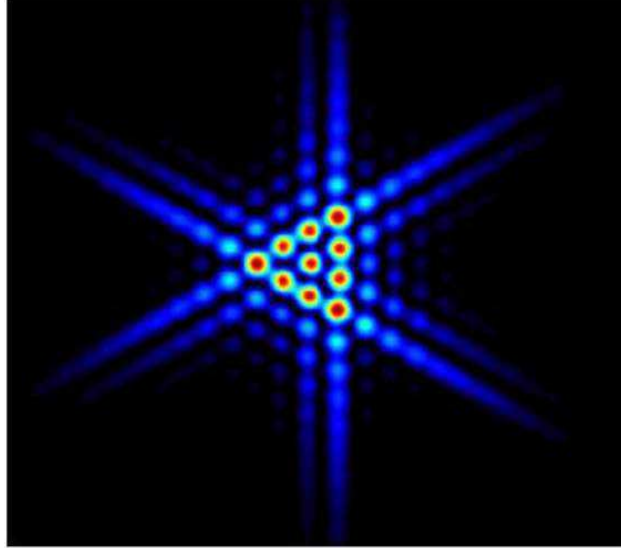
dos semelhantes para as outras duas bordas do triângulo seguindo o mesmo raciocínio. Desta forma, a amplitude do campo no plano de Fourier, resulta da interferência entre os padrões de difração das bordas do triângulo, e a interferência resultante apresenta uma distribuição triangular, cujo tamanho da rede no espaço de Fourier é proporcional ao valor da carga topológica l e inversamente proporcional ao tamanho do lado do triângulo equilátero. A Fig.