



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOSÉ DA SILVA RODRIGUES

EFEITO TALBOT NA PROPAGAÇÃO DA INTERFERÊNCIA DE REDES  
ÓPTICAS COM CARGA TOPOLOGICA E DE FEIXES PARCIALMENTE  
COERENTES

MACEIÓ - AL

2019

JOSÉ DA SILVA RODRIGUES

TESE DE DOUTORADO

EFEITO TALBOT NA PROPAGAÇÃO DA INTERFERÊNCIA DE REDES ÓPTICAS COM  
CARGA TOPOLOGICA E DE FEIXES PARCIALMENTE COERENTES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

MACEIÓ - AL

2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

R696e Rodrigues, José da Silva.  
Efeito Talbot na propagação da interferência de redes ópticas com carga topológica e de feixes parcialmente coerentes / José da Silva Rodrigues. – 2019. 72. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.  
Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 64-68.  
Apêndices: f. 69-72.

1. Efeito Talbot (Física). 2. Feixes ópticos. I. Título.

CDU: 535.241.41



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**

***“Efeito Talbot na propagação da interferência de redes ópticas  
com carga topológica e de feixes parcialmente coerentes”.***

**por**

***José da Silva Rodrigues***

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Sebastião José Nascimento de Pádua, da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Wagner Ferreira da Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Samuel Teixeira de Souza, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Willamys Cristiano Soares Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato aprovado com grau **A**.

Maceió, 29 de março de 2019

*Alcenísio José de Jesus Silva*

Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

*Sebastião José N. de Pádua*

Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua

*Wagner Ferreira da Silva*

Prof. Dr. Wagner Ferreira da Silva

*Samuel T. de Souza*

Prof. Dr. Samuel Teixeira de Souza

*Willamys Cristiano Soares Silva*

Prof. Dr. Willamys Cristiano Soares Silva



À CAROLYNE & MANUELA.

# Agradecimentos

- A Deus, sem Ele nada seria possível;
- Ao meu pai *in memoriam* a minha mãe e toda minha família, pelo apoio e incentivo durante toda esta jornada;
- Ao professor Eduardo Jorge da Silva Fonseca, meu co-orientador, por sua grande ajuda e apoio, sem o qual eu não conseguiria terminar esta tarefa;
- Aos coordenadores do Dinter professor José Ricardo e professor Marcelo Lyra pelo suporte sem o qual seria muito difícil concluir o trabalho
- Ao professor Alcenísio José pela ela oportunidade de desenvolver esta pesquisa sob sua orientação, suas críticas e sugestões, indispensáveis à realização deste trabalho;
- Aos colegas acadêmicos, pelo companheirismo e amizades durante essa jornada;
- À Capes pela concessão da bolsa durante o projeto DINTER IFPI-UFAL, e suporte financeiro que tornou possível este trabalho;
- Aos professores do Instituto de Física da UFAL;
- À todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a elaboração deste trabalho.
- Ao Programa de Pós Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas pela oportunidade e recursos necessários junto ao IFPI para minha formação.

# Resumo

Nesta tese investigamos experimentos que exploram o efeito Talbot na propagação de feixes Bessel abrangendo desde propagação coerente, passando por propagação de redes ópticas, chegando a propagação parcialmente coerente. Portanto, no que concerne à propagação de luz coerente com momento angular orbital (MAO), exploramos o efeito Talbot usando uma superposição de duas redes ópticas, que foram geradas pela superposição de dois quase estados MAO. Foi estudado o efeito Talbot pela interferência de estados quase MAO com diferentes módulos de vetores de ondas e com diferentes cargas topológicas. Prosseguindo, investigamos também a propagação de luz parcialmente coerente, exploramos o efeito Talbot com interferência de feixes Bessel parcialmente coerente. Apresentamos uma teoria com suporte em experimentos para explicar esse efeito, mostrando que é possível um modelo analítico para propagação da densidade espectral cruzada para interferência de dois feixes Bessel parcialmente coerentes.

**Palavras-chave:** Efeito Talbot, coerente, parcialmente coerente, redes ópticas.

# Abstract

In this thesis we investigated experiments that explore the Talbot effect in propagation of Bessel beams since from coherent propagation, through propagation of optical networks to partially coherent propagation. Therefore, with respect to the propagation of light coherent with orbital angular momentum (MAO), explored the Talbot effect with a superposition of two optical networks, which were generated by the superposition of two quasi-MAO states. The Talbot effect was studied interference from quasi-MAO states with different moduli of the wave vector and with different topological loads. Our studies continued with partially coherent light propagation, we explored the Talbot effect with the interference of Bessel beams partially coherent. We present a supported theory in experiments to explain this effect, showing that is possible an analytical model for cross-spectral density for interference from two partially coherent Bessel bundles.

**Key-words:** Talbot, effect, coherent, partially, optical networks .

# Lista de Figuras

1.1	Tapete Talbot. . . . .	2
2.1	Coerência temporal ilustrada a partir do interferômetro de Michelson. . . . .	7
2.2	Coerência espacial ilustrada por meio do experimento de interferência de Young com luz a partir de uma fonte térmica $\beta$ . . . . .	9
2.3	Notação relativa à interferência de Young a partir da qual podem ser determinadas as funções de correlação de segunda ordem de um feixe de luz. . . . .	11
3.1	Intensidade do Feixe Bessel para $p = 0$ . . . . .	19
3.2	Intensidade do Feixe Bessel para $p = 2$ . . . . .	19
3.3	Intensidade de dois feixes Bessel interferindo versus distância de propagação normalizada pelo comprimento de Rayleigh. . . . .	21
3.4	Evolução da superposição de feixes Bessel: (a) Plot em 3D. (b) Contorno do perfil transversal, mostrando o Talbot ao longo da propagação. . . . .	22
4.1	Espectro de três redes ópticas para os parâmetros: $p_1 = 2$ , $p_2 = 2$ , $\rho_1 = 4 \text{ mm}^{-1}$ , $\rho_2 = 1 \text{ mm}^{-1}$ (a) $Q = 3$ (b) $Q = 10$ (c) $Q = 100$ . . . . .	25
4.2	Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas para os parâmetros $p_1 = p_2 = 2$ , $\rho_1 = 1,0 \text{ mm}^{-1}$ e $\rho_2 = 1,50 \text{ mm}^{-1}$ fixos variando $Q$ (a) $Q = 30$ (b) $Q = 70$ (c) $Q = 100$ . . . . .	26
4.3	Redes ópticas mudando a frequência espacial (a) $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , (b) $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ e c) $\rho_2 = 120/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	26
4.4	Espectro de três redes ópticas para os parâmetros $\rho_1 = 4 \text{ mm}^{-1}$ , $\rho_2 = 2 \text{ mm}^{-1}$ , $Q = 3$ fixos variando $p$ (a) $p_1 = 0$ , $p_2 = 0$ (b) $p_1 = 3$ , $p_2 = 1$ (c) $p_1 = 5$ , $p_2 = 3$ . . . . .	28

4.5	Redes ópticas alterando as cargas topológicas das ondas planas ((a) $p_1 = 0$ , $p_2 = 0$ (b) $p_1 = 3$ , $p_2 = 1$ (c) $p_1 = 5$ , $p_2 = 3$ . . . . .	28
4.6	Representação da distribuição de intensidade e da frente de onda para diferentes valores de $p$ , nesta figura a carga topológica é representada pela letra $\ell$ . . . . .	29
4.7	Espectro de redes ópticas e difração de estados MAO por um filtro espacial com pequenas aberturas circulares separadas formando uma geometria circular(a) estado MAO, (b) difratando pelo filtro espacial e (c) visualização do espectro de uma rede óptica de Talbot . . . . .	30
4.8	Aparato experimental para mostrar o efeito Talbot com imagem fantasma holográfico usando fóton SPDC. . . . .	34
4.9	Padrão de Talbot para configuração imagem fantasma holográfica com MAO. (a) $p = 0$ ,(c) $p = 1$ ,(e) $p = 2$ A barra de cores indica o valor da função dos dois fótons correlacionados $\Pi^2$ . (b,d,f) representa a distribuição lateral de $z_{s1} = z_T = 400 \text{ mm}$ em (a,c,e), respectivamente. . . . .	36
4.10	Holograma utilizado para gerar a rede óptica com $Q = 3$ , $p_1 = 1$ , $p_2 = 1$ , $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ e $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	37
4.11	Setup Experimental onde $L_1$ , $L_2$ , $L_3$ e $L_4$ são lentes, $BS$ divisor de feixes, $SF$ filtro espacial, $SLM$ modulador espacial de luz; $CCD$ Câmera CCD. . . . .	38
4.12	Estados quase MAO antes e depois de passar por um filtro espacial com pequenas aberturas circulares separadas formando uma geomteria circular. . . . .	38
4.13	(a) Padrão transversal para $z = 0$ . (b)-(d) tapetes Talbot ao longo das linhas vermelhas indicados em (a). Usamos $Q = 3$ , $p_1 = 1$ , $p_2 = 2$ , $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ e $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	39
4.14	Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para $Q = 3$ , $p_1 = 1$ , $p_2 = 2$ , $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , e $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	40
4.15	Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para $Q = 4$ , $p_1 = 1$ , $p_2 = 1$ , $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ e $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	41
4.16	Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para $Q = 3$ , $p_1 = 1$ , $p_2 = 2$ , $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , e $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	42
5.1	Padrão de speckle e sua correspondente autocorrelação. . . . .	53

5.2	(a) Setup experimental: $O$ , lente objetiva; $L_i$ , lentes; $RGGD$ , disco rotativo de vidro fosco; $P$ , polarizador; $BS$ , divisor de feixe; $SLM$ , modulador espacial de luz; $I$ , íris; $CCD$ , câmera $CCD$ . (b) Os dois sistemas de fenda circular escritos no SLM. $\rho_1$ e $\rho_2$ são os raios das fendas e $\Delta$ é a largura das fendas. . . . .	54
5.3	Holograma com parâmetros $\rho_1 = 0,5 \text{ mm}$ e $\rho_2 = 4 \text{ mm}$ . . . . .	54
5.4	Representação da intensidade do campo da equação em $z = 0$ , para o caso onde a fase $\phi(k_{\perp i}, \theta_n)$ é (a) zero e (b) quando é uma fase aleatória. . . . .	55
5.5	Resultados experimentais (primeira linha) e resultados teóricos (segunda linha) para o padrão de intensidade medido ao longo de diferentes distâncias de propagação longitudinal. É observado uma reptição Talbot com comprimento Talbot $z_T = 7,8 \text{ mm}$ . . . . .	56
5.6	Resultados experimentais (primeira coluna) e resultados teóricos (segunda coluna) para o padrão de intensidade ao longo do plano $y = 0$ e diferentes distâncias de propagação $z$ . Cada padrão corresponde a uma realização diferente do efeito aleatório Talbot. . . . .	58
5.7	Resultados experimentais (primeira linha), para correlação de intensidade, e resultados teóricos (segunda linha) para o módulo quadrado da densidade espectral cruzada $ W ^2$ mostrando o efeito Talbot. . . . .	59
5.8	Resultados experimentais normalizados (coluna esquerda) e resultados teóricos (coluna direita). [(a), (b)] Módulo quadrado da densidade espectral $ W ^2$ . [(c), (d)] média espacial da intensidade $I$ . . . . .	60
5.9	O grau de coerência espectral $g^0(\rho', \nu)$ , (primeira coluna) e a distribuição de densidade espectral, (primeira coluna) e a distribuição de densidade espectral $S^0(\rho', \nu)$ (segunda coluna). As curvas em (a) pertence a uma fonte completamente coerente (espacial) e a curva (d) a uma fonte quase coerente. . . . .	61

# Sumário

<b>Agradecimento</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Efeito Talbot, Coerência e função de correlação</b>	<b>4</b>
2.1 Efeito Talbot . . . . .	4
2.2 Coerência . . . . .	5
2.2.1 Coerência temporal . . . . .	6
2.2.2 Coerência espacial . . . . .	9
2.3 Função de correlação . . . . .	10
<b>3 Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel coerentes</b>	<b>14</b>
3.1 O Feixe Bessel . . . . .	14
3.2 Efeito Talbot ao longo da propagação da interferência de dois feixes Bessel coerentes . . . . .	20
<b>4 Estudo do Efeito Talbot em redes ópticas com carga topológica</b>	<b>23</b>
4.1 Introdução . . . . .	23
4.2 Redes ópticas . . . . .	25
4.3 Teoria . . . . .	30



---

4.4	Experimento . . . . .	36
4.5	Resultados e discussão . . . . .	39
4.6	Conclusão . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Estudo do Efeito Talbot com interferência de feixes Bessel parcialmente coerentes</b> . . . . .	<b>44</b>
5.1	Introdução . . . . .	44
5.2	Estrutura de campo parcialmente coerente e a representação deste campo em modos coerentes . . . . .	45
5.3	Teoria . . . . .	48
5.4	Autoimagem no padrão de intensidade . . . . .	49
5.5	Autoimagem no padrão de correlação . . . . .	51
5.6	Experimento . . . . .	53
5.7	Resultados e discussão . . . . .	55
5.8	Conclusão . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectiva</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Produção dos Hologramas para Redes Ópticas</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Produção dos Hologramas para efeito de uma abertura constituída por duas fendas circulares concêntricas</b> . . . . .	<b>71</b>

## Introdução

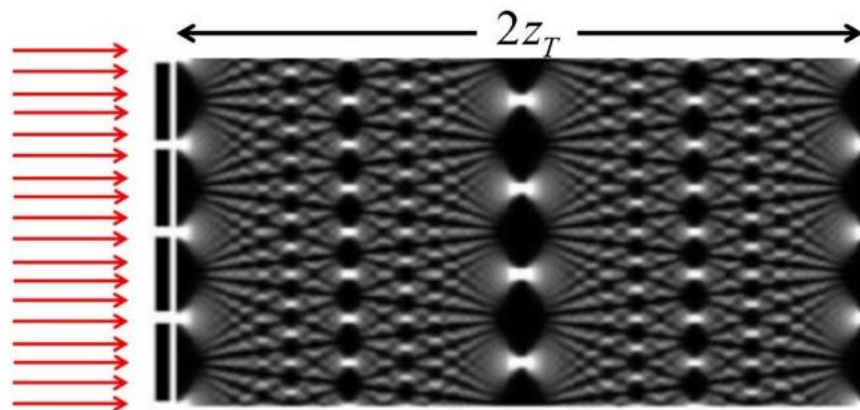
Quando uma luz coerente atravessa um objeto periódico, como por exemplo, múltiplas fendas paralelas, ocorre a interferência de várias ondas e, conseqüentemente, surge um padrão de interferência projetado em um anteparo que está em um plano  $xy$ , porém esse padrão não é o mesmo para diferentes posições do anteparo ao longo de  $z$ , sendo que após uma distância  $z$  o padrão volta a ser o mesmo que era em  $z = 0$ . Esses padrões que estão por exemplo em um plano  $xy$  ao serem feitos cortes em  $y = 0$  em cada padrão e concatenando estes cortes, teremos um novo padrão em  $xz(y = 0)$ , como pode ser observado na figura 1.1. Este fenômeno é conhecido como efeito Talbot ou autoimagem. Henry Fox Talbot foi o primeiro a observar que a onda resultante se propaga de tal maneira que ela assume um padrão onde sua intensidade se repete em intervalos periódicos ao longo da propagação. A distância em que ocorre a repetição é conhecida como comprimento de Talbot  $Z_T$ , e é dada por  $Z_T = (2a^2)/\lambda$ . Onde  $a$  é o período da grade e  $\lambda$  o comprimento de onda.

Desde a sua descoberta por Henry Fox Talbot no início do século XIX (2), o efeito Talbot atraiu considerável atenção em diferentes áreas (1,3).

Em 1880, Lord Rayleigh mostrou que o efeito Talbot é uma consequência natural da difração, ou seja, ao calcular a difração a partir de uma abertura periódica, o resultado obtido é o efeito Talbot. Nas distâncias intermediárias, isto é, em meio comprimento de Talbot, também ocorrem as autoimagens, entretanto, deslocada de meio período.

Mesmo recentemente, esse efeito tem impulsionado novas pesquisas e interessantes aplicações no domínio espacial, um feito acelerador de auto imagem (4) e uma autoimagem bidimensional induzida por difração onde os períodos são controlados indepen-

Figura 1.1: Tapete Talbot.



Fonte: J. Wen, Y. Zhang, and M. Xiao, 2013 (1).

dentemente em cada uma das duas dimensões de onda (5) .

O efeito Talbot foi estudado inicialmente para luz totalmente coerente no início do século XIX por Henry Fox Talbot, mas alguns trabalhos relatam o efeito Talbot em campos parcialmente coerentes (6,7). Feixes parcialmente coerentes podem ser gerados, por exemplo, pela distorção de um feixe de laser totalmente coerente, usando uma placa de vidro fosco ou um modulador de luz espacial.

A radiação laser tem como a coerência a propriedade mais importante. A coerência pode ser temporal e espacial, a coerência temporal é a medida da correlação da fase da onda luminosa em diferentes pontos na direção de propagação se manifestando pela monocromaticidade. A coerência espacial é a medida da correlação da fase da onda luminosa em diferentes pontos na direção transversal à direção de propagação manifestada pela frente de onda unifásica sendo que esta medida mostra a uniformidade da frente de onda.

Desde que Durnin em 1987 (8) realizou a primeira investigação experimental dos feixes não difrativos, esses feixes têm ganhado muita atenção, estes feixes não difratantes são também chamados de feixes Bessel. O feixe Bessel também pertence a uma classe de feixes que possuem momento angular orbital (MAO), tornando-os ainda mais úteis. Recentemente, o efeito Talbot tem sido explorado teoricamente usando o MAO do emaranhamento de dois estados de fótons, mostrando que o comprimento Talbot é insensível a carga topologia (CT) (9), porém até agora esse efeito não foi explorado experimentalmente. Assim um objetivo da presente tese também é explorar o efeito Talbot mas agora originado da interferência resultante da superposição de redes ópticas, que também são

---

campos não difratantes se propagando no espaço livre. A rede óptica estudada nessa tese pode ser expressa pela superposição de  $Q$  ondas planas de iguais amplitudes, com o espectro formado por dois conjuntos de *spots* gaussianos, onde cada conjunto está disposto de tal maneira que os *spots* estão separados igualmente de si e do centro, ou seja, estão dispostos em uma estrutura de anel. Dessa forma se tomarmos uma grande quantidade de ondas planas a superposição das redes torna-se a superposição de feixes Bessel.

Outro objetivo da presente tese é explorar o efeito Talbot com feixe parcialmente coerente, estudamos a propagação da interferência entre dois feixes Bessel parcialmente coerente. O efeito Talbot tem sido estudado com feixes coerentes interferentes não difratantes (10, 11). Feixes Bessel parcialmente coerentes foram usados para mostrar propriedades não difratantes (12, 13), mas nenhum trabalho mostrou ainda o efeito Talbot com interferência de feixes Bessel parcialmente coerente.

Assim, tanto no caso coerente como no caso parcialmente coerente temos interferência de feixes não difratantes, onde o objetivo geral dessa tese é explorar o efeito talbot para diferentes fases, ora tomando uma fase bem definida que varia linearmente de acordo com a carga topológica (caso da interferência de redes ópticas) e ora com uma fase que varia aleatoriamente (caso interferência de feixes Bessel parcialmente coerente).