(4.4) mostra os padrões de difração, associados com as fendas simples do triângulo, observamos que todos os padrões são deslocados como esperado [35]. O padrão de difração resultante da fenda triangular é igual a interferência das fendas simples, como mostra a Fig.(4.5)

Figura 4.4: Padrão de difração produzido pelas fendas simples de uma fenda triangular, a) fenda horizontal, b) fenda da direita, e c) fenda da esquerda do triângulo. Os padrões foram obtidos para $l = 3$.



Fonte: Autor (2011).

Figura 4.5: Padrão de difração de um feixe Laguerre-Gauss com $l = 3$ por uma fenda triangular.



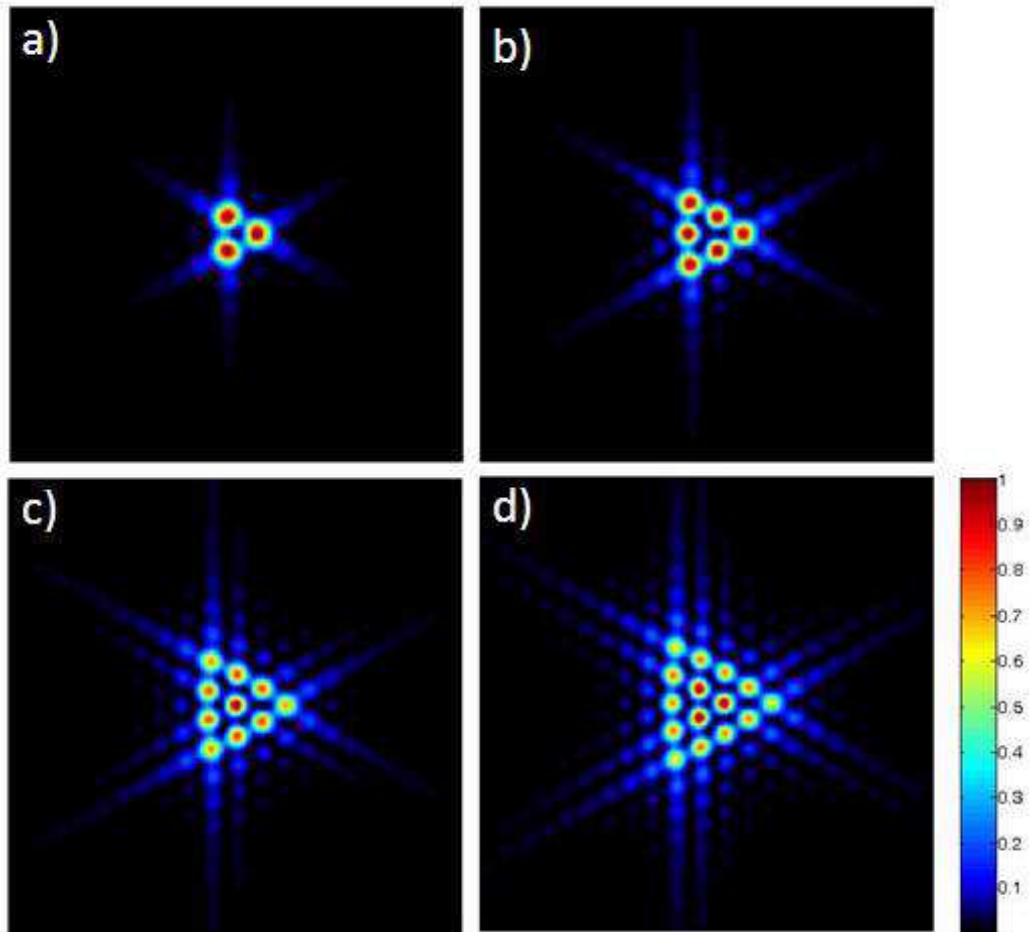
Fonte: Autor (2011).

Note que tanto uma abertura triangular e uma fenda triangular têm padrões de difração muito semelhantes. Se a carga topológica do feixe incidente for negativa, a distribuição do campo no plano de Fourier será

$$E(k_x, k_y) = \delta \left(k_y + \frac{2\sqrt{3}l}{a} \right) \exp \left(-i \frac{\sqrt{3}a}{6} k_x \right), \quad (4.9)$$

podemos ver que o deslocamento acontece no sentido inverso do eixo k_y , assim, a distribuição do padrão de difração será girada em 180° em relação ao primeiro padrão de difração. A Fig.(4.6) mostra esse efeito produzido pela carga topológica negativa.

Figura 4.6: Efeito da mudança do sinal da carga topológica no padrão de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular. A escala de intensidade é a mesma que na Fig4.2. A abertura triangular está na mesma posição que na Fig.4.3. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = -1$, b) $l = -2$, c) $l = -3$ e d) $l = -4$.



Fonte: Autor (2011).

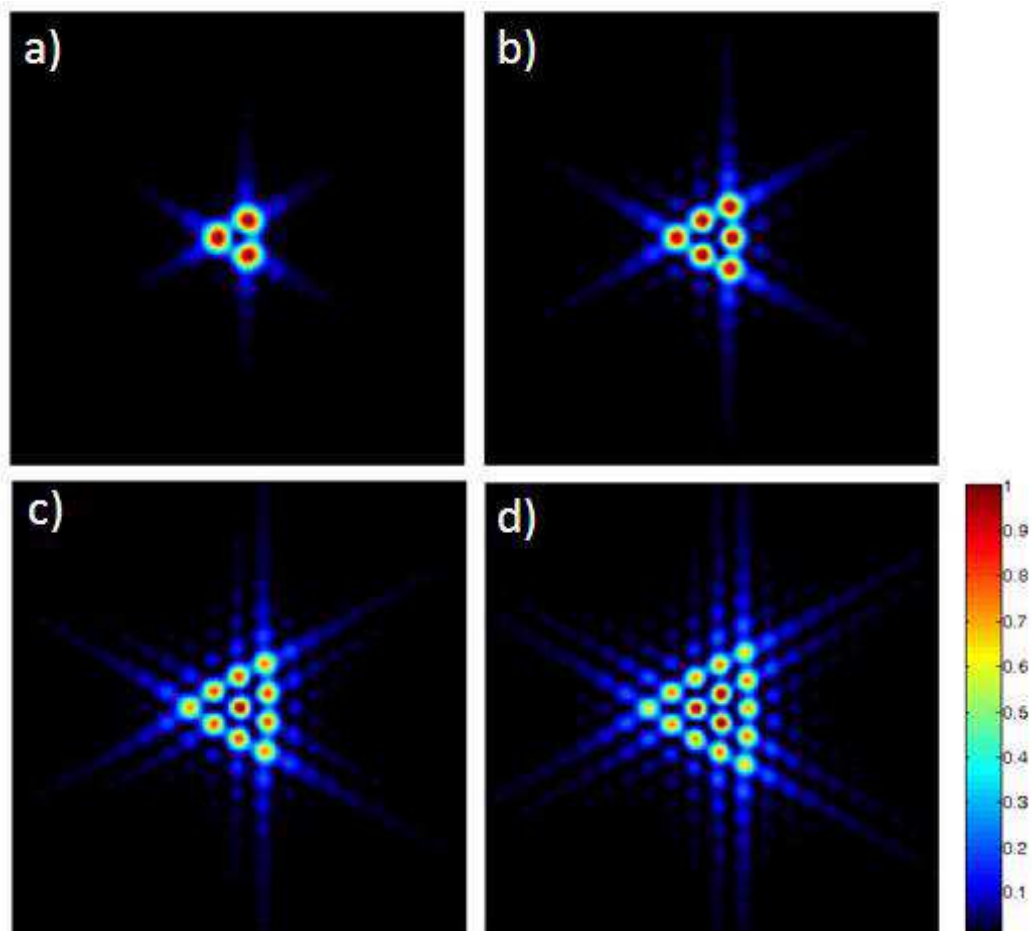
Consideremos agora um feixe Bessel de alta ordem incidindo na abertura triangular no plano $z = 0$, cuja amplitude complexa é dada por:

$$U_0(\rho, \phi, z = 0) = E_0 J_l(\alpha \rho) \exp(il\phi) \quad (4.10)$$

onde E_0 é uma constante, J_l é a função de Bessel de ordem l , α é a componente transversal

do vetor de onda e ρ , ϕ são as componentes radial e azimutal do feixe, respectivamente. Substituindo a eq.(4.10) na eq.(4.3) e depois resolvendo a integral numericamente, encontramos que as distribuições de intensidade dos padrões de difração de um feixe Bessel ao ser difratado por uma abertura triangular são iguais as distribuições de intensidade para os feixes Laguerre-Gauss. Este resultado é mostrado na Fig.(4.7), em vista disso, nossos resultados mostram que o padrão de difração de feixes com simetria cilíndrica, possuindo uma frente de onda helicoidal depende apenas da carga topológica dos feixes.