Nesta tese, exploramos o efeito Talbot abordando seu aspecto teórico-experimental e possíveis aplicações. Para uma melhor entendimento da tese, ela está dividida em seis capítulos. O capítulo 2 é o que trata do efeito Talbot de uma forma geral, seguido da teoria da coerência e função de correlação. No capítulo 3 discutiremos um modelo analítico para o efeito Talbot ao longo da propagação da interferência de dois feixes de Bessel coerentes, dando maior suporte a nossa pesquisa. No capítulo 4 é exibido uma breve explicação sobre o que são redes ópticas e como são formadas, além dos resultados analíticos e experimentais obtidos a partir do estudo do efeito Talbot para interferência de redes ópticas, já no capítulo 5 exploramos a estrutura de campos parcialmente coerentes e a representação destes campos em modos coerentes introduzidos por Wolf em 1982 (14), além dos resultados analíticos e experimentais obtidos a partir do estudo do efeito Talbot para interferência de feixes Bessel parcialmente coerente, finalizando com as conclusões e perspectivas do trabalho no capítulo 6.

# Efeito Talbot, Coerência e função de correlação

Este capítulo é dedicado a explicar o Efeito Talbot quando uma onda plana incide em um conjunto de fendas paralelas e também explicamos a teoria de coerência e função de correlação, que serve como base teórica nos capítulos seguintes.

## 2.1 Efeito Talbot

Conforme foi dito anteriormente o efeito de auto-imagem é observado quando uma onda plana incide em um objeto periódico. Este objeto pode ser unidimensional, como por exemplo um conjunto de fendas paralelas, ou bidimensional. Por simplicidade, consideremos o problema unidimensional. Na óptica de Fourier, um objeto periódico pode ser representado por

$$A(x) = A(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{d}\right), \quad (2.1)$$

onde  $c_n$  é a amplitude do  $n$ ésimo harmônico e  $d$  o período espacial do objeto. Caso  $c_n$  na equação 2.1 não seja definido, pode-se dizer que esta expressão é válida para qualquer objeto periódico. De acordo com a teoria de difração de Fresnel (15), ao iluminar uma abertura qualquer com uma onda plana, o campo  $E(x)$  para uma distância  $z$  é

proporcional a

$$E(x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx' A(x') \exp \left[ -i\pi \frac{(x-x')^2}{\lambda z} \right], \quad (2.2)$$

resolvendo a integral,

$$E(x) \propto \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{i\pi n^2 \lambda z}{d^2} + \frac{2i\pi n x}{d} \right], \quad (2.3)$$

onde o comprimento Talbot é dado por

$$Z_T = \frac{2md^2}{\lambda}, \quad (2.4)$$

aqui  $m$  é um número inteiro positivo que está relacionado com o número de auto imagem. Assim o comprimento Talbot, se o comprimento de onda for fixo, depende somente da frequência espacial  $d$  do conjunto de fendas paralelas.

Existem diversas aplicações do efeito Talbot descritas na literatura, tanto do ponto de vista experimental quanto teórico. Além da forma descrita o efeito Talbot já foi estudado para vários outros tipos de feixes (16–21).

## 2.2 Coerência

Se dois pontos de feixe de luz tem uma relação de fase constante, ou seja, se sabemos o valor do campo elétrico em um ponto, sendo possível prever o do outro, então temos uma feixe de luz coerente.

Se a luz, durante a propagação, não apresentar variação de fase ao longo de sua frente de onda, dizemos que ela é espacialmente coerente, ou seja a coerência espacial existe quando apresentar uma relação de fase definida entre pontos distintos de uma seção transversal. Este conceito fica melhor ilustrado quando consideramos 2 pontos  $P_1$  e  $P_2$  que se encontram na mesma seção transversal do feixe, e sejam  $E_1(t)$  e  $E_2(t)$  os campos elétricos em ambos pontos. Se a diferença de fase entre os campos permanece constante em qualquer instante  $t > 0$  se diz que entre ambos pontos há uma coerência

espacial perfeita e podemos detectar a coerência espacial em um feixe luminoso mediante o experimento de Young, como veremos nas seções seguintes.

Identicamente, se a fase em um determinado instante, ao longo de uma frente de onda se deslocando, for idêntica à fase apresentada pela onda após percorrer certa distância, classificamos que a mesma é totalmente coerente sob o aspecto temporal, ou seja se consideramos o campo elétrico em um ponto  $P$  em dois instantes distintos  $t$  e  $t+T$  se define o tempo de coerência como o máximo valor de  $T$  para que a diferença de fase entre o campo em ambos pontos permanece predizível e podemos detectar a coerência temporal com o interferômetro de Michelson, como veremos nas seções seguintes. A partir deste entendimento, fica evidente que uma onda plana monocromática será, tanto no aspecto espacial como temporal totalmente coerente.

A coerência óptica tem como correspondência a representação estatística dos fenômenos de flutuação nos feixes de luz, assim como aos feitos destas flutuações sobre as correlações entre determinadas grandezas medidas em pontos distintos do feixe, tanto no domínio espacial como no temporal.

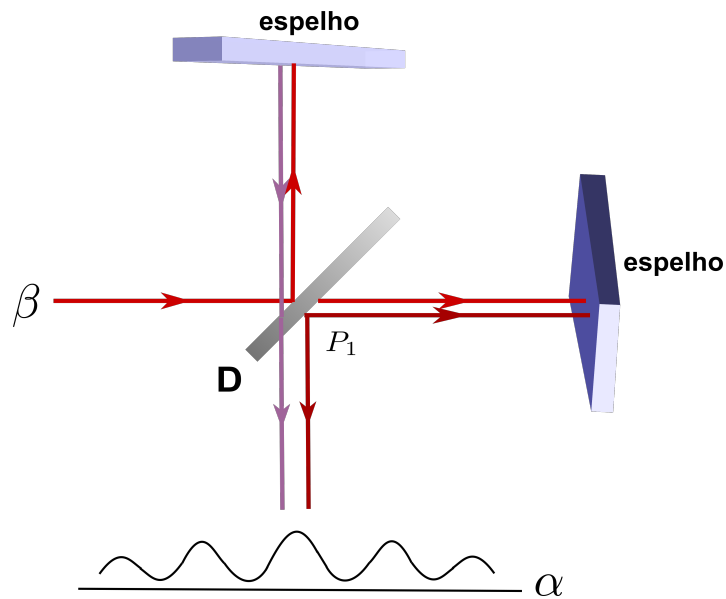
### 2.2.1 Coerência temporal

Consideremos um feixe de luz quase monocromático a partir de uma pequena fonte  $\beta$ . Através de um interferômetro de Michelson, o feixe é dividido em dois outros feixes no ponto  $P_1$  e reunidos depois que uma diferença de caminho é introduzida entre eles  $\Delta l = c\Delta t$  ( $c$  é a velocidade da luz no vácuo), como ilustrado na figura 2.1, se essa diferença de caminho for suficientemente pequena, franjas de interferência serão formadas no plano de observação  $\alpha$ . A formação destas franjas ocorre devido à existência de coerência temporal entre os feixes, uma vez que a capacidade de formar franjas é resultado da correlação existente a partir da condição de um atraso de tempo  $\Delta t$  introduzido entre eles (22), e para ocorrer franjas é necessário que (23):

$$\begin{aligned}\Delta t \Delta \nu &\lesssim 1 \\ \Delta t &\approx \frac{1}{\Delta \nu}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Onde  $\Delta \nu$  é a largura de banda da luz, agora substituindo a equação (2.5) na

Figura 2.1: Coerência temporal ilustrada a partir do interferômetro de Michelson.



Fonte: Autor.

equação da diferença de caminho temos

$$\Delta l = c\Delta t \approx \frac{c}{\Delta\nu}, \quad (2.6)$$

onde  $\Delta l$  é conhecido como comprimento de coerência ou, mais precisamente, comprimento de coerência longitudinal da luz. Sabendo que a frequência é dada por  $\nu = c/\lambda$  onde  $\lambda$  é o comprimento de onda então

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{c}{\lambda' - \lambda} \\ &= c \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'\lambda} \\ &= c \frac{\Delta\lambda}{\lambda'\lambda}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

sabendo que  $\Delta\lambda = \lambda - \bar{\lambda}$  e que  $\bar{\lambda} \gg \Delta\lambda$  temos que

$$\Delta\nu = c \frac{\Delta\lambda}{\bar{\lambda}^2}. \quad (2.8)$$



Reescrevendo o comprimento de coerência, onde  $\bar{\lambda}$  é o comprimento de onda médio

$$\Delta l \approx \left( \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} \right) \bar{\lambda}, \quad (2.9)$$

Vamos agora entender a ideia básica deste fenômeno. Podemos considerar que as franjas no plano de observação  $\alpha$  surgem a partir da adição de distribuições espaciais periódicas, sendo cada uma delas formada por uma componente de frequência presente no espectro da luz. Agora as distribuições periódicas formadas pela luz de diferentes componentes de frequência terão diferentes periodicidades espaciais. Assim, com o aumento do intervalo de tempo entre os dois feixes, a sua adição irá levar a um padrão de franjas cada vez mais indefinido, porque os máximos das várias contribuições monocromáticas ficarão cada vez mais fora de sintonia. Para um atraso de tempo suficientemente longo, as distribuições periódicas de intensidade perderão totalmente a sintonia, não formando padrão de franjas.

Percebemos que com o aumento do tempo de atraso, as franjas desaparecem quando  $\Delta t$  atinge um valor que é da ordem de grandeza indicada pela equação (2.5). Utilizando conceitos relacionados às correlações, podemos chegar a uma melhor compreensão desses efeitos. Por exemplo, uma função de onda de luz quase monocromática, considerada como um processo aleatório estacionário pode ser retratado como uma sucessão de ondas moduladas, em que a frequência média coincide com a frequência da luz e cuja duração é da ordem do tempo de coerência (2.5). Então, a formação ou ausência de franjas de interferência no plano de observação  $\alpha$  é diretamente relacionada com a correlação ou falta de correlação, respectivamente, entre as flutuações dos dois feixes parciais atingindo  $\alpha$  (23). A medida habitual da nitidez de franjas de interferência é a chamada visibilidade. A visibilidade  $V(\mathbf{r})$  num ponto  $P(\mathbf{r})$  em um padrão de interferência é definida por (23)

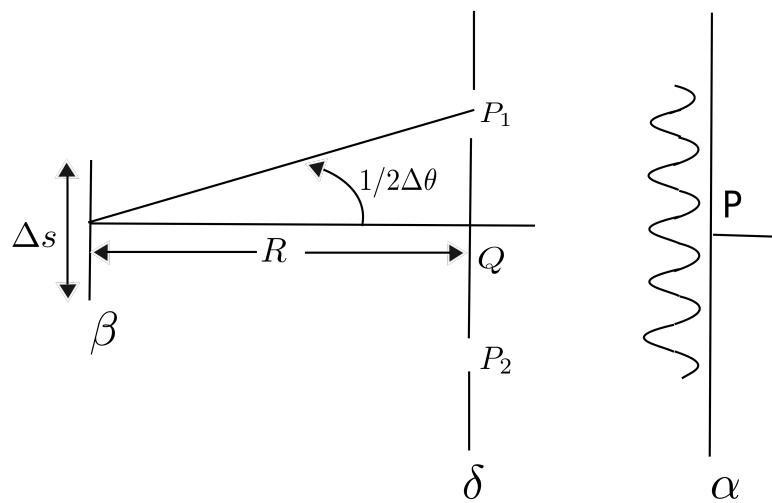
$$V(\mathbf{r}) = \frac{\langle I \rangle_{máx} - \langle I \rangle_{mín}}{\langle I \rangle_{máx} + \langle I \rangle_{mín}}, \quad (2.10)$$

onde  $\langle I \rangle_{máx}$  e  $\langle I \rangle_{mín}$  representam o máximo e mínimo valor que a intensidade média assume na proximidade de  $P$ .

### 2.2.2 Coerência espacial

Agora, a partir do experimento de interferência de Young, consideraremos uma luz quase monocromática a partir de uma fonte térmica extensa  $\beta$ , conforme figura 2.2. Adotaremos, para simplificar, uma disposição simétrica com uma fonte de forma quadrada de lados  $\Delta s$ .

Figura 2.2: Coerência espacial ilustrada por meio do experimento de interferência de Young com luz a partir de uma fonte térmica  $\beta$ .



Fonte: Autor.

Se as fendas  $P_1$  e  $P_2$  estiverem muito próximos do eixo de simetria, as franjas de interferência serão observadas na vizinhança do ponto P no plano de observação  $\alpha$ .

O surgimento das franjas é devido à coerência espacial entre os dois feixes de luz que atingem P a partir das duas fendas  $P_1$  e  $P_2$ . Isso é resultado da correlação que existe entre eles, sob condições em que a separação espacial  $P_1P_2$  foi introduzida (23). Através de um experimento deste tipo é possível notar que, se a separação entre a fonte  $\beta$  e o plano  $\delta$  que contém as fendas é suficientemente grande, as franjas de interferência serão formadas em P se

$$\Delta\theta\Delta s \leq \bar{\lambda}. \quad (2.11)$$

Se  $R$  é a distância entre o plano que contém a fonte e o plano onde se encontram as fendas, o resultado anterior implica que, para observar as franjas de interferência na vizinhança de  $P$ , as duas fendas têm que estar situados dentro de uma região em torno do ponto axial  $Q$  no plano  $\delta$ , cuja área  $\Delta A$  é dada pela relação

$$\Delta A \sim R\Delta\theta \sim \frac{R^2\bar{\lambda}^2}{S}, \quad (2.12)$$

onde  $S$  é a área da fonte.

## 2.3 Função de correlação

Considere agora uma luz quase monocromática representada por um conjunto estatisticamente estacionário de sinais analíticos  $U(\mathbf{r}, t)$ . Por luz quase monocromática desejasse dizer que a largura de banda efetiva da luz  $\Delta\nu$  de seu espectro de frequência em cada ponto  $\mathbf{r}$  é pequena comparada com sua frequência média  $\bar{\nu}$

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1. \quad (2.13)$$

Podemos considerar tal campo sendo representado em cada ponto por um conjunto de sinais quase monocromáticos centrados na frequência  $\bar{\nu}$  (23).

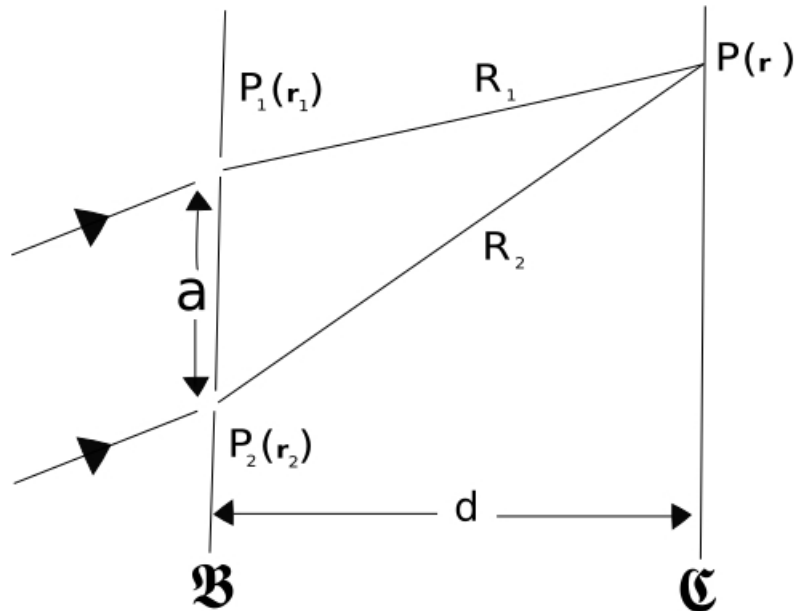
Vamos supor que as vibrações de luz nos pontos no feixe  $P_1(\mathbf{r}_1)$  e  $P_2(\mathbf{r}_2)$  são isolados, colocando um anteparo opaco  $\mathfrak{B}$  transversal ao feixe, com *pinholes* em dois pontos, observamos a distribuição de intensidade resultante da superposição da luz emergindo de dois *pinholes*, sobre um anteparo  $\mathfrak{C}$  a uma distância  $d$  de  $\mathfrak{B}$  ver figura 2.3.

Assumindo que  $d$  é grande comparado com o comprimento de onda, o campo em um certo tempo e em um ponto  $P$  sobre o anteparo  $\mathfrak{C}$  é aproximadamente dado por (23)

$$U(\mathbf{r}, t) = K_1U(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2U(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (2.14)$$

onde

Figura 2.3: Notação relativa à interferência de Young a partir da qual podem ser determinadas as funções de correlação de segunda ordem de um feixe de luz.



Fonte: Autor.

$$t_1 = R_1/c, t_2 = R_2/c, \quad (2.15)$$

são os tempos necessários para a luz viajar de  $P_1$  para  $P_2$  e de  $P_2$  para  $P$  respectivamente,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $K_1$  e  $K_2$  são fatores constantes que dependem do tamanho e da geometria dos *pinholes*.

A intensidade  $I(\mathbf{r}, t)$  em um ponto  $P(\mathbf{r})$  em um tempo  $t$  pode ser definida por

$$I(\mathbf{r}, t) = U^*(\mathbf{r}, t)U(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

Das equações 2.13 e 2.16 segue que

$$I(\mathbf{r}, t) = |K_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) + 2Re[K_1^* K_2 U^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) U(\mathbf{r}_2, t - t_2)], \quad (2.17)$$

onde  $Re$  denota a parte real. Se tomarmos a média de  $I(\mathbf{r}, t)$  sobre um conjunto de diferentes realizações do campo e denotar esse conjunto de média por  $\langle \dots \rangle_e$ , obtemos a equação

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_e = |K_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle_e + |K_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_e + 2Re K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2), \quad (2.18)$$

onde

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t_1) U(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_e \quad (2.19)$$

e

$$\langle I(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle_e = \langle U^*(\mathbf{r}_j, t_j) U(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle_e = \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, t_j, t_j), (j = 1, 2). \quad (2.20)$$

A função  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ , definida pela equação 2.19 é conhecida como a função de correlação cruzada e que quanto maior for a correlação entre os campos maior será a visibilidade do padrão de interferência entre esses campo. Habitualmente, trata-se de campos estacionários, em cujo caso todas as médias do conjunto são independentes da origem do tempo, além disso, o campo é também em regra ergódico. Sob estas circunstâncias, as médias do conjunto tornam-se independentes do tempo e podem ser substituídas pelas médias temporais correspondentes.

Então a função de correlação cruzada pode ser substituído pela correspondente função temporal e isso depende somente da diferença  $t_2 - t_1$ , daí temos que

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t_1)U(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_t. \quad (2.21)$$

A função de correlação cruzada  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  é conhecida como função de coerência mútua.

# Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel coerentes

Esta seção é dedicada a estudar o efeito Talbot analisando uma referência associada à propagação da interferência de dois feixes Bessel coerentes. O estudo da interferência de dois feixes Bessel serve como base principal para esta tese pois, este trabalho é dedicado a interferência de duas redes ópticas, e a interferência de dois feixes Bessel parcialmente coerentes, no que tange a interferência de redes ópticas ao aumentarmos muito o números de ondas planas teremos neste limite a interferência de dois feixes Bessel coerentes.