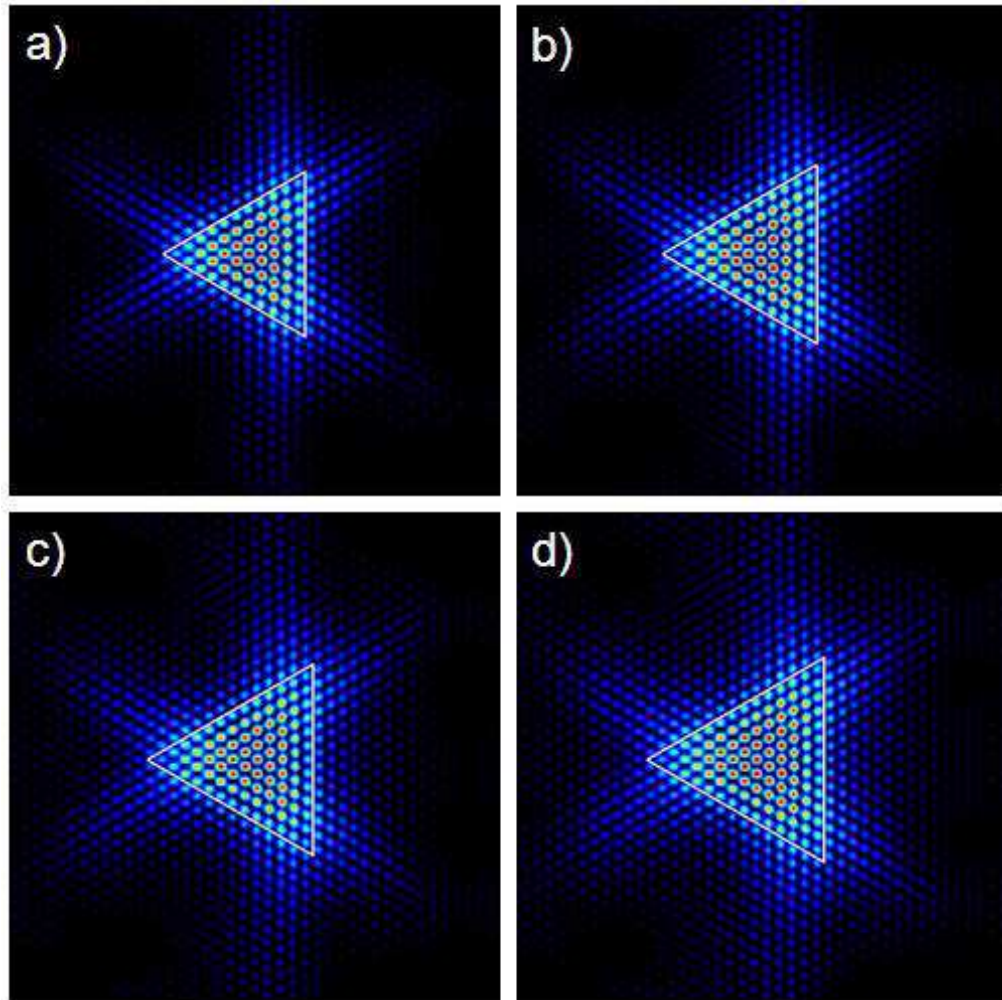
Figura 4.7: Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Bessel passando por uma abertura triangular mostrado. A escala de intensidade é a mesma que na Fig4.2. A abertura triangular está na mesma posição que na Fig.4.3. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$.



Um resultado importante emerge de nossas observações, existe uma relação simples entre o número de máximos de intensidade e a magnitude da carga topológica, assim como, a orientação da rede e o sinal da carga topológica. Assim, desenvolvemos uma maneira simples e elegante para determinar a magnitude e o sinal da carga topológica de um feixe com frente de onda helicoidal. Da Fig.(4.7), podemos observar que o valor de l está diretamente relacionado com o número de máximos de intensidade em um dos lados da rede triangular. A carga topológica é dada por $l = N - 1$, onde N é o número de máximos de intensidade em um dos lados da rede. Por exemplo, no caso em que nós preparamos um feixe Bessel com $l = 2$, podemos observar o padrão de difração mostrado na Fig.(4.7)(b) que o número de máximos de intensidade nos lados do triângulo é $N = 3$, portanto, a carga topológica do feixe é igual a $l = 3 - 1 = 2$.

Está técnica foi avaliada para diversos valores da carga topológica, verificamos que para valores da carga topológica $l > 11$, começamos a ter dificuldade em identificar o limite da rede. Desta forma, não podemos determinar o módulo da carga topológica, podemos apenas identificar o seu sinal, a Fig(4.8) mostra esses resultados.