## 3.1 O Feixe Bessel

Feixe Bessel tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação, conhecidos como não difratantes e que são soluções da equação de Helmholtz. Vamos analisar a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas e lembrando que uma onda é descrita por uma função escalar, conhecida como função de onda (15) e é descrita por uma função real da posição  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e do tempo  $t$ , denotada por  $u(\mathbf{r}, t)$ . Esta função obedece uma equação diferencial de segunda ordem conhecida como equação de onda

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano em coordenadas cartesianas. Vamos aplicar o princípio da superposição, pois a equação de onda é linear. Então se  $u_1(\mathbf{r}, t)$  e  $u_2(\mathbf{r}, t)$  representam

possíveis ondas, então  $u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t)$  também representará uma onda. O campo escalar de uma onda monocromática é representada por uma função de onda com dependência temporal harmônica (15), dada por

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})\cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})], \quad (3.2)$$

onde  $a(\mathbf{r})$  é a amplitude da onda,  $\varphi$  a fase e  $\nu$  a frequência. Vamos escrever a equação (3.2) em termos da função complexa

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})\exp(i\varphi)\exp(i2\pi\nu t), \quad (3.3)$$

onde  $u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r}, t)]$ , dada por (24)

$$\text{Re}[U(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)]. \quad (3.4)$$

A função  $U(\mathbf{r}, t)$ , conhecida como função de onda complexa, descreve a onda completamente. Tanto a função de onda quanto a função de onda complexa devem satisfazer a equação da onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (3.5)$$

Reescrevendo a equação (3.3) na forma

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})\exp(i2\pi\nu t), \quad (3.6)$$

onde o fator independente do tempo está em  $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})\exp(i\varphi(\mathbf{r}))$  e é conhecido como a amplitude complexa da onda. Substituindo equação (3.6) em (3.4) temos



$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[U(\mathbf{r})\exp(i2\pi\nu t)] = \frac{1}{2}[U(\mathbf{r})\exp(i2\pi\nu t) + U^*(\mathbf{r})\exp(-i2\pi\nu t)]. \quad (3.7)$$

Substituindo equação (3.6) na equação (3.5) temos

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \quad (3.8)$$

onde  $k$  é o número de onda, dado por  $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$ . A equação (3.8) é conhecida como equação de Helmholtz. Substituindo a equação (3.2) na equação (3.4)

$$u^2(\mathbf{r}, t) = 2a^2(\mathbf{r})\cos^2[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})] = |U(\mathbf{r})|^2\{1 + \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})]\}. \quad (3.9)$$

Fazendo a média na equação (3.9) em um tempo muito maior que o período óptico, o segundo termo desaparece, ficando

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2, \quad (3.10)$$

que é conhecida como a intensidade óptica de uma onda monocromática (15) e é dada pelo quadrado da norma de sua amplitude complexa e também é invariante no tempo. Agora escrevemos a (3.8) em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0, \quad (3.11)$$

usando separação de variáveis

$$U(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (3.12)$$

e agora substituindo a equação (3.12) na equação (3.11) e dividindo por  $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$

ficamos com

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \quad (3.13)$$

Igualamos a uma contante, temos então

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\beta^2 Z. \quad (3.14)$$

Assim

$$Z(z) = \exp(i\beta z). \quad (3.15)$$

Multiplicando o lado esquerdo da equação (3.13) por  $\rho^2$  igualando a contante  $\beta^2$ , ficamos com

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + (k^2 - \beta^2)\rho^2 = 0. \quad (3.16)$$

Escrevendo  $\alpha = \rho^2 - \beta^2$ , temos

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \rho^2 = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \quad (3.17)$$

Como o lado esquerdo da equação (3.17) depende de  $R$  e o lado direito depende apenas de  $\Phi$  é fácil perceber que para a igualdade ser válida é necessário que os dois lados sejam constantes, daí

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -p^2 \Phi, \quad (3.18)$$

tendo como solução

$$\Phi(\phi) = \exp(ip\phi). \quad (3.19)$$

Sabendo que a função  $U(\rho, \phi, z)$ , por continuidade, deve estar sempre definida para  $\phi = 0$  e  $\phi = 2\pi$ , logo,  $U(\rho, 0, z) = U(\rho, 2\pi, z)$  para qualquer  $\rho$  e  $z$ . Então, ao impor a condição de que  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ , implica dizer que  $p$  deve ser inteiro ou igual a zero, ou seja,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Calculamos agora a parte radial da equação diferencial. Para isso, o lado direito da (3.17) deve ser igual a  $p^2$ . Multiplicando toda a equação por  $R(\rho)$ , ficamos com

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - p^2) R = 0. \quad (3.20)$$

Fazendo a derivada do produto na primeira parte da equação (3.20) e dividindo tudo por  $\rho^2$ , temos

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left( \alpha^2 - \frac{p^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (3.21)$$

A equação (3.21) é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem  $p$ , onde suas soluções são funções de Bessel de ordem  $p$  (25). Assim, a amplitude complexa da onda, (3.12), é escrita em termos da equação (3.15), equação (3.19) e equação (3.21)

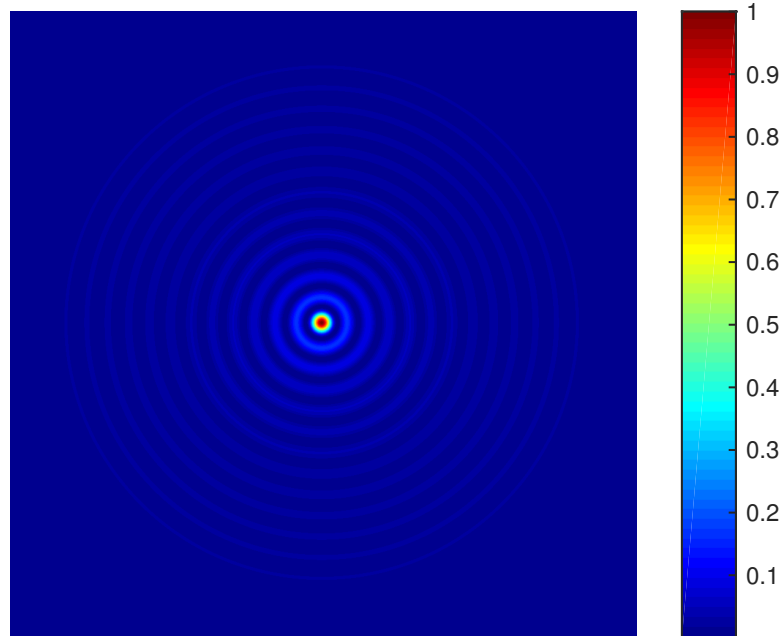
$$U(\rho, \phi, z) = U_p J_p(\alpha \rho) \exp(ip\phi) \exp(i\beta z), \quad (3.22)$$

onde  $U_p$  é uma constante,  $J_p$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $p$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, onde  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  são as componentes radial, azimutal e longitudinal da onda, respectivamente.

Como exemplo seguem as figuras 3.1 e 3.2 onde podemos ver os anéis concêntricos que são características específicas dos feixes Bessel. O feixe, cuja carga topológica vale zero, possui intensidade máxima em seu centro, como pode ser visto na figura 3.1. No caso de uma carga topológica maior que zero, o centro tem uma intensidade nula, como

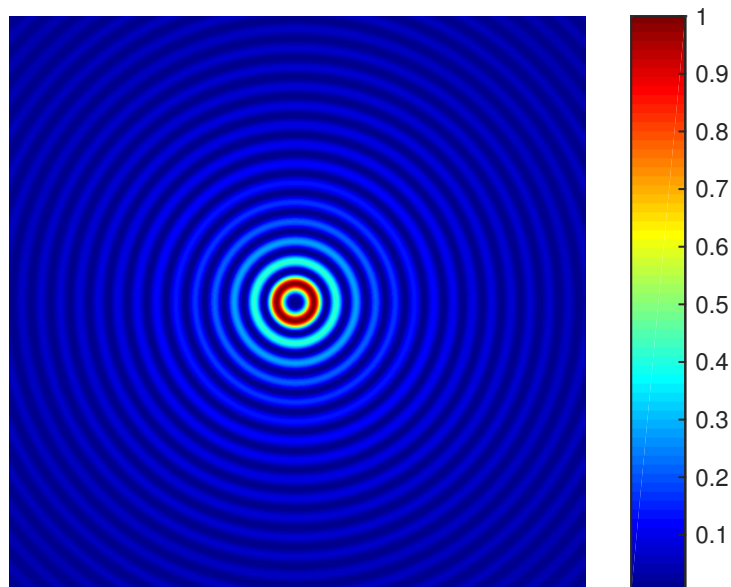
mostrado na figura 3.2.

Figura 3.1: Intensidade do Feixe Bessel para  $p = 0$ .



Fonte: Autor.

Figura 3.2: Intensidade do Feixe Bessel para  $p = 2$ .



Fonte: Autor.

## 3.2 Efeito Talbot ao longo da propagação da interferência de dois feixes Bessel coerentes

Quando dois feixes Bessel estão se propagando no espaço livre é possível observar efeito Talbot a partir da interferência dos feixes durante a propagação (11). Uma forma de se obter uma superposição de feixes Bessel é usar duas aberturas circulares de raios  $k_{r0}$  e  $k_{r1}$ , seguida por uma lente colocada a uma distância igual ao comprimento focal  $f$ . Ao usarmos uma lente, pela óptica de Fourier, isto é o mesmo que realizar a transformada de Fourier das duas aberturas circulares, representada pela seguinte equação

$$h_0(k_r) = \exp(i\Phi_0\delta(k_r - k_{r0}) + a\exp(i\Phi_1)\delta(k_r - k_{r1})), \quad (3.23)$$

onde  $\Phi_j = ik_{zj}z + \phi_j$ ,  $j = 0, 1$ ,  $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  e  $a$  é um fator de amplitude. Porém nos cálculos que seguem serão usadas aberturas em forma de anel com tamanho finito ao invés de deltas de Dirac. Os campos que descrevem a luz produzida pelos anéis, emergindo da lente, são as soluções da equação de Helmholtz, que podem ser escritas como

$$H_j^{dentro}(r, z) = [J_0(k_{rj}r) - iN_0(k_{rj}r)]\exp(ik_{zj}z + i\phi_j), \quad (3.24)$$

$$H_j^{fora}(r, z) = [J_0(k_{rj}r) + iN_0(k_{rj}r)]\exp(ik_{zj}z + i\phi_j), \quad (3.25)$$

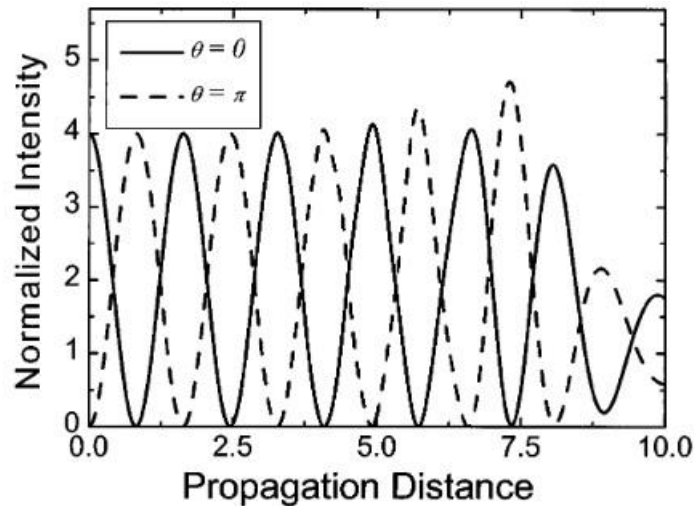
onde  $j = 0$  e  $j = 1$  se referem a luz passando através dos anéis 0 e 1, respectivamente. A superposição dos feixes Bessel é soma de  $H_j^{dentro}$  e  $H_j^{fora}$  de forma que a singularidade seja cancelada. A superposição destes campo é dada por

$$I(r, z) = J_0^2(k_{r0}r) + J_0^2(k_{r1}r) + 2J_0^2(k_{r0}r)J_0^2(k_{r1}r)\cos[(k_{z0} - k_{z1})z + \theta], \quad (3.26)$$

onde  $\theta = \phi_0 - \phi_1$  e  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ . O último termo da (3.26) é referente ao termo de interferência.

Na referência (11) é calculada a evolução da intensidade na abertura anelar após passar pela lente. A figura 3.3 mostra a propagação da superposição dos feixes Bessel, em fase sendo  $\theta = 0$  e fora de fase  $\theta = \pi$ .

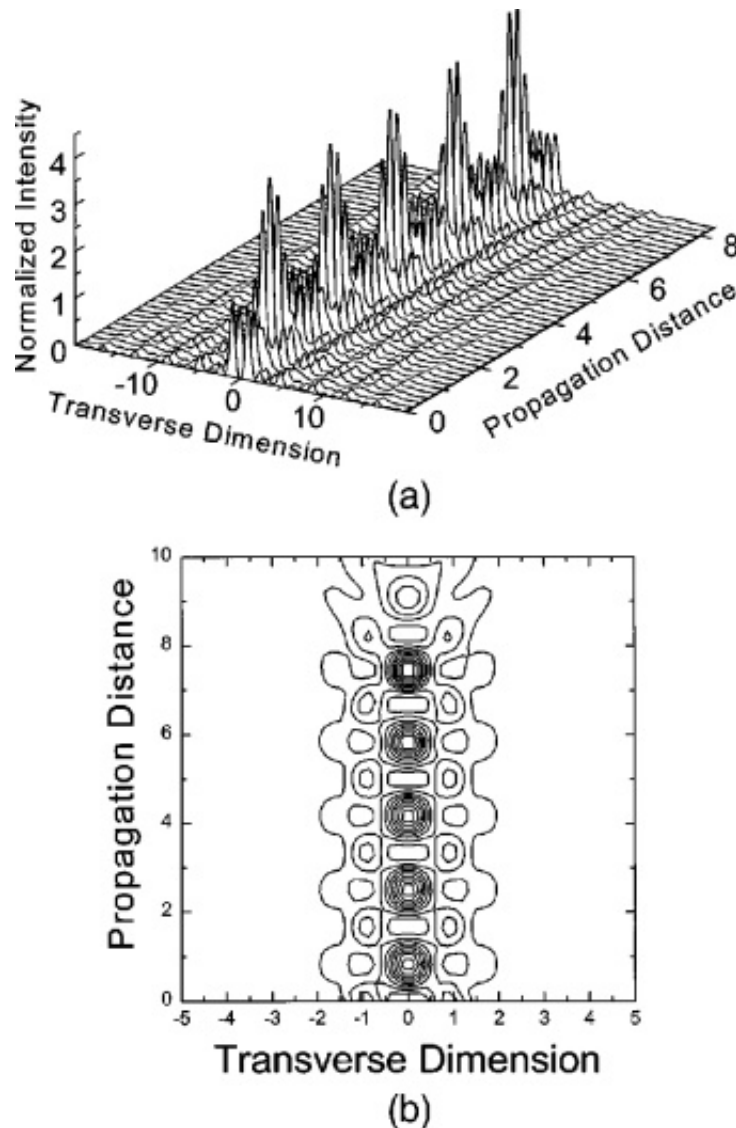
Figura 3.3: Intensidade de dois feixes Bessel interferindo versus distância de propagação normalizada pelo comprimento de Rayleigh.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann (11).

Existe um comportamento oscilatório de aproximadamente  $z_p \approx \pi$  com máximos e mínimos variando dependendo da fase inicial entre os feixes. Agora, na figura 3.4a temos o gráfico da superposição dos feixes Bessel na propagação ao longo de quatro repetições. Na figura 3.4b, é exibido o mapa de contorno do perfil transversal, mostrando o efeito Talbot ao longo da propagação.

Figura 3.4: Evolução da superposição de feixes Bessel: (a) Plot em 3D. (b) Contorno do perfil transversal, mostrando o Talbot ao longo da propagação.



Fonte: S. Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann (11).

Então de acordo com Chavéz-Cerda (11) o efeito Talbot, usando uma superposição de feixes Bessel coerentes, é possível teoricamente, dando assim um amparo maior para a realização do nosso trabalho tanto no que tange ao estudo do efeito Talbot usando a superposição de feixes Bessel parcialmente coerente quanto ao estudo do efeito Talbot na superposição de duas redes ópticas.

# Estudo do Efeito Talbot em redes ópticas com carga topológica

## 4.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a interferência resultante da superposição de redes ópticas, que são campos não difrativos com propagação no espaço livre, e mostramos o efeito Talbot. Estas redes são formadas pela transformada de Fourier espacial formando um “quase” estado de momento angular orbital (quase MAO). Nós observamos experimentalmente que, embora as imagens de Talbot mudem, o comprimento Talbot não varia quando muda a carga topológica do estado “quase” estado MAO.

Recentemente o efeito Talbot foi explorado teoricamente fazendo uso de dois estados emaranhados de MAO de fótons, mostrando que o comprimento de Talbot não varia quando muda a carga topológica (CT) (9), mas até onde sabemos, esse efeito não foi explorado experimentalmente. Feixes não difratantes ou um número finito de ondas planas tem induzido uma grande variedade de rede ópticas bi ou tridimensionais em meios lineares (26–33) e não lineares (21).

Portanto, no contexto de campos ópticos não difratantes, uma rede óptica pode ser expressa pela superposição de  $Q$  ondas planas de iguais amplitudes, cujos vetores de propagação têm uma projeção comum  $k_z$  em relação ao eixo  $z$ . O módulo da componente transversa do vetor propagação  $k_T$  é também constante dada pela identidade  $k_T^2 = k^2 - k_z^2$ , onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda. A projeção dos vetores de propagação das ondas interferentes ao plano  $xy$  formam ângulos em relação ao eixo  $x$ , que são múltiplos de



$2\pi/Q$ . A transformada espacial inversa de Fourier é precisamente um quase estado-MAO (34), e esse estado pode ser aproximadamente simulado pela passagem de um feixe de Laguerre-Gauss (LG) através de um conjunto de pinholes (35).

Estes estados são considerados como uma superposição de spots de Feixe Gaussiano deslocados radialmente do centro da mesma quantidade com um certo ângulo azimutal e uma fase constante proporcional a este ângulo (34). Neste capítulo, será explorado o efeito Talbot usando uma superposição de duas redes ópticas, que foram geradas pela superposição de dois quase estados MAO. Foi estudado o efeito Talbot pela interferência de estados quase MAO com diferentes módulos de vetores de ondas e com diferentes CT.

## 4.2 Redes ópticas

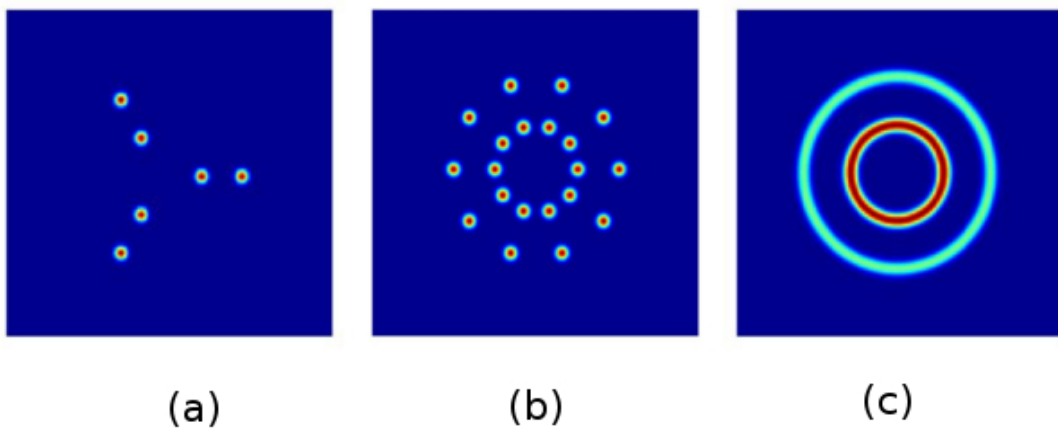
Podemos expressar uma rede óptica por uma superposição de  $Q$  ondas planas com amplitudes iguais (26). Assim, uma rede óptica formada por  $Q$  ondas planas pode ser escrita da seguinte forma

$$f(r, \theta) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \{ \exp(i\theta_{1n}) \exp[i2\pi\rho_1 r \cos(\theta - n\Delta\theta)] + \exp(i\theta_{2n}) \exp[i2\pi\rho_2 r \cos(\theta - n\Delta\theta)] \}, \quad (4.1)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são o raio e o ângulo em coordenadas cilíndricas do sistema, respectivamente,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as frequências espaciais, dada pela componente transversal dividida por  $2\pi$  ( $k_t/2\pi$ ) do número de onda  $k$ , onde  $k^2 = 2\pi/\lambda = k_z^2 + k_t^2$ ,  $\theta_{ni} = p_i(n\Delta\theta)$  sendo  $i = 1, 2$  e  $\Delta\theta = 2\pi/Q$  e  $p$  é um número inteiro e representa a carga topológica do sistema.

Ao realizarmos a transformada de Fourier da equação (4.1) e usando  $Q = 3, 10$  e  $100$  obtemos o espectro de três redes ópticas figura 4.1

Figura 4.1: Espectro de três redes ópticas para os parâmetros:  $p_1 = 2, p_2 = 2, \rho_1 = 4 \text{ mm}^{-1}, \rho_2 = 1 \text{ mm}^{-1}$  (a)  $Q = 3$  (b)  $Q = 10$  (c)  $Q = 100$

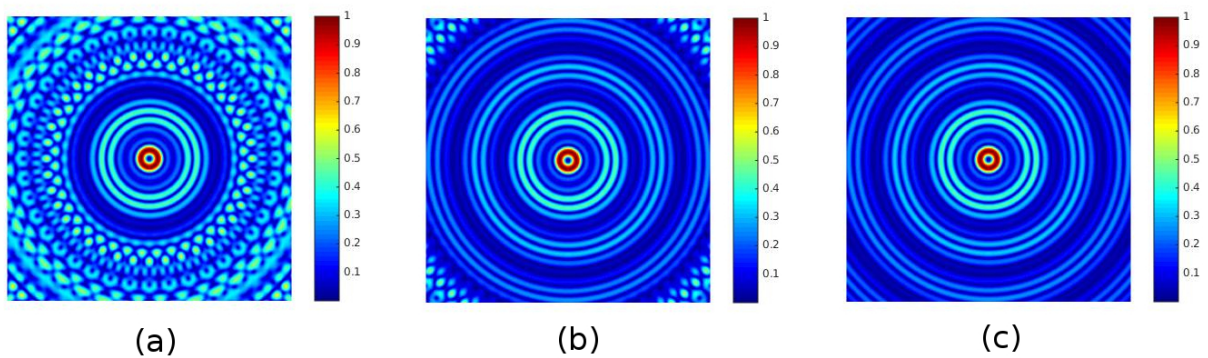


Fonte: Autor.

É possível observar que são formadas estruturas periódicas que variam com o número de ondas planas inseridas, é possível notar que aumentando a quantidade de ondas planas, o padrão tende a se tornar um padrão circular, cuja transformada de Fourier será a superposição de dois feixes Bessel figura 4.2.

Por uma ispeção visual na figura 4.1 nota-se que quando aumentarmos o número de ondas planas interferindo entre si, a rede óptica tende a virar a superposição de dois feixes Bessel pois, ao aumentarmos bastante a quantidade de ondas planas teremos anéis concêntricos, cuja transformada de Fourier será a superposição de dois feixes Bessel. Como exemplo temos na figura 4.2 três redes ópticas para diferentes ondas planas  $Q = 30, 70$  e  $100$ , mas com  $p_1 = p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 1,0 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 1,50 \text{ mm}^{-1}$  fixos .

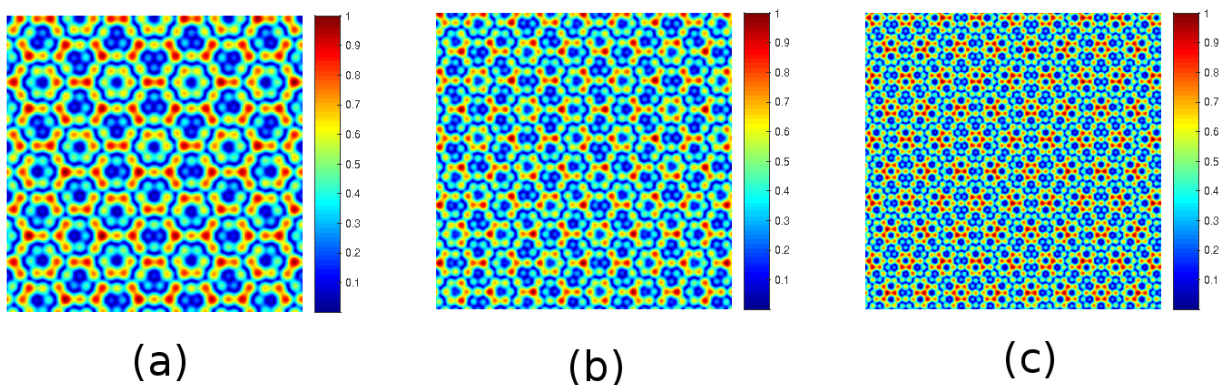
Figura 4.2: Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas para os parâmetros  $p_1 = p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 1,0 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 1,50 \text{ mm}^{-1}$  fixos variando  $Q$  (a)  $Q = 30$  (b)  $Q = 70$  (c)  $Q = 100$



Fonte: Autor.

O efeito de variar apenas umas das frequências espaciais é mostrado na figura 4.3, onde temos a amplitude de duas redes ópticas, para três ondas planas, com as cargas topológicas  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 3$  e com a frequência espacial  $\rho_1$  fixa em  $2 \text{ mm}^{-1}$  mudando a frequência  $\rho_2$ .

Figura 4.3: Redes ópticas mudando a frequência espacial (a)  $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , (b)  $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  e c)  $\rho_2 = 120/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$

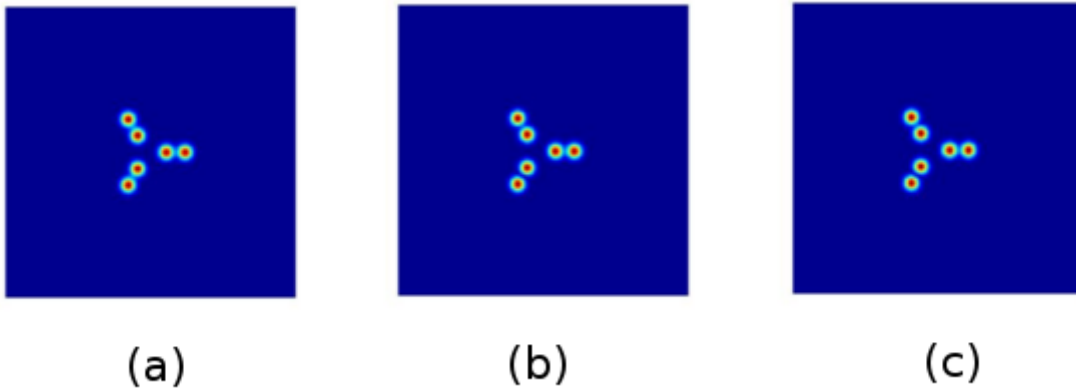


Fonte: Autor.

É então observado na figura 4.3, que ao alterar as frequências espaciais a diferença no padrão transversal é apenas alterado no tamanho, como é de se esperar pois quando estuda-se o experimento de Young quando a luz é difratada por duas fendas cuja distância entre essas fendas é  $d$  observamos que a medida que as fendas são mais e mais separadas, os máximos e mínimos ficam mais e mais finos e próximos entre si (36).

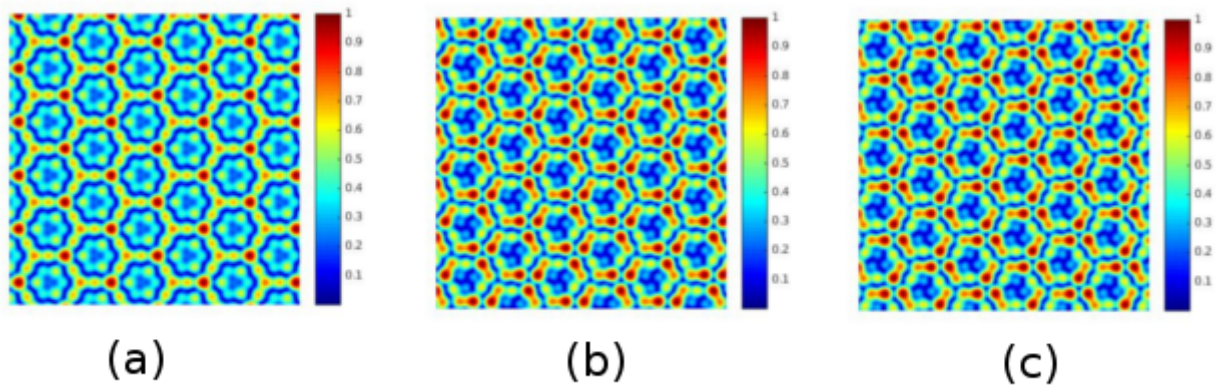
É possível observar na figura 4.4 que os espectros das redes ópticas para diferentes cargas topológicas são os mesmos entretanto, diferentes cargas topológicas influenciam na fase das ondas planas, que por sua vez influenciam no padrão das redes ópticas figura 4.5.

Figura 4.4: Espectro de três redes ópticas para os parâmetros  $\rho_1 = 4 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\rho_2 = 2 \text{ mm}^{-1}$ ,  $Q = 3$  fixos variando  $p$  (a)  $p_1 = 0, p_2 = 0$  (b)  $p_1 = 3, p_2 = 1$  (c)  $p_1 = 5, p_2 = 3$ .



Fonte: Autor.

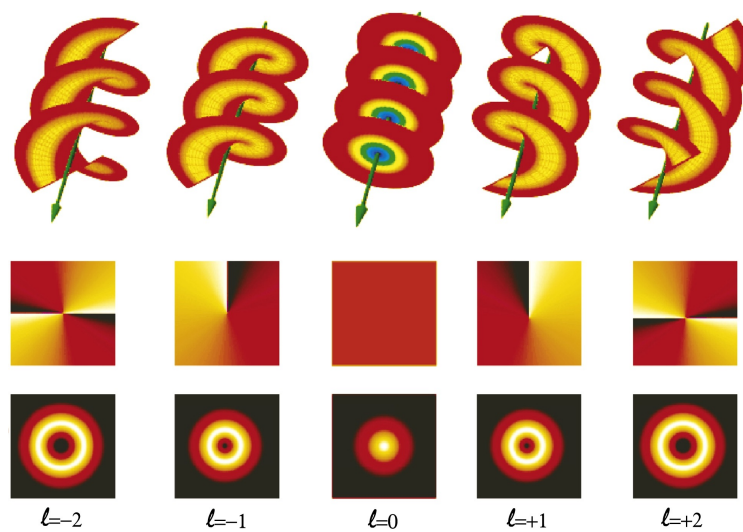
Figura 4.5: Redes ópticas alterando as cargas topológicas das ondas planas ((a)  $p_1 = 0, p_2 = 0$  (b)  $p_1 = 3, p_2 = 1$  (c)  $p_1 = 5, p_2 = 3$ ).



Fonte: Autor.

Na figura 4.4 cada onda plana se encontra em uma fase e existe um atraso de uma em relação a outra no plano  $z$ . Com isso, ao alterar a carga topológica também se altera a fase das ondas planas bem como o atraso de uma onda em relação a outra, dessa forma alterando o padrão das redes ópticas na figura 4.5. A figura 4.6 exemplifica ao mostrar feixes Laguerre-Gauss para diferentes cargas topológicas.

Figura 4.6: Representação da distribuição de intensidade e da frente de onda para diferentes valores de  $p$ , nesta figura a carga topológica é representada pela letra  $\ell$ .



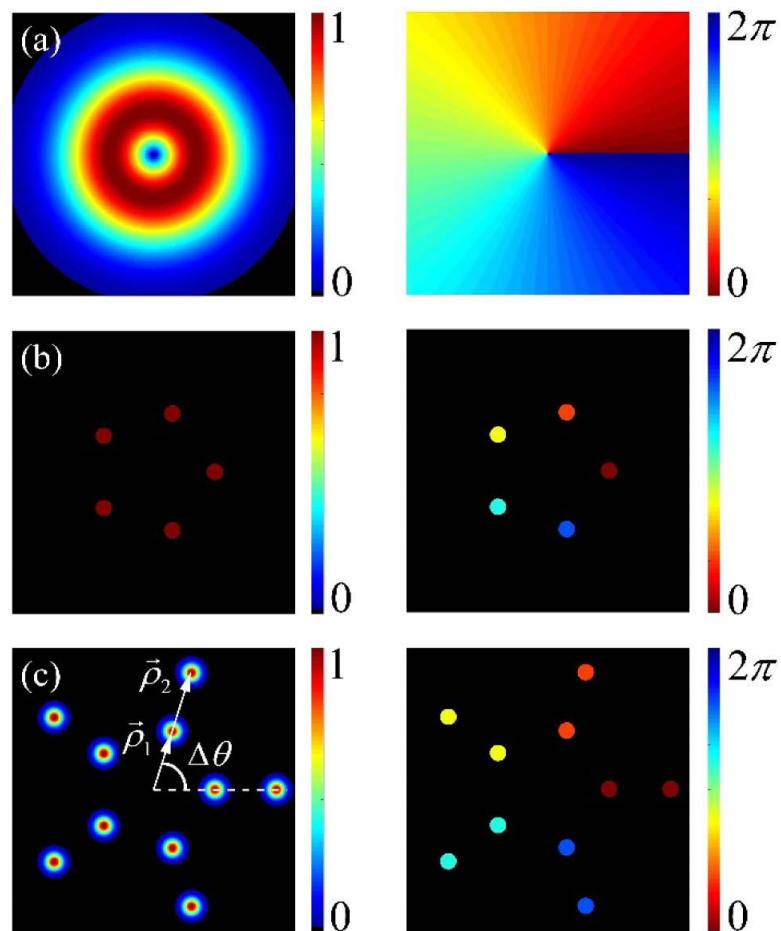
Fonte: Retirado de (37).

Para diferentes cargas topológicas temos diferentes distribuições de fase seguida de diferentes perfis de intensidade do feixe Laguerre-Gauss.

### 4.3 Teoria

A figura 4.7 ilustra a ideia desse capítulo nela vemos que, o espectro de uma rede óptica pode ser aproximadamente simulado passando um feixe Laguerre-Gauss (LG) (35) através de um arranjo circular de orifícios formando assim um "quase estado de MAO". Este estado é considerado como uma superposição *spots* gaussianos deslocados radialmente do centro da mesma quantidade com um certo ângulo azimutal e uma fase constante proporcional a este ângulo (34).

Figura 4.7: Espectro de redes ópticas e difração de estados MAO por um filtro espacial com pequenas aberturas circulares separadas formando uma geometria circular (a) estado MAO, (b) difratando pelo filtro espacial e (c) visualização do espectro de uma rede óptica de Talbot



Fonte: Autor.

A primeira e segunda coluna descrevem a intensidade do feixe e a respectiva dis-



tribuição de fase. A figura 4.7(b) mostra um conjunto de pinholes superpostos com o feixe, formando um quase estado MAO. A propagação longitudinal do espectro espacial do campo na figura 4.7(c) apresentará o efeito Talbot. É importante notar que quando extrapolarmos o número de pinholes para o infinito na figura 4.7(b), uma estrutura de anel é formada, e o seu espectro espacial é o conhecido feixe Bessel, um feixe não difratante (29).

Considerando que o spots gaussianos na figura 4.7(c) são tão pequenos que eles podem ser escritos como funções delta de Dirac, o campo de duas redes ópticas não difrativas interferentes pode ser descrito como

$$E(x, y) = c \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(ip_1(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_1(x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta))] \\ + \exp(ip_2(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_2(x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta))], \quad (4.2)$$

onde  $\rho_{1,2} = k_{T_{1,2}}/2\pi$  são as frequências espaciais,  $\Delta\theta = 2\pi/Q$ ,  $p_{1,2}$  são números inteiros e representam a CT.

A propagação pode ser facilmente escrita por

$$E(x, y, z) = c \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(ip_1(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_1(x\cos(n\Delta\theta) \\ + y\sin(n\Delta\theta))] \exp[iz\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2}] \\ + \exp(ip_2(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_2(x\cos(n\Delta\theta) \\ + y\sin(n\Delta\theta))] \exp[iz\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}]. \quad (4.3)$$

É possível ver claramente que a equação (4.3) é soma de dois campos  $E_1 + E_2$  de tal forma que considerando  $|E(x, y, z)|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\cos(E_1^*E_2)$  o padrão de intensidade, e resolvendo separadamente, temos

$$|E_1|^2 = |C|^2 \sum_n \sum_{n'} \exp[ip_1(n\Delta\theta) - ip_1(n'\Delta\theta)] \exp[i2\pi\rho_1(x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta))] \\ \times \exp[-i2\pi\rho_1(x\cos(n'\Delta\theta) + y\sin(n'\Delta\theta))] \quad (4.4)$$



$$|E_2|^2 = |C|^2 \sum_n \sum_{n''} \exp \left[ ip_2(n\Delta\theta) - ip_2(n''\Delta\theta) \right] \exp [i2\pi\rho_2(x\cos(n\Delta\theta) + y\sen(n\Delta\theta))] \\ \times \exp \left[ -i2\pi\rho_2(x\cos(n''\Delta\theta) + y\sen(n''\Delta\theta)) \right] \quad (4.5)$$

e o termo de interferência

$$E_1^* E_2 = |C|^2 \sum_n \sum_{n'''} \exp \left[ ip_2(n\Delta\theta) - ip_1(n'''\Delta\theta) \right] \exp [i2\pi\rho_2(x\cos(n\Delta\theta) + y\sen(n\Delta\theta))] \\ \times \exp \left[ -i2\pi\rho_1(x\cos(n'''\Delta\theta) + y\sen(n'''\Delta\theta)) \right] \exp \left[ iz\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2} - iz\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} \right] \quad (4.6)$$

a repetição Talbot é produzida pelo termo de fase da interferência

$$\phi(x, y, z) = p_2(n\Delta\theta) - p_1(n'''\Delta\theta) + 2\pi\rho_2 [x\cos(n\Delta\theta) + y\sen(n\Delta\theta)] \\ - 2\pi\rho_1 [x\cos(n'''\Delta\theta) + y\sen(n'''\Delta\theta)] - z\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} + z\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}, \quad (4.7)$$

e sabemos que uma exponencial imaginária tem o mesmo valor quando é somado  $2\pi$  a ela, isto se dá pela fórmula de Euler. Somando  $2\pi$  na exponencial da equação (4.7), temos que

$$\phi(x, y, z_1) = \phi(x, y, z_2) + 2m\pi, \quad (4.8)$$

onde  $m$  é um número inteiro, então

$$p_2(n\Delta\theta) - ip_1(n'''\Delta\theta) + 2\pi\rho_2 [x\cos(n\Delta\theta) + y\sen(n\Delta\theta)] \\ - 2\pi\rho_1 [x\cos(n'''\Delta\theta) + y\sen(n'''\Delta\theta)] - z_1\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} + z_1\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2} \\ = p_2(n\Delta\theta) - ip_1(n'''\Delta\theta) + 2\pi\rho_2 [x\cos(n\Delta\theta) + y\sen(n\Delta\theta)] \\ - 2\pi\rho_1 [x\cos(n'''\Delta\theta) + y\sen(n'''\Delta\theta)] - z_2\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} + z_2\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2} + 2m\pi. \quad (4.9)$$

Resolvendo

$$\begin{aligned}
-z_1\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} + z_1\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2} &= -z_2\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} \\
&\quad + z_2\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2} + 2m\pi \\
-z_1[\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} - \sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}] &= -z_2[\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} \\
&\quad - \sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}] + 2m\pi \\
z_2 - z_1 &= \frac{2m\pi}{\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} - \sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Sabendo que  $k \gg \rho_{1,2}$  temos

$$\begin{aligned}
z_2 - z_1 &= \frac{2m\pi}{\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} - \sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}} \\
&= \frac{2m\pi}{k\sqrt{1 - (2\pi\rho_1/k)^2} - k\sqrt{1 - (2\pi\rho_2/k)^2}} \\
&= \frac{2m\pi}{k[1 - 1/2(2\pi\rho_1/k)^2] - k[1 - 1/2(2\pi\rho_2/k)^2]} \\
&= \frac{km}{\pi\rho_2^2 - \pi\rho_1^2}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Definindo que  $z_T = z_2 - z_1$  e que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , temos que

$$z_T = \frac{2m}{\lambda(\rho_2^2 - \rho_1^2)}, \tag{4.12}$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $m$  representa o número de autoimagens tal que se  $m = 0$  temos um padrão do espectro e para  $m = 1$  temos a primeira autoimagem. É importante salientar que na equação (4.12), a CT e o número de ondas planas  $Q$  não influenciam o comprimento Talbot.