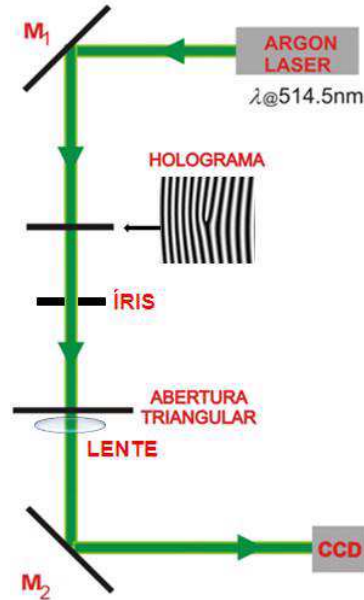
Figura 4.8: Padrões de difração de Fraunhofer de feixes Laguerre-Gauss passando por uma abertura triangular. Os padrões de difração foram calculados para a) $l = 10$, b) $l = 11$, c) $l = 12$ e d) $l = 13$. Os Triângulos em branco servem para mostrar os limites da rede.



Fonte: Autor (2011).

4.3 Experimento

Nesta seção, vamos demonstrar experimentalmente nossos resultados numéricos usando uma configuração experimental bastante simples. O aparato experimental é mostrado na Fig. (4.9).

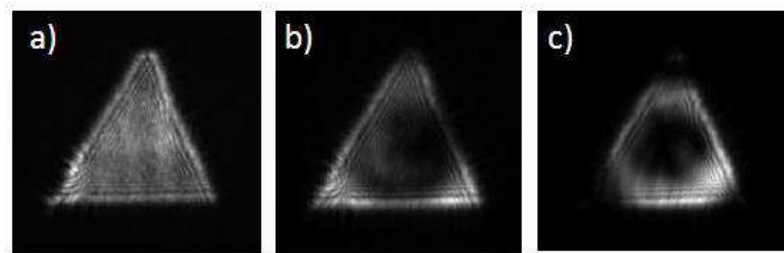
Figura 4.9: Arranjo experimental, M_1 e M_2 são espelhos.

Fonte: Autor (2011).

Um laser de argônio, operando no comprimento de onda $\lambda = 514.5nm$ e potência de $10mW$, passa por um filtro espacial, de forma a gerarmos um feixe bem próximo de uma onda plana. Os feixes de luz possuindo momento angular orbital foram preparadas iluminando um holograma gerador por computador [36]. O holograma difrata diferentes ordens produzindo feixes Laguerre-Gauss de alta ordem com diferentes cargas topológicas, que foram selecionados através de uma íris. Uma abertura com formato de um triângulo equilátero com um comprimento lateral de $1,75mm$ foi colocado no caminho de propagação. Usando uma lente imediatamente após a abertura, com comprimento focal de $f = 30cm$, obtivemos o padrão de difração do campo distante no plano focal da lente. As distribuições de intensidade dos padrões de difração foram gravadas por uma câmera *CCD* (*Charge-Coupled Device*) modelo 4910 Series da CoHU Electronics Division, conectada a um computador através de uma placa de aquisição de imagens modelo IMAQ PCI/PXI-1408 da National Instruments, o software de aquisição de dados foi o LabVIEW

6.1. Afim de mostramos o quanto esse experimento é simples, nós construímos nossa abertura triangular com fita isolante, a Fig.(4.10)(a) mostra essa abertura triangular. Note que abertura triangular possui alguns defeitos nas bordas, além de não ser exatamente um triângulo equilátero. Apesar disso, conseguimos obter ótimos resultados.