Sun e Zhang (9) analisaram o efeito Talbot quântico com momento angular orbital (MAO), mostrando que o comprimento Talbot não varia quando muda a carga topológica (CT), no artigo os autores fizeram uso do aparato experimental mostrado na 4.8 para estudar o efeito Talbot quântico. Fazendo uso de uma fonte com *Spontaneous parametric down-conversion* (SPDC) para geração de fótons, o feixe foi separado em dois braços

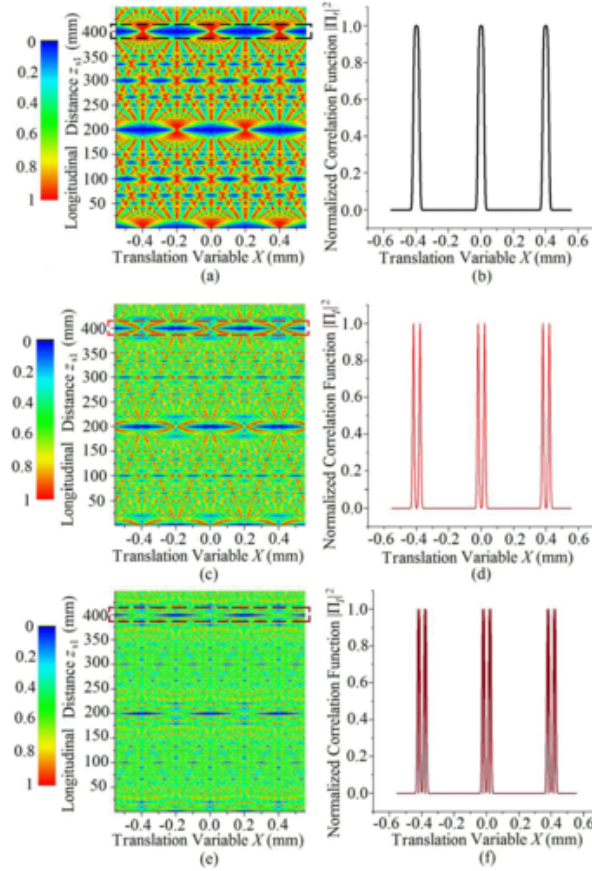


$$E_{diff} = \sum_q A_q \exp \left[ -i\pi z_0 \lambda_0 \frac{q^2}{d^2} + 2i\pi x \frac{q}{d} \right] \exp(ikz_0). \quad (4.15)$$

A equação (4.15) é o caso clássico do efeito Talbot. A chave para ocorrer o fenômeno da auto imagem é o termo  $\exp \left[ -i\pi z_0 \lambda_0 \frac{q^2}{d^2} + 2i\pi x \frac{q}{d} \right]$ . Comparando a eq. (4.15) com a equação (4.13), vê-se que o efeito Talbot também ocorrerá, uma vez que o fator de fase é similar:  $-i\pi z_{s1} \lambda_s \frac{q^2}{d^2} + 2i\pi X \frac{q}{d}$ . Além disso, a equação (4.13) apresenta diferentes propriedades, isto se dá devido ao fato de que alguns parâmetros são diferentes entre a equação (4.15) e a equação (4.13). Por exemplo,  $z_{s1}$  em (4.13) é a distância entre o cristal não-linear e a grade, enquanto  $z_0$ , na equação (4.15) é referente a distância de propagação.  $X$  representa a magnitude da translação lateral da grade e  $x$  a coordenada ordinal lateral. Estas mudanças devem ser atribuídos ao método de detecção dos modos do MAO, no qual a integração é sobre todo o plano de detecção.

Uma outra diferença também observada pelos autores é a introdução do MAO na equação (4.13). O parâmetro  $p$  em (4.14) representa o valor do MAO do fóton. Quando  $p = 0$ ,  $A'_q = A_q$  a equação (4.15) é basicamente a equação (4.13). A figura 4.9 mostra o gráfico do módulo quadrado da eq. (4.13). Os comprimentos de onda dos fótons sinal e referência são de  $800 \text{ nm}$ . Os detectores  $D_s$  e  $D_i$  são fixos. O processo de detecção é realizado fazendo o deslocamento da grade lateralmente por  $X \text{ mm}$  quando a distância da rede para o cristal não-linear é ajustada para ser  $z_{s1} \text{ mm}$ . O período da grade  $d$  é de  $400 \text{ }\mu\text{m}$  e a largura da abertura  $b$  é de  $40 \text{ }\mu\text{m}$ . A cintura do feixe é fixada em  $10 \text{ }\mu\text{m}$ . O efeito Talbot para o caso clássico é exibido na figura 4.9(a). A primeira repetição é dada em  $z_{s1} = z_T = 400 \text{ mm}$ , exibido na figura 4.9(b).

Figura 4.9: Padrão de Talbot para configuração imagem fantasma holográfica com MAO. (a) $p = 0$ , (c) $p = 1$ , (e) $p = 2$  A barra de cores indica o valor da função dos dois fótons correlacionados  $\Pi^2$ . (b,d,f) representa a distribuição lateral de  $z_{s1} = z_T = 400 \text{ mm}$  em (a,c,e), respectivamente.



Fonte: Retirado de (9).

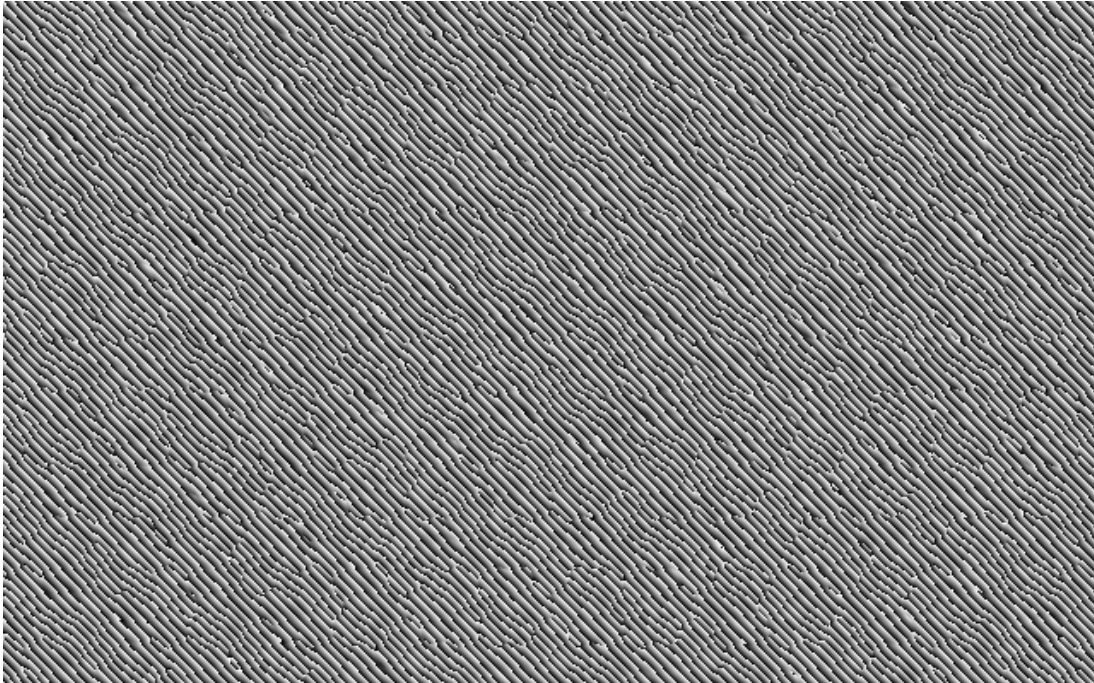
Então observamos que o padrão de interferência muda para diferentes cargas topológicas porém o comprimento talbot continua o mesmo.

## 4.4 Experimento

A figura 4.11 mostra o setup experimental. Um laser de argônio operando em  $532 \text{ nm}$  sendo expandido por duas lentes confocais,  $L_1$  e  $L_2$ , com comprimentos focais de  $1,65 \text{ mm}$  e  $300 \text{ mm}$ , respectivamente. O feixe gaussiano expandido ilumina um modulador de luz espacial (SLM) que modula somente a fase (LETO). A fase da superposição de duas redes ópticas, equação 4.2, é codificada como a fase do holograma (29), podemos ver um exemplo desses hologramas representado na figura 4.10, este holograma foi utilizado para gerar a rede óptica com  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ . Os hologramas foram geradas no Matlab, via rotina disponível no Apêndice A, salvas em

extensão BMP e utilizadas no Modulador Espacial de Luz.

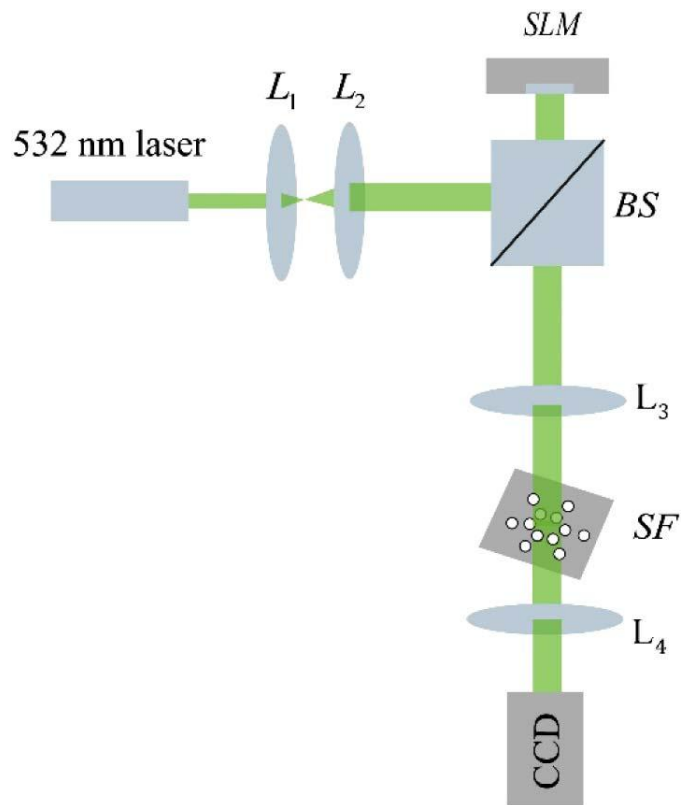
Figura 4.10: Holograma utilizado para gerar a rede óptica com  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ .



Fonte: Autor.

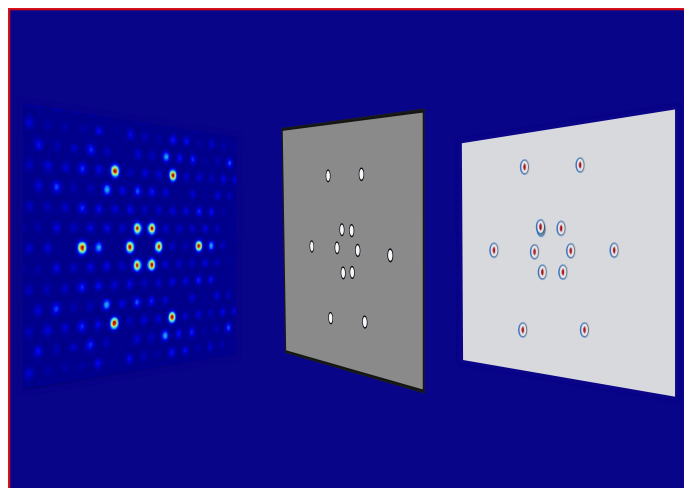
O holograma foi escrito sobre o display do *SLM*. Um feixe Gaussiano é refletido no *SLM* sofrendo uma transformada de Fourier pela lente  $L_3$ , de distância focal de 1000 *mm*, e um filtro espacial é usado para selecionar o campo desejado, pois sabendo que *SLM* só codifica a fase não coficando a amplitude acarretando não só o surgimento do quase estado MAO mas também ruídos necessitando serem filtrados, como podemos observar na figura 4.12 a imagem a ser filtrada no foco da lente  $L_3$ , o filtro e a imagem agora sem ruídos. Uma lente  $L_4$ , de distância focal 200 *mm*, e confocal com  $L_3$ , usada para gerar a imagem da interferência das redes ópticas em um dispositivo de carga acoplada câmera (*CCD*) de 16 bits, que é montada sobre um translador.

Figura 4.11: Setup Experimental onde  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  são lentes,  $BS$  divisor de feixes,  $SF$  filtro espacial,  $SLM$  modulador espacial de luz;  $CCD$  Câmera CCD.



Fonte: Autor.

Figura 4.12: Estados quase MAO antes e depois de passar por um filtro espacial com pequenas aberturas circulares separadas formando uma geometria circular.



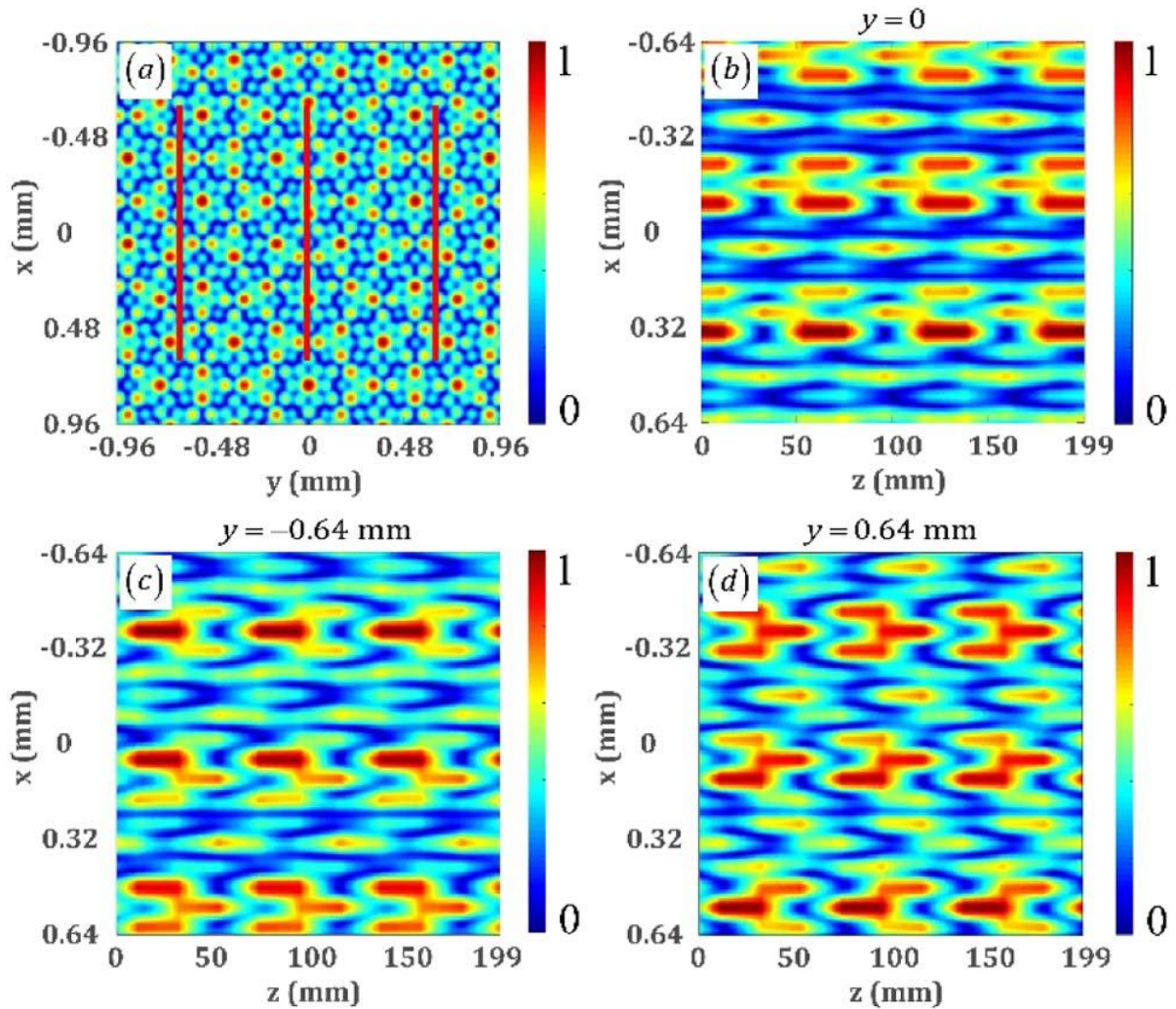
Fonte: Autor.



## 4.5 Resultados e discussão

A figura 4.13(a) apresenta um resultado teórico para o padrão transversal (paralelo ao plano  $xy$ ) de uma rede óptica obtida da equação (4.3) para  $z = 0$ . Nós extraímos três cortes, indicados por linhas vermelhas na figura 4.13(a), paralelas ao plano  $xz$  para  $y = 0,64 \text{ mm}$ ,  $y = 0$  e  $y = 0,64 \text{ mm}$ .

Figura 4.13: (a) Padrão transversal para  $z = 0$ . (b)-(d) tapetes Talbot ao longo das linhas vermelhas indicados em (a). Usamos  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ .



Fonte: Autor.