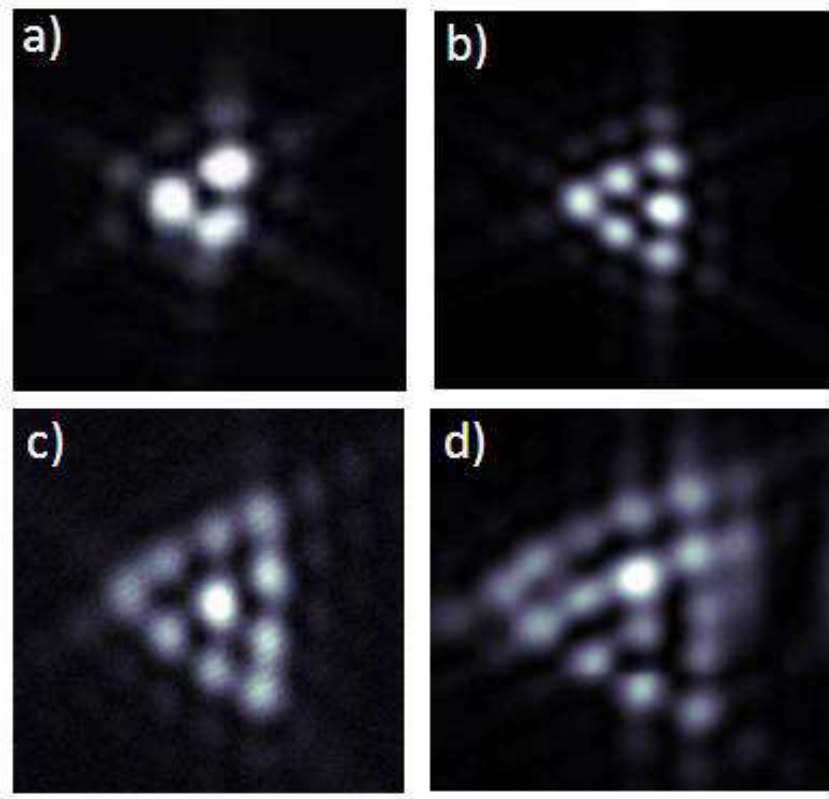
Figura 4.10: Distribuição de intensidade na abertura triangular de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 0$, b) $l = 1$ e c) $l = 2$.



Fonte: Autor (2011).

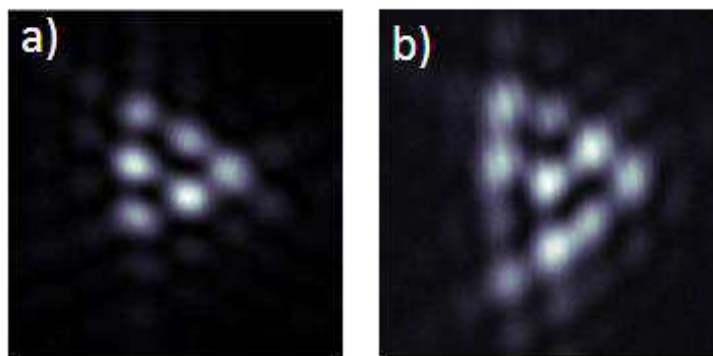
Os resultados experimentais são mostrados nas Fig.(4.11) e Fig.(4.12), onde observamos uma total concordância entre nossos resultados numéricos e experimentais. Na Fig.(4.11)(d), observamos problemas na formação da rede. Isso se deve a baixa qualidade do feixe produzindo pela difração de 4° ordem no holograma, além dos defeitos nas bordas do triângulo.

Figura 4.11: Resultados experimentais para a distribuição de intensidade do padrão de difração de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = 1$, b) $l = 2$, c) $l = 3$ e d) $l = 4$.



Fonte: Autor (2011).

Figura 4.12: Resultados experimentais para a distribuição de intensidade do padrão de difração de feixes Laguerre-Gauss com a) $l = -2$ e b) $l = -3$.



Fonte: Autor (2011).

Um ponto importante sobre a configuração experimental é que a singularidade de fase deve ficar no centro da abertura e as bordas da abertura deve ser iluminada pela parte interna do feixe incidente. No entanto, é fácil colocar o feixe no centro da abertura, basta apenas verificar a imagem da CCD obtida durante o alinhamento, a Fig.(4.10)(b) e (c) mostra esse alinhamento para feixes Laguerre-Gauss com cargas iguais $l = 1$ e $l = 2$, respectivamente.