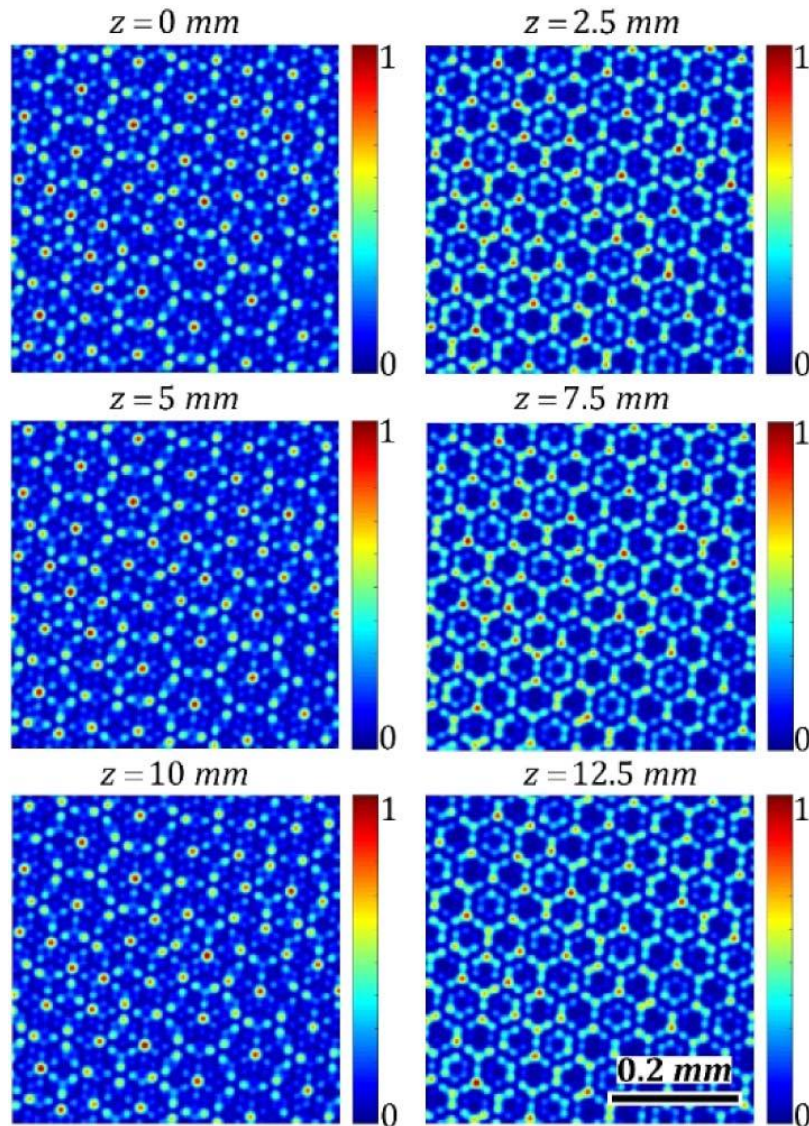
Os tapetes Talbot que são mostrados nas figuras 4.13(b)- 4.13(d) tem periodicidade  $z_T = 63,4 \text{ mm}$ .

Da equação(4.3), vemos que esses padrões mudam de forma quando muda a CT,  $p_1$  e  $p_2$ , mas pela equação (4.12)  $z_T$  não muda. Agora nós iremos confirmar experimentalmente essa afirmação. As figuras de 4.14- 4.16 ilustram o fato de que o comprimento



Talbot não depende da  $CT$  e de  $Q$ . A figura 4.14 mostra os resultados experimentais para  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $\lambda = 514 \text{ nm}$ ,  $\rho_1 = (25/\pi) \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = (60/\pi) \text{ mm}^{-1}$  para diferentes posições  $z$ . É possível identificar o comprimento Talbot que para este caso é  $z_T = 5 \text{ mm}$ .

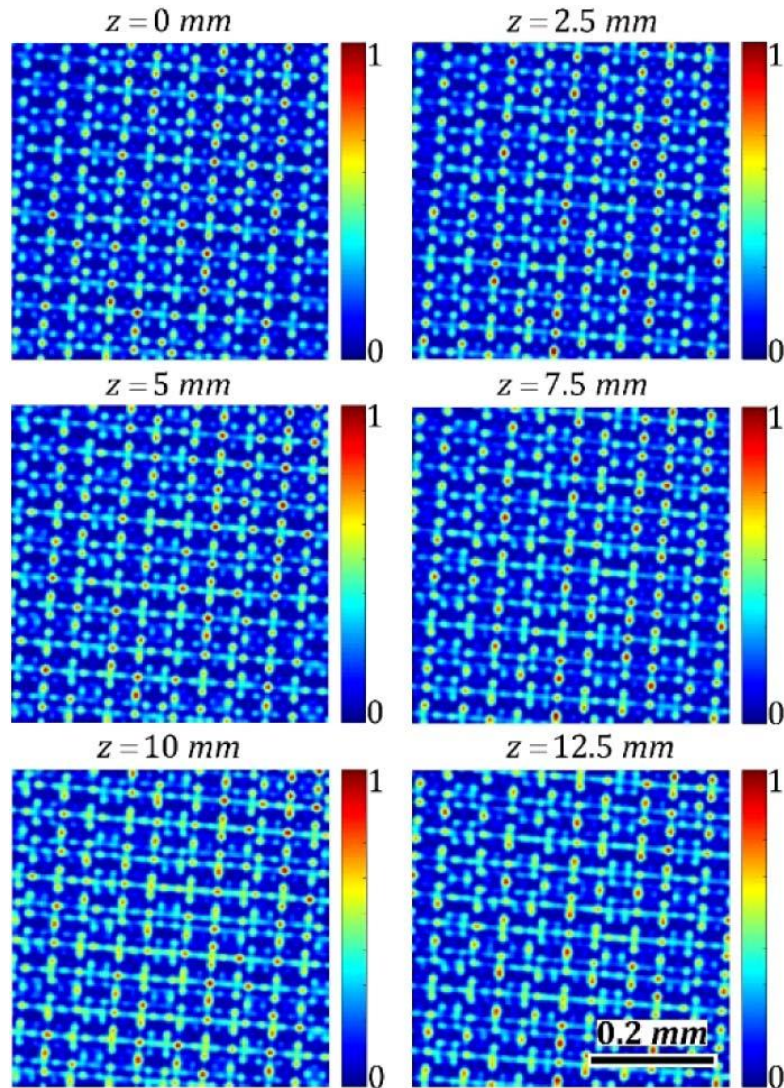
Figura 4.14: Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , e  $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ .



Fonte: Autor.

Agora iremos analisar a dependência do comprimento talbot mantendo as mesmas frequências espaciais porém para diferentes  $CT$  e  $Q$  conforme a figura 4.15 abaixo.

Figura 4.15: Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para  $Q = 4$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  e  $\rho_2 = 60/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ .



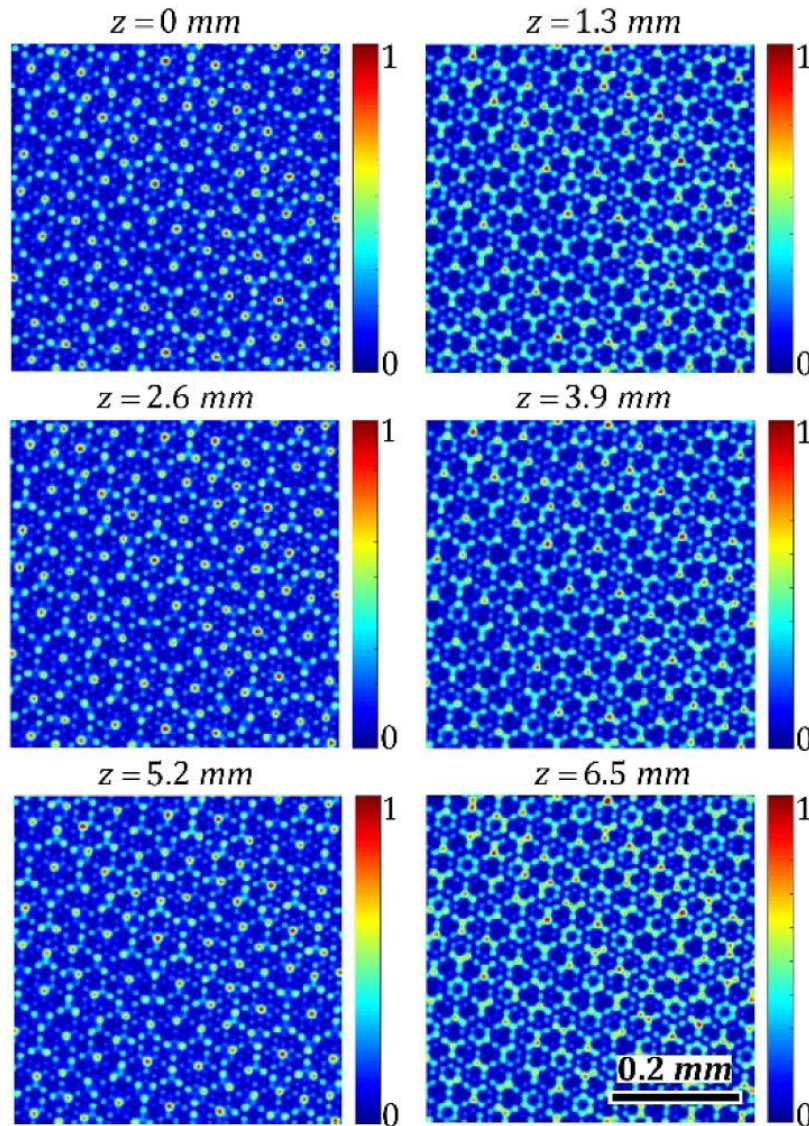
Fonte: Autor.

A figura 4.15 exibe o mesmo comprimento Talbot que a figura anterior. Esse fato corrobora com o modelo matemático apresentado aqui através da (4.15). No entanto, é importante notar que as redes ópticas são diferentes umas das outras, comparando as figuras 4.14 e 4.15, fato já explicado na seção 4.2 quanto ao resultado teórico mostrado na figura 4.5.

Mantendo os parâmetros  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , usados para obtenção da figura 4.14 porém aumentando a distância entre a frequência espacial  $\rho_2$  para  $80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$  obtemos o resultado apresentado na figura 4.16.



Figura 4.16: Sequência de imagens experimentais mostrando o efeito talbot para  $Q = 3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $\rho_1 = 25/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ , e  $\rho_2 = 80/\pi^2 \text{ mm}^{-1}$ .



Fonte: Autor.

A figura 4.16 apresenta um comprimento Talbot  $z_T = 2,6 \text{ mm}$ . Onde  $\rho_2$  é o único parâmetro diferente dos usado para obter os plots da figura 4.14. Ao comparar-mos a figura 4.16 com a figura 4.14 observamos a princípio a diferença no tamanho do padrão transversal porém,  $z_T$  é diferente, como citado acima.

Neste ponto, é importante notar que extrapolando o número de estados  $Q$  para o infinito, a figura 4.2(c) deve representar a soma de dois anéis concêntricos, e para a transformada espacial de Fourier do campo, obteremos um efeito Talbot ao longo da propagação de dois feixes de Bessel interferentes visto na seção 3.2. No entanto, manipulando a  $CT$  e  $Q$ , temos inúmeras maneiras incontáveis de obter uma rede óptica 3D controlável.

## 4.6 Conclusão

Nós projetamos um efeito Talbot usando interferência de estados de quase MAO e mostramos experimentalmente que o comprimento Talbot não depende da  $CT$  dos estados. Notavelmente, nós podemos usar a  $CT$  para controlar a forma de um padrão 3D periódico sem mudar o  $z_T$ .

Estes resultados podem ser úteis para projetar estruturas 3D para gravação direta de fotopolimerização a laser ou para inscrever de forma não-linear redes fotônicas 3D em material fotossensível (38). Aqui temos spots Gaussianos uniformemente distribuídos em torno de alguns raios e fases com uma mudança constante entre os spots, simulando um feixe LG cruzando um pinhole. A periodicidade depende apenas da frequência espacial transversal.

# Estudo do Efeito Talbot com interferência de feixes Bessel parcialmente coerentes

## 5.1 Introdução

Neste capítulo estudamos a propagação no espaço livre da interferência de feixes Bessel parcialmente coerentes. Os feixes Bessel parcialmente coerentes são gerados pela difração de luz parcialmente coerente por duas fendas circulares concêntricas. Como no capítulo 3.2 foi observado o efeito Talbot de feixes Bessel coerentes, agora temos suporte para observar o efeito Talbot para feixe Bessel parcialmente coerente, no padrão de intensidade aleatório e na correlação de intensidade. Mostraremos que o comprimento Talbot depende somente dos raios das fendas circulares (frequência espacial transversal) e explicaremos esse efeito com base na decomposição de ondas planas de campos espacialmente aleatórios.

O efeito Talbot tem sido estudado com feixes interferentes não difratantes (10, 11). Estes feixes não difratantes são também chamados de feixes Bessel. Feixes Bessel parcialmente coerentes tem sido usados para mostrar propriedades não difratantes(12,13). Dessa maneira, nenhum trabalho tem mostrado o efeito Talbot com interferência de feixes Bessel parcialmente coerente. Portanto nesse trabalho, apresentamos uma teoria com suporte em experimentos para explicar esse efeito. Mostraremos que é possível um modelo analítico para propagação da densidade espectral cruzada para interferência de dois feixes Bessel parcialmente coerentes.

## 5.2 Estrutura de campo parcialmente coerente e a representação deste campo em modos coerentes

A Teoria moderna de coerência óptica, defendida por Wolf e outros (14), começaram com o estudo da função de coerência mútua  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  de campos ópticos estáticos de sentido amplo, definida na seção 2.3

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t_1)U(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (5.1)$$

Onde a diferença de tempo  $\tau = t_2 - t_1$  e os brackets representam a média temporal ou, equivalente para campos ergódicos, média de ensembles. O campo  $U(\mathbf{r}, t)$  é tipicamente tomado como escalar. Wolf (1955) (39) mostrou que a função de coerência mútua satisfaz um par de equações de onda no espaço livre, a saber:

$$\left( \nabla_1^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0, \quad (5.2)$$

$$\left( \nabla_2^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0, \quad (5.3)$$

onde  $\nabla_i^2$  é o Laplaciano em coordenadas cartesianas do vetor posição  $r_i$  e  $c$  é velocidade da luz. Dessas equações, pode-se ver que as propriedades estatísticas da luz evoluem de maneira bem definida na propagação, e grande parte da pesquisa em teoria da coerência óptica tem envolvido o estudo das consequências dessas equações de evolução.

Como é possível estudar o comportamento de campos de ondas deterministas no domínio do tempo ou no domínio da frequência, também é possível estudar o comportamento de campos de ondas parcialmente coerentes em tempo ou frequência. A função de densidade espectral cruzada  $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$  é definida como a transformada de Fourier temporal da função de coerência mútua com respeito à variável temporal  $\tau$ ,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.4)$$

A densidade espectral cruzada satisfaz um par de equações de Helmholtz,

$$(\nabla_1^2 + k^2) W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0, \quad (5.5)$$

$$(\nabla_2^2 + k^2) W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0, \quad (5.6)$$

onde  $k = \omega/c$  é o número de onda da luz correspondente a frequência  $\omega$ . Esse par de equações diferenciais elípticas para a função densidade espectral cruzada é em geral, fácil de resolver para um par de equações de ondas hiperbólicas para função de coerência mútua, a função de coerência mútua pode ser determinada tomando a transformada de Fourier inversa da densidade espectral cruzada.

A densidade espectral cruzada é comumente escrita em termos de duas outras funções, a densidade espectral  $S(\mathbf{r}, \omega)$  e o grau espectral de coerência  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$  como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S(\mathbf{r}_2, \omega)} \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega). \quad (5.7)$$

A densidade espectral  $S(\mathbf{r}, \omega)$  representa a intensidade do campo na posição  $\mathbf{r}$  com frequência  $\omega$  e o grau espectral de coerência  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$  é a medida do grau de correlação do campo nas posições  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  com frequência  $\omega$ .

É notável que o valor absoluto do grau espectral de coerência é restrito aos valores

$$0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| \leq 1, \quad (5.8)$$

onde 0 representa completa incoerência espacial e 1 representa completa coerência espacial.

Como a densidade espectral cruzada é Hermitiana, isto é

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = W^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \omega), \quad (5.9)$$

e que é não negativa, tal que

$$\int_D \int_D W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \omega) f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) d^2 r_1 d^2 r_2 \geq 0, \quad (5.10)$$

onde  $f(\mathbf{r})$  é uma função de quadrado integrável, para uma fonte secundária com um campo se propagando de  $z = 0$ , o domínio de intergração  $D$  é o plano da fonte. Assumindo que a densidade espectral cruzada é também quadrado integrável sobre todo esse domínio, ele representa um núcleo *Hilbert – Schmidt*, que pelo teorema de Mercer (40), ele pode ser expandido por uma série de funções ortogonais na forma

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega), \quad (5.11)$$

onde os autovalores  $\lambda_n(\omega)$  e as autofunções  $\phi_n(\mathbf{r}, \omega)$  satisfazem a equação integral

$$\int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \phi(\mathbf{r}_1, \omega) d^2 r_1 = \lambda_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega). \quad (5.12)$$

O somatório em geral, deve ser sobre múltiplos índices, e deve ser uma soma finita ou infinita. Os autovalores são não negativos e as autofunções são ortogonais e tipicamente podem ser ortonormais. A equação (5.12) é a representação dos modos coerentes da densidade espectral cruzada. A representação em modos coerentes pode ser usada para construir um conjunto de campos de onda monocromáticos cuja média de segunda ordem reproduz a densidade espectral cruzada. Para isso, introduzimos um conjunto de campos definido por

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n a_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega), \quad (5.13)$$

onde os coeficientes  $a_n$  são variáveis aleatórias. Essas variáveis são escolhidas tal que a média delas sobre todo o conjunto de campos satisfazem a condição

$$\langle a_n^*(\omega) a_m(\omega) \rangle_\omega = \lambda_n(\omega) \delta_{mn}. \quad (5.14)$$



Assim a função de densidade espectral cruzada pode ser escrita como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega)U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega. \quad (5.15)$$

Substituindo a equação (5.13) na equação (5.15), encontramos que a equação (5.11) é satisfeita. Além disso, na substituição da equação (5.15) nas equações (5.5) e (5.6), observa-se que a aplicação de  $U(\mathbf{r}, \omega)$  estas equações satisfazem a equação de Helmholtz e representam campos de ondas monocromáticos válidos e, portanto, coerentes.