4.4 Conclusão

Neste capítulo, demonstramos numericamente e experimentalmente a geração de uma rede óptica truncada apenas pela difração de feixes com momento angular orbital, através de uma abertura triangular. O efeito causado pela mudança da carga topológica revela uma rede oculta, que não é observada para feixes sem momento angular orbital. Além disso, as rede ópticas obtidas são limitadas pela carga topológica do feixe incidente. Com isso, desenvolvemos uma técnica difrativa que nos permite encontrar tanto sinal e magnitude da carga topológica de uma forma inequívoca, mesmo para altos valores de l . Esta técnica não-interferométrica requer apenas uma única exposição. A carga topológica é facilmente determinada pela contagem do número de máximos de intensidade do lado externo de um triângulo que aparece no padrão de difração, através da orientação da rede formada em relação a abertura conseguimos identificar o sinal da carga topológica.

5. Conclusão geral

Inicialmente, nesta tese, revisamos o conceito do momento angular transportado pela luz. Vimos que um feixe com polarização circular transporta momento angular intrínseco na direção de propagação, e que feixes possuindo uma fase azimutal possuem momento angular orbital. Descrevemos duas famílias de feixes de luz que transportam momento angular orbital, os feixes Laguerre-Gauss e os feixes Bessel, que são soluções da equação de onda na aproximação paraxial e da equação de Helmholtz, respectivamente, em coordenadas cilíndricas. Diferentemente dos feixes Laguerre-Gauss, os feixes Bessel não sofrem difração durante a propagação no vácuo.

Em seguida, estudamos alguns métodos de geração experimental dos feixes Laguerre-Gauss e dos feixes Bessel, em particular, discutimos os hologramas gerados por computador, que foram utilizados no decorrer desta tese. Descrevemos o método interferométrico para determinar a carga topológica de um feixe. Mostramos que os métodos desenvolvidos por Sztul [20] e Berkhout [21], não podem ser usados para caracterizar os estados de momento angular orbital, devido a ambigüidade dos padrões de difração. Enquanto o método proposto por Sztul determina apenas o sinal da carga topológica, o método desenvolvido por Berkhout não consegue distinguir os estados de momento angular orbital do feixe, devido ao fato que o padrão de difração de um feixe com carga topológica l é idêntico ao padrão de difração de um feixe com carga topológica $l \pm pN$.

No intuito de encontrar uma forma simples para determinar o estado de momento angular orbital, apresentamos um estudo da difração por um triângulo equilátero de feixes

possuindo momento angular orbital. Observamos que a presença da carga topológica produz uma rede óptica truncada no padrão de difração, com tamanho da rede óptica dependendo valor de l , aumentando l aumentamos o número de máximos de intensidade. Além disso, a rede triangular é girada em 30° no sentido horário em relação a abertura triangular quando l for positivo, e 30° no sentido anti-horário quando l for negativo. Observamos ainda que o valor de l está diretamente relacionado com o número de máximos de intensidade em um dos lados da rede triangular através da relação $l = N - 1$, onde N é o número de máximos de intensidade em um dos lados da rede. Com esses resultados, conseguimos desenvolver um método que nos permite determinar o sinal e a magnitude da carga topológica, mesmo para altos estados do momento angular orbital. O estado do momento angular orbital é facilmente determinado pela contagem do número de máximos de intensidade do lado externo do triângulo que aparece no padrão de difração. Através da orientação da rede triangular formada em relação a abertura conseguimos identificar o sinal da carga topológica. Finalmente, demonstramos nossos resultados experimentais, onde obtivemos a validade do nosso método.

Entre as diversas perspectivas, pretendemos desenvolver novas técnicas para caracterizar a carga topológica de outras famílias de feixes possuindo momento angular orbital, como por exemplo, os feixes de Mathieu [41].

Referências

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed, Wiley, New York, (1999).
- [2] M. J. Padgett, J. Courtial, and L. Allen, *Phys. Today*, 35 (may 2004).
- [3] R. A. Beth, *Phys. Rev.* **50**, 115 (1936).
- [4] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
- [5] I. Freund, N. Shvartsman, *Phys. Rev. A* **50**, 5164 (1994).
- [6] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, and M. V. Vasnetsov, *Phys. Rev. A* **56**, 4064 (1997).
- [7] G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S. M. Barnett, and S. Franke-Arnold, *Opt. Express* **12**, 5448 (2004).
- [8] M. J. Padgett and L Allen , *Contemporary Physics*, **41**, 275 (2000).
- [9] M. J. Padgett and L. Allen, *Opt. Commun.* **121**, 36 (1995).
- [10] L. Allen and M. J. Padgett , *Opt. Commun.* **184**, 67 (2000).
- [11] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, New York, (1980).
- [12] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Second Edition McGraw-Hill, 1996.

- [13] J. E. Curtis, B. A. Koss, and D. G. Grier, *Opt. Commun.* **207**, 169 (2002).
- [14] J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).
- [15] J. Durnin, J. J. Miceli Jr., and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
- [16] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chéz, , J. Arlt, and K. Dholakia, *J. Opt. B: Quantum and Semiclass. Opt.* **4**, S82 (2002).
- [17] J. Arlt, V. Garcés-Chávez, W. Sibbett, and K. Dholakia, *Opt. Commun.* **197**, 239 (2001).
- [18] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, *Nature* **419**, 145 (2002).
- [19] D. McGloin, V. Garcés-Chávez, and K. Dholakia, *Opt. Lett.* **28**, 657 (2003).
- [20] H. I. Sztul and R. R. Alfano, *Opt. Lett.* **31**, 999 (2006).
- [21] G. C. G. Berkhout, M. W. Beijersbergen, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 100801 (2008).
- [22] I. Moreno, J. A. Davis, B. M. L. Pascoguin, M. J. Mitry, and Don M. Cottrell, *Opt. Lett.* **34**, 2927 (2009).
- [23] Cheng-Shan Guo, Lei-Lei Lu, and Hui-Tian Wang, *Opt. Lett.* **34**, 3686 (2009).
- [24] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chávez-Cerda, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).
- [25] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover Publications, Inc., New York, (1989).
- [26] M. Lax, W. H. Louisell, and W. B. McKnight, *Phys. Rev. A* **11**, 1365 (1975).
- [27] L. Allen, M. J. Padgett, M. Bibiker, *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **39**, 291 (1999).

- [28] A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, 1986.
- [29] E. Abramochkin and V. Volostnikov, *Opt. Commun.* **83**, 123 (1991).
- [30] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 2nd ed, Wiley Series, New Jersey(2007).
- [31] A. Vaziri, J. W. Pan, T. Jennewein, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 227902 (2003).
- [32] K. Ladavac and D. G. Grier, *Opt. Express* **12**, 1144 (2004).
- [33] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White, *Opt. Lett.* **17**, 221 (1992).
- [34] Richard C. Smith and James S. Marsh, *J. Opt. Soc. Am.* **64**, 798 (1974).
- [35] Queila S. Ferreira, Alcenísio J. Jesus-Silva, Eduardo J. S. Fonseca, and Jandir M. Hickmann, *Opt. Lett.* **36**, 3106 (2011)
- [36] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, *J. Mod. Opt.* **45**, 1231 (1998).
- [37] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O. van der Veen, and J. P. Woerdman, *Opt. Commun.* **96**, 123 (1993).
- [38] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friberg, *J. Opt. Soc. Am. A* **6**, 1748 (1989).
- [39] J. Arlt and K. Dholakia, *Opt. Commun.* **177**, 297 (2000).
- [40] H. Sasada and M. Okamoto, *Phys. Rev. A* **68**, 012323 (2003).
- [41] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda, *Opt. Lett.* **25**, 1493 (2000).