### 5.3 Teoria

Para elucidar melhor o que queremos mostrar nós elaboramos uma teoria para feixes Bessel ideais, onde fendas de larguras finitas são consideradas como funções delta de Dirac de coordenadas radiais (11). Uma fenda circular delta de Dirac pode ser substituída por um conjunto infinito de funções delta de Dirac localizadas igualmente espaçadas entre si e igualmente distanciadas do centro (41). Para um campo de speckle cruzando esta fenda circular de Dirac, a difração de campo distante forma feixes Bessel parcialmente coerentes. Considerando que esses campos são espacialmente ergódicos (23), eles podem ser expressos por uma soma de infinitas ondas planas (42).

$$E_i(\mathbf{r}_\perp, 0) = C \sum_n \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp i}, \theta_n)} \exp[i\varphi(k_{\perp i}, \theta_n)] \exp(i\mathbf{k}_{\perp i, n} \cdot \mathbf{r}_\perp), \quad (5.16)$$

onde  $\varphi(k_{\perp i}, \theta_n)$  é uma quantidade randômica na expressão,  $\mathbf{k}_{\perp i, n} = k_{\perp i}(\cos(\theta_n), \sin(\theta_n))$  é o vetor de onda transversal da  $n$ -ésima onda plana,  $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ ,  $\tilde{W}(k_{\perp i}, \theta_n)$  é o espectro de potência representado por um ponto na fenda circular delta de Dirac e  $C$  é a constante de normalização, e  $i = 1, 2$  se referem a duas diferentes fendas circulares. A propagação é simplesmente descrita como

$$E_i(\mathbf{r}_\perp, z) = E_i(\mathbf{r}_\perp, 0) \exp\left(iz\sqrt{k^2 - k_{\perp i}^2}\right), \quad (5.17)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\lambda$  é o comprimento de onda. Estamos interessados na superposição dos campos das duas fendas:

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = E_1(\mathbf{r}_\perp, z) + E_2(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (5.18)$$

## 5.4 Autoimagem no padrão de intensidade

Considerando  $|E(\mathbf{r}_\perp, z)|^2$  o padrão de intensidade onde

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_\perp, z) = & C \sum_n \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp 1}, \theta_n)} \exp[i\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n)] \exp(i\mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp\left(iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2}\right) \\ & + C \sum_n \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp 2}, \theta_n)} \exp[i\varphi(k_{\perp 2}, \theta_n)] \exp(i\mathbf{k}_{\perp 2, n} \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp\left(iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}\right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Então o cálculo da intensidade segue

$$I(\mathbf{r}_\perp, z) = |E(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\cos(E_1^* E_2), \quad (5.20)$$

resolvemos separadamente, temos:

$$|E_1|^2 = |C|^2 \sum_n \sum_{n'} \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp 1}, \theta_n) \tilde{W}(k_{\perp 1}, \theta_{n'})} \exp[i\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n) - i\varphi(k_{\perp 1}, \theta_{n'})], \quad (5.21)$$

$$|E_2|^2 = |C|^2 \sum_n \sum_{n''} \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp 2}, \theta_n) \tilde{W}(k_{\perp 2}, \theta_{n''})} \exp[i\varphi(k_{\perp 2}, \theta_n) - i\varphi(k_{\perp 2}, \theta_{n''})], \quad (5.22)$$

e o termo de interferência

$$\begin{aligned} E_1^* E_2 = & |C|^2 \sum_n \sum_{n'''} \sqrt{\tilde{W}(k_{\perp 1}, \theta_n) \tilde{W}(k_{\perp 2}, \theta_{n'''})} \exp[-i\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n) + i\varphi(k_{\perp 2}, \theta_{n'''})] \\ & \exp(-i\mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp + i\mathbf{k}_{\perp 2, n'''} \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp[-iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} + iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}], \end{aligned} \quad (5.23)$$

a repetição Talbot é produzida pelo termo de fase da interferência

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}_\perp, z) = & -\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n) + \varphi(k_{\perp 2}, \theta_{n''}) - \mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp + \mathbf{k}_{\perp 2, n''} \cdot \mathbf{r}_\perp \\ & - z\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} + z\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

e sabemos que uma exponencial imaginária tem o mesmo valor quando é somado  $2\pi$  a ela, isto se dá pela fórmula de Euler. Somando  $2\pi$  na exponencial da (5.24), temos que

$$\phi(\mathbf{r}_\perp, z_1) = \phi(\mathbf{r}_\perp, z_2) + 2m\pi, \quad (5.25)$$

onde  $m$  é um número inteiro, então

$$\begin{aligned} & -\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n) + \varphi(k_{\perp 2}, \theta_{n''}) - \mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp + \mathbf{k}_{\perp 2, n''} \cdot \mathbf{r}_\perp - z_1\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} \\ & + z_1\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2} = -\varphi(k_{\perp 1}, \theta_n) + \varphi(k_{\perp 2}, \theta_{n''}) - \mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp + \mathbf{k}_{\perp 2, n''} \cdot \mathbf{r}_\perp \\ & - z_2\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} + z_2\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2} + 2m\pi. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Resolvendo

$$\begin{aligned} & -z_1\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} + z_1\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2} = -z_2\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} + z_2\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2} + 2m\pi \\ & -z_1[\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} - \sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}] = -z_2[\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} - \sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}] + 2m\pi \\ & z_2 - z_1 = \frac{2m\pi}{\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} - \sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Sabendo que  $k_{\perp 1,2} = \rho_{1,2}2\pi$  e que  $k \gg \rho_{1,2}$  temos

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= \frac{2m\pi}{\sqrt{k^2 - (2\pi\rho_1)^2} - \sqrt{k^2 - (2\pi\rho_2)^2}} \\ &= \frac{2m\pi}{k\sqrt{1 - (2\pi\rho_1/k)^2} - k\sqrt{1 - (2\pi\rho_2/k)^2}} \\ &= \frac{2m\pi}{k[1 - 1/2(2\pi\rho_1/k)^2] - k[1 - 1/2(2\pi\rho_2/k)^2]} \\ &= \frac{km}{\pi\rho_2^2 - \pi\rho_1^2}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Definindo que  $z_T = z_2 - z_1$  e que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , temos que

$$z_T = \frac{2m}{\lambda(\rho_2 - \rho_1)} \quad (5.29)$$

## 5.5 Autoimagem no padrão de correlação

Empregamos ergodicidade espacial para calcular a correlação de intensidade  $\Gamma$  e a densidade espectral cruzada  $W$  em termos de médias. Considerando que  $I = E^*E$  é a intensidade do padrão speckle e que  $\tilde{I} = \langle E^*E \rangle$  é o ensemble médio da intensidade do padrão de speckle, definimos a correlação de intensidade como uma média da convolução:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_\perp, z) = \left\langle \int_{\Omega} I(\mathbf{r}'_\perp, 0) I(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) d\mathbf{r}'_\perp \right\rangle = \int_{\Omega} \left\langle I(\mathbf{r}'_\perp, 0) I(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle d\mathbf{r}'_\perp. \quad (5.30)$$

Aplicando o teorema do momento de Reed (43), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_\perp, z) &= \int_{\Omega} \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0) E(\mathbf{r}'_\perp, 0) E^*(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) E(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle d\mathbf{r}'_\perp \\ &= \int_{\Omega} \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0) E(\mathbf{r}'_\perp, 0) \right\rangle \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) E(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle d\mathbf{r}'_\perp \\ &\quad + \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0) E(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0) E^*(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle d\mathbf{r}'_\perp \\ &= \int_{\Omega} I(\mathbf{r}'_\perp, 0) I(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) d\mathbf{r}'_\perp + \int_{\Omega} |W(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2 d\mathbf{r}'_\perp \\ &\propto A + |W(\mathbf{r}'_\perp, z)|^2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde  $W(\mathbf{r}_\perp, z) = \langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0) E(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \rangle$  é densidade espectral cruzada e  $A$  é uma constante que representa o background.  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_\perp, z)$  expressa a correlação de intensidade entre a intensidade no plano  $z = 0$  e a intensidade em outros planos para  $z > 0$ . O primeiro termo do lado direito da equação (5.31) é uma constante, e  $W$  no segundo termo, pode ser calculado seguindo a Eq. (8) na referência (42), assim

$$\begin{aligned}
W(\mathbf{r}_\perp, z) &= \left\langle E^*(\mathbf{r}'_\perp, 0)E(\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp, z) \right\rangle = \\
&\sum_n \{ \tilde{W}(k_{\perp 1}, \theta_n) \exp(i\mathbf{k}_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp(iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2}) \\
&+ \tilde{W}(k_{\perp 2}, \theta_n) \exp(i\mathbf{k}_{\perp 2, n} \cdot \mathbf{r}_\perp) \exp(iz\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}) \}. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Considerando o módulo quadrado da densidade espectral cruzada,  $|W(\mathbf{r}_\perp, z)|^2$ , a repetição Talbot é produzida pelo termo de fase da interferência:

$$\phi(\mathbf{r}_\perp, z) = k_{\perp 1, n} \cdot \mathbf{r}_\perp + z\sqrt{k^2 - k_{\perp 1}^2} - \mathbf{k}_{\perp 2, n} \cdot \mathbf{r}_\perp - z\sqrt{k^2 - k_{\perp 2}^2}. \tag{5.33}$$

Uma repetição Talbot ocorre quando  $\phi(\mathbf{r}_\perp, z') - \phi(\mathbf{r}_\perp, z) = 2m\pi$ , quando  $m$  é um número inteiro. Definindo  $\rho_i = k_{\perp i}/2\pi$  e considerando  $k \gg \rho_i$ , seguindo os mesmos passos da seção anterior nós obtemos o comprimento Talbot para correlação de intensidade, o qual coincide com o mesmo resultado para intensidade e que também coincide com o comprimento Talbot para interferência de feixes de Bessel coerentes estudado na seção 4.3 observado na equação (4.12) que trata do efeito Talbot em redes ópticas

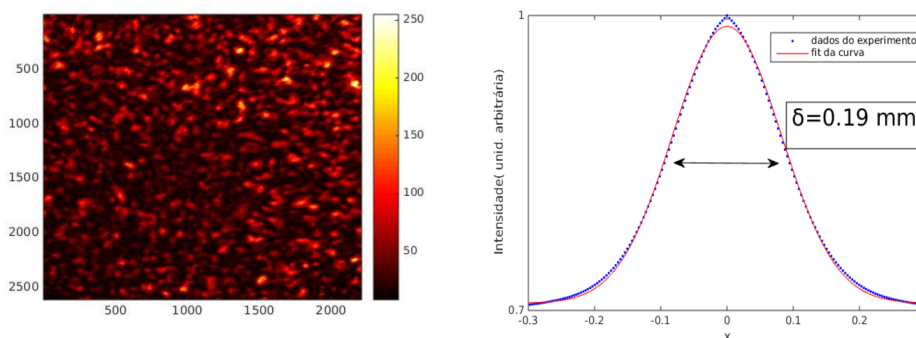
$$z_T = \frac{2m}{\lambda(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \tag{5.34}$$

## 5.6 Experimento

O setup experimental é mostrado esquematicamente na figura 5.2(a). O modelo do laser Finesse (Laser Quantum), operando a  $532\text{ nm}$ , é transmitido através de uma lente objetiva  $O$  de distância focal  $f_0 = 2,5\text{ mm}$ . O raio laser é transmitido através de um disco de vidro fosco ( $RGGD$ ), gerando feixes espacialmente incoerentes e que irá girar para mudar a região de espalhamento, a lente  $L_1$  de comprimento focal  $f_1 = 100\text{ mm}$  colima o feixe após o espalhamento na  $RGGD$ .

A luz espalhada pelo  $RGGD$  forma um campo de speckle gaussiano, pois a superfície  $RGGD$  em si pode ser modelada por um soma fasorial aleatória com estatística gaussiana (44). O comprimento de coerência é aproximadamente o tamanho do grão de speckle (45), que foi estimado realizando uma autocorrelação de intensidade do padrão de speckle medida após a lente  $L_1$ , a curva de autocorrelação possui um perfil Gaussiano cuja largura a meia altura fornece o tamanho médio de speckle, que corresponde ao comprimento de coerência espacial dos speckles, figura 5.1. A lente objetiva foi colocada a  $d = 3,0\text{ mm}$  do  $RGGD$  que corresponde a um campo de speckle com um comprimento de coerência espacial de  $\delta = 0,19\text{ mm}$ , que ilumina um modulador de luz espacial reflexivo ( $SLM$ ), modelo X10468-01 (Hamamatsu).

Figura 5.1: Padrão de speckle e sua correspondente autocorrelação.

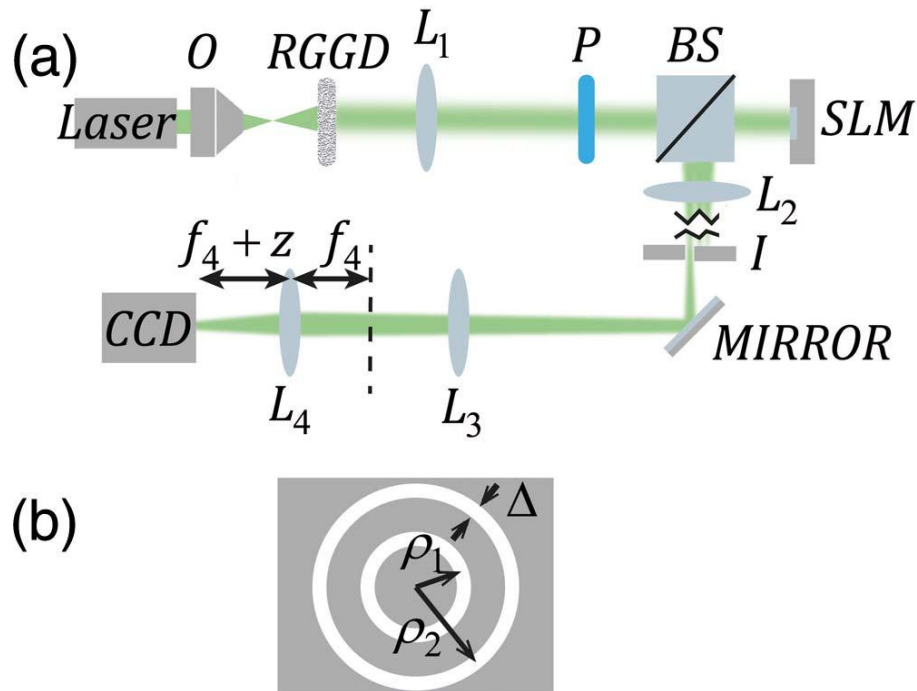


Fonte: Autor.

O  $SLM$  funciona apenas para uma polarização linear de luz, isto é, vertical ou horizontal e um polarizador  $P$  foi usado antes do  $SLM$  porque a luz espalhada pelo  $RGGD$  é despolarizado. Em um computador um holograma foi escrito no  $SLM$ , produzindo o efeito de um abertura constituída por duas fendas circulares concêntricas, conforme ilustrado na figura 5.16 (b). Para gerar este holograma, acabamos de multiplicar uma fase linear pela função de abertura. A função de abertura é 1 dentro e 0 fora da abertura,

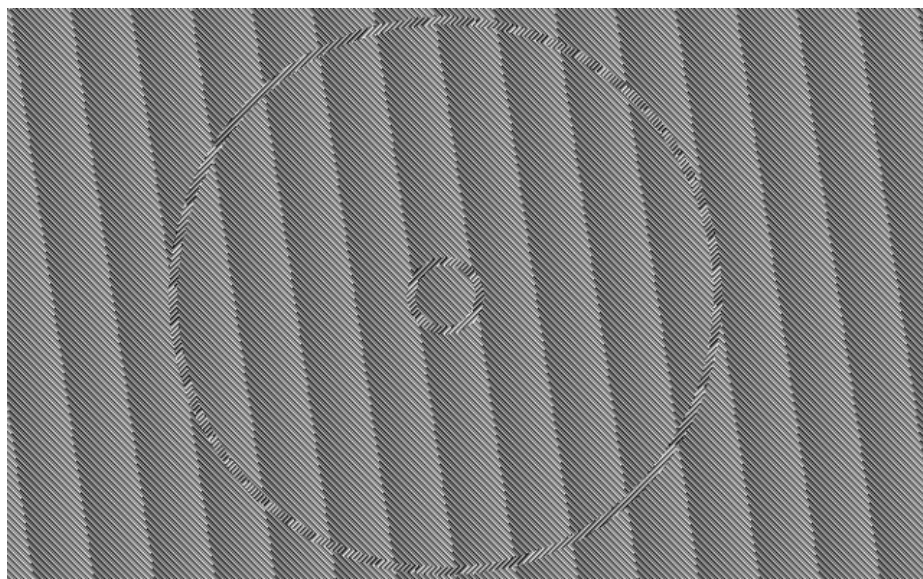
podemos ver o holograma na figura 5.3 para  $\rho_1 = 0,5 \text{ mm}$  e  $\rho_2 = 4 \text{ mm}$ , esses valores foram usados nos experimentos. O holograma foi gerado no Matlab, via rotina disponível no Apêndice B, salva em extensão BMP e utilizada no Modulador Espacial de Luz.

Figura 5.2: (a) Setup experimental:  $O$ , lente objetiva;  $L_i$ , lentes;  $RGGD$ , disco rotativo de vidro fosco;  $P$ , polarizador;  $BS$ , divisor de feixe;  $SLM$ , modulador espacial de luz;  $I$ , íris;  $CCD$ , câmera  $CCD$ . (b) Os dois sistemas de fenda circular escritos no SLM.  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são os raios das fendas e  $\Delta$  é a largura das fendas.



Fonte: Autor.

Figura 5.3: Holograma com parâmetros  $\rho_1 = 0,5 \text{ mm}$  e  $\rho_2 = 4 \text{ mm}$ .



Fonte: Autor.

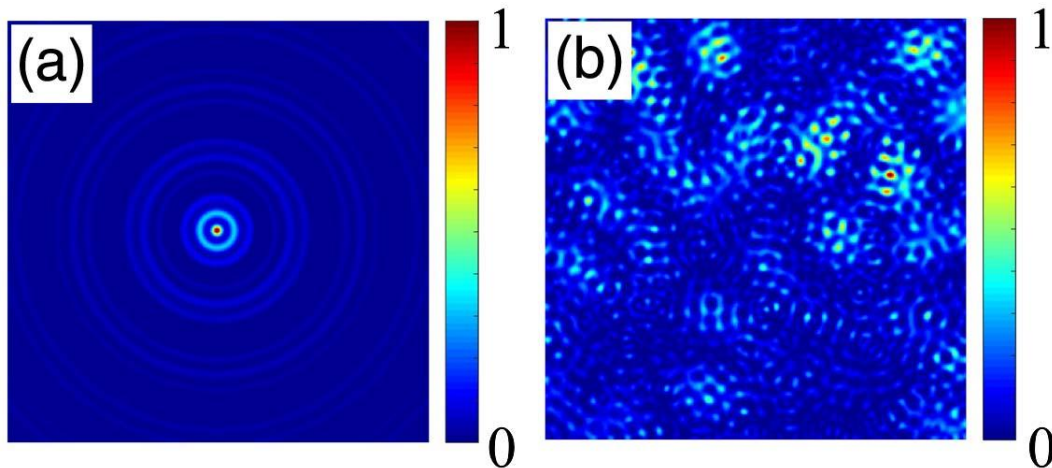


A largura das duas fendas foi de  $\Delta = 0,12 \text{ mm}$ . Uma íris ( $I$ ) foi colocada no plano focal da lente  $L_2$  de comprimento focal  $f_2 = 1000 \text{ mm}$  para selecionar a ordem de difração desejada. A  $L_3$  foi usada para projetar imagem do SLM na distância focal de  $L_3$  (46), que é  $f_3 = 300 \text{ mm}$ . Uma lente  $L_4$  foi usada para projetar a transformada de Fourier das duas fendas circulares em pontos perto da distância focal de  $f_4 = 100 \text{ mm}$ , produzindo a interferência de dois feixes de Bessel espacialmente coerentes de ordem zero. Devido a largura finita de fenda  $\Delta$ , os feixes de Bessel existirão apenas em uma região finita em torno da distância focal (11).

## 5.7 Resultados e discussão

A figura 5.4 apresenta o perfil transversal do campo  $E(\mathbf{r}_\perp, 0)$ , usando a fase espectral  $\varphi(k_{\perp i}, \theta_n)$  igual a 0 5.4(a) e tomando valores aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , 5.4(b). Para gerar diferentes padrões aleatórios, usamos diferentes conjuntos de valores para  $\varphi(k_{\perp i}, \theta_n)$ . O primeiro caso representa interferência de dois feixes Bessel coerentes, enquanto a segunda representa interferência de dois feixes de Bessel parcialmente coerentes.

Figura 5.4: Representação da intensidade do campo da equação em  $z = 0$ , para o caso onde a fase  $\phi(k_{\perp i}, \theta_n)$  é (a) zero e (b) quando é uma fase aleatória.

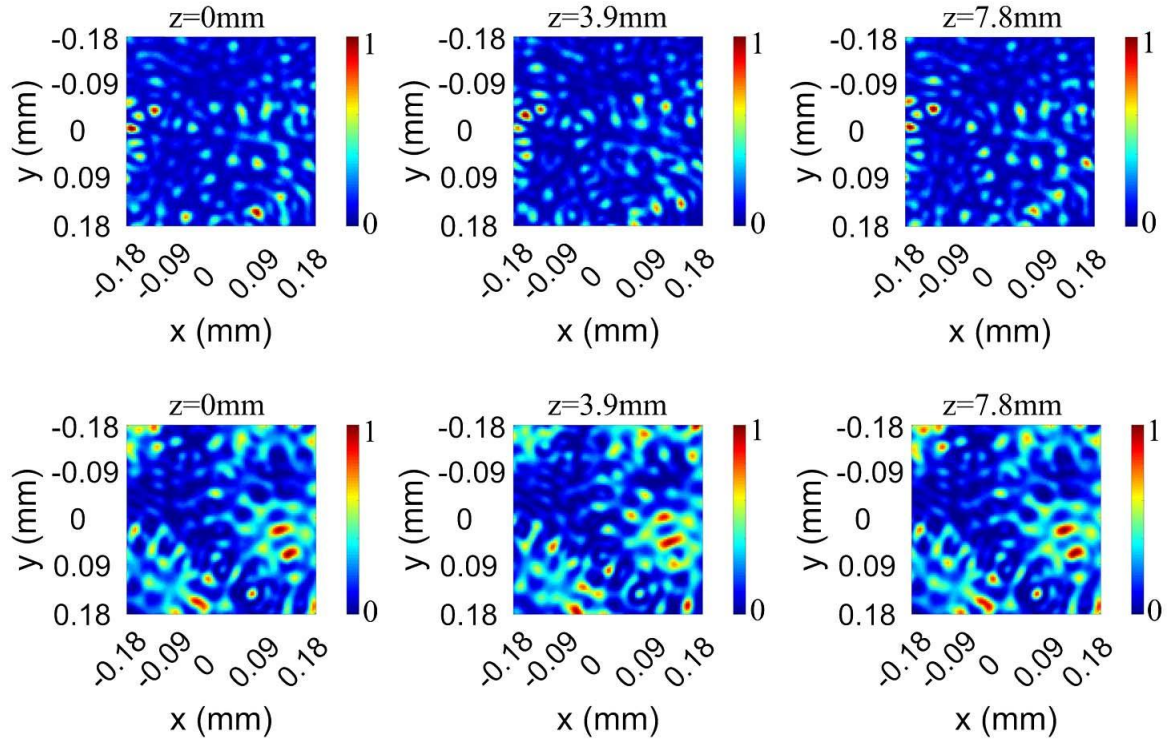


Fonte: Autor.

A figura 5.5 mostra padrões de intensidade para diferentes posições  $z$  a partir de resultados experimentais (primeira linha) e resultados teóricos (segunda linha) obtidos pelo módulo quadrado do campo da equação (5.18).



Figura 5.5: Resultados experimentais (primeira linha) e resultados teóricos (segunda linha) para o padrão de intensidade medido ao longo de diferentes distâncias de propagação longitudinal. É observado uma reptição Talbot com comprimento Talbot  $z_T = 7,8 \text{ mm}$ .



Fonte: Autor.

É fácil observar por inspeção visual na primeira linha da figura 5.5 o efeito Talbot com um comprimento Talbot em  $z_T = 7,8 \text{ mm}$ . As imagens são exibidas em  $z = 0$ ,  $z = z_T/2$ , e em  $z = z_T$ . É importante notar que o valor de  $z_T$  corrobora com os valores de  $\rho_1 = 0,5 \text{ mm}$  e  $\rho_2 = 4 \text{ mm}$  usados no SLM. Usando esses valores na equação (5.34) a fim de levar em conta os fatores de redimensionamento de lentes  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , alteramos  $\rho_i \rightarrow \rho_i(f_3/f_2)/\lambda f_4$  nas equações (1)-(8), nós obtemos  $z_T = 7,5 \text{ mm}$ , sendo um valor próximo ao obtido por inspeções visuais dos padrões de intensidade. Segue a abaixo o redimensionamento via operadores para análise de sistemas ópticos coerentes complexos

$$\begin{aligned}
& \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_2} \right] \mathcal{F} \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_3} \right] \mathcal{F} \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_4} \right] \mathcal{F} = \\
& \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_2} \right] \mathcal{F} \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_3} \right] \nu [\lambda f_4] \mathcal{F} \mathcal{F} = \\
& \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_2} \right] \mathcal{F} \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_3} \right] \nu [-\lambda f_4] = \\
& \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_2} \right] \mathcal{F} \nu \left[ \frac{-\lambda f_4}{\lambda f_3} \right] = \\
& \nu \left[ \frac{1}{\lambda f_2} \right] \nu \left[ \frac{-f_3}{f_4} \right] \mathcal{F} = \\
& \nu \left[ \frac{-f_3}{\lambda f_4 f_2} \right] \mathcal{F} \\
& \nu [-M] \mathcal{F},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

sendo  $M$  o operador de redimensionamento temos que

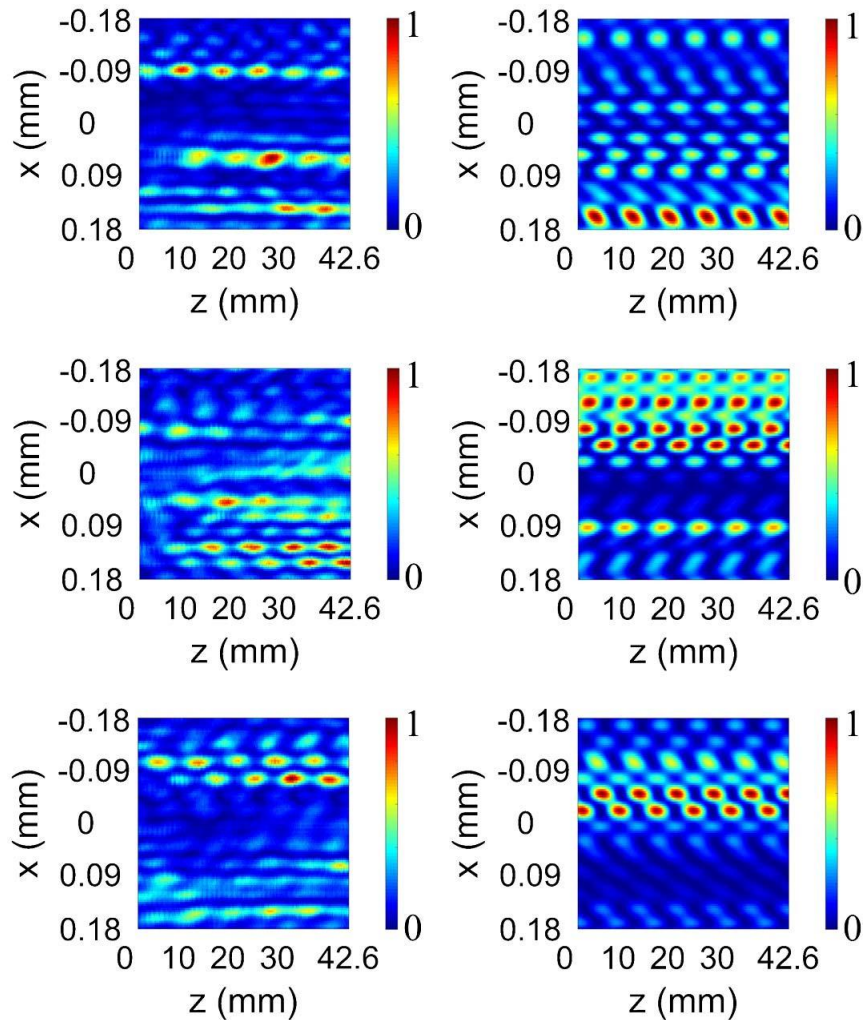
$$M = (f_3/f_2)/\lambda f_4 \tag{5.36}$$

Os perfis de intensidade foram adquiridas pelo deslocamento da *CCD* para posições  $z$  mostradas em cada padrão de intensidade aleatório na figura 5.5. O feixe do laser foi espalhado por um mesmo ponto da *RGGD*, isto é, foi fixado para todas as medidas mostradas na primeira linha na figura 5.5. E a segunda linha como foi citado anteriormente mostra resultados teóricos obtidos pelo módulo quadrado do campo na equação (5.18). Para entender esse efeito, nós observamos que a aleatoriedade vem do parâmetro  $\phi(k_{\perp i}, \theta_n)$  na equação (5.16). Sem a fase aleatória  $\phi(k_{\perp i}, \theta_n)$ , o campo na equação (5.16) são apenas dois feixes de Bessel coerentes e interferentes formados por um conjunto infinito de ondas planas cujos vetores de ondas estão em dois cones diferentes (11, 29).

Para destacar a aleatoriedade deste efeito Talbot, a figura 5.6 mostra no plano  $xz(y = 0)$  cortes dos padrões de intensidade medidos ao longo da propagação (primeira coluna). Cada padrão experimental foi construído com o *RGGD* mantido fixo enquanto a câmera *CCD* foi movida em passos de 0,1 mm para capturar  $z$  posições ao longo da propagação. Os padrões de intensidade medidos são exibidos em diferentes linhas na primeira coluna da figura 5.6 e foram obtidos a partir de diferentes pontos espalhados pela *RGGD*. A segunda coluna na figura 5.6 mostra os resultados teóricos obtidos a

partir do módulo quadrado módulo da equação (5.18).

Figura 5.6: Resultados experimentais (primeira coluna) e resultados teóricos (segunda coluna) para o padrão de intensidade ao longo do plano  $y = 0$  e diferentes distâncias de propagação  $z$ . Cada padrão corresponde a uma realização diferente do efeito aleatório Talbot.



Fonte: Autor.

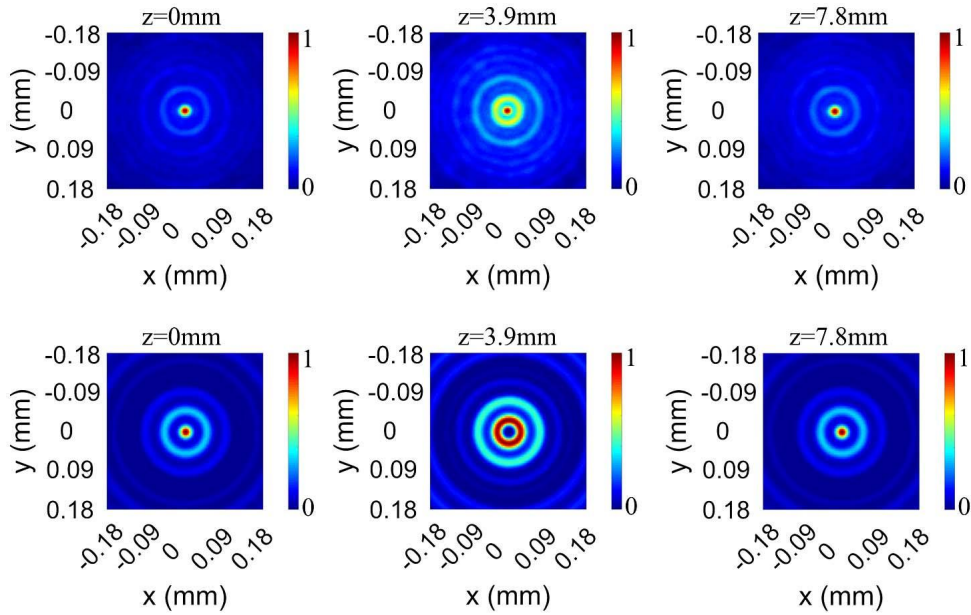
É interessante notar que, apesar de cada padrão de intensidade ser aleatório, um claro efeito Talbot aleatório com um comprimento de Talbot de  $z_T = 7,8 \text{ mm}$  é observado. Observe que, embora os padrões sejam transversalmente aleatórios, um único padrão é periódico ao longo da propagação com um período igual a  $z_T$ . Interessante, também é o fato de que a decomposição do campo speckle em termos de ondas planas nos permitiu modelar analiticamente a difração de campos espacialmente incoerentes por duas fendas circulares.

A propagação da densidade espectral cruzada para campos parcialmente incoerentes podem ser calculados analiticamente usando a decomposição em termos de ondas planas. Para comparar resultados experimentais e teóricos para o módulo da densidade

espectral cruzada, utilizamos os padrões de intensidade aleatórios em diferentes posições ao longo de  $z$ , para um ponto espalhador fixo na RGGD, para assim calcular as correlações de intensidade.

Depois de medir todos os padrões aleatórios de intensidade, realizamos numericamente a correlação usando equação (5.30). O padrão de intensidade de referência foi indicado na posição  $z = 0$  e foi correlacionado com os demais padrões para  $z > 0$ . Repetimos este procedimento para 300 pontos espalhadores da RGGD, de tal forma que podemos, ao final, executar uma média sobre as 300 medidas. As medidas de correlação de intensidade são mostradas na primeira linha da figura 5.7.

Figura 5.7: Resultados experimentais (primeira linha), para correlação de intensidade, e resultados teóricos (segunda linha) para o módulo quadrado da densidade espectral cruzada  $|W|^2$  mostrando o efeito Talbot.



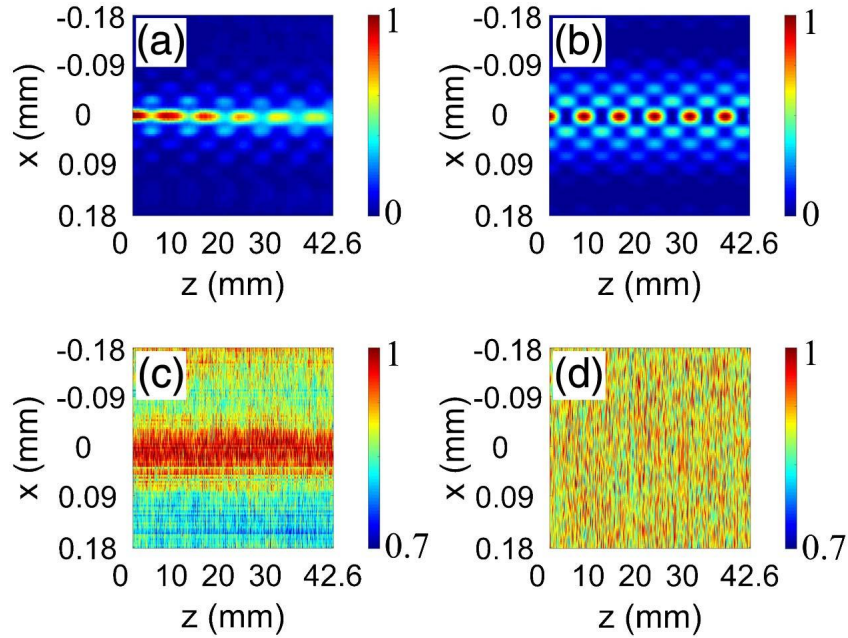
Fonte: Autor.

Um efeito típico de Talbot também é observado com  $z_T = 7,8 \text{ mm}$ . A segunda linha da figura 5.7 apresenta os resultados teóricos para o módulo quadrado da densidade espectral cruzada,  $|W(\mathbf{r}_\perp, z)|^2$  obtido da equação 5.32 e é possível observar pontos brilhantes e escuros de forma alternada no centro, no entanto, nos resultados experimentais mostrados na primeira linha em  $z_T/2$ , o módulo quadrado da densidade espectral cruzada não é zero no centro e isso se deve ao background.

A figura 5.8(a) mostra cortes  $xz(y = 0)$  para a correlação de intensidade medida ao longo da propagação e movendo a câmera CCD em passos de  $0,1 \text{ mm}$ . Neste resultado, realizamos uma subtração do background em cada posição ao longo da propagação

seguindo o algoritmo na referência (47). Pode-se observar claramente um decaimento da correlação ao longo da propagação na figura 5.8(a), este decaimento é devido ao tamanho finito da abertura utilizada no experimento (11). A densidade espectral cruzada teórica dos feixes de Bessel espacialmente incoerentes não é quadrado integrável, ele tem energia infinita, que é equivalente a um feixe produzido pela difração através de uma fenda delta circular de Dirac. A realização da versão experimental tem energia finita e apresenta o efeito Talbot apenas em uma faixa longitudinal finita.

Figura 5.8: Resultados experimentais normalizados (coluna esquerda) e resultados teóricos (coluna direita). [(a), (b)] Módulo quadrado da densidade espectral  $|W|^2$ . [(c), (d)] média espacial da intensidade  $I$ .



Fonte: Autor.

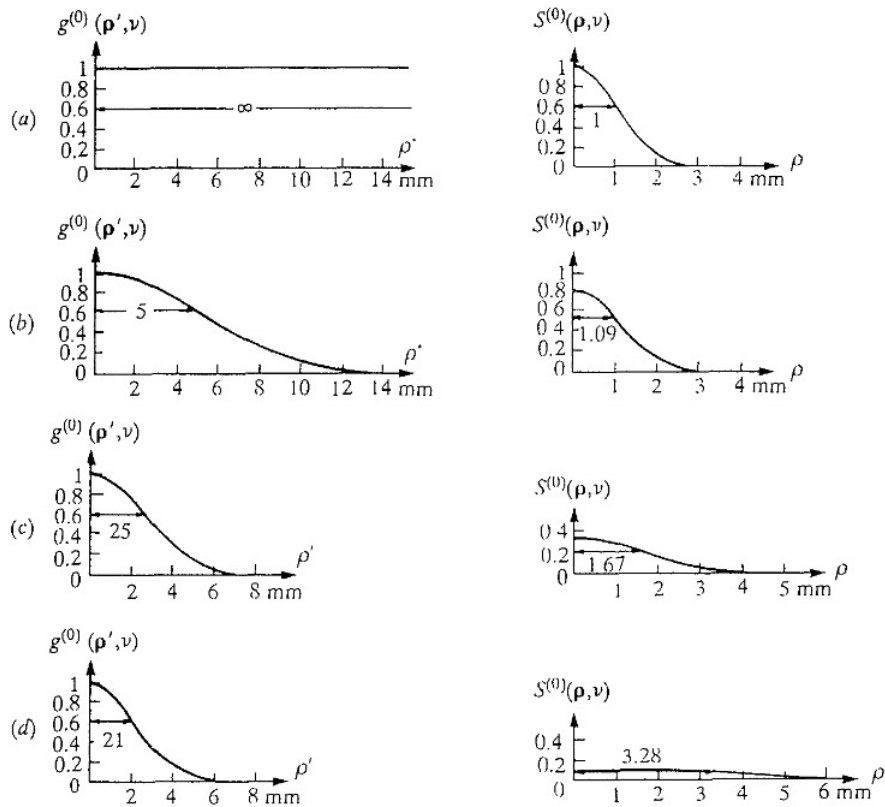
A densidade espectral cruzada teórica mostrada na figura 5.8(b) foi obtido da equação (5.32). O comprimento Talbot teórico e experimental tem resultado próximo de  $z_T = 7,8 \text{ mm}$ . Foi medido [figura 5.8(c)] e calculado [figura 5.8(d)] sobre 300 padrões aleatório em cada posição  $z$  para obtenção da intensidade média experimentalmente e teoricamente. Interessante, destaca que a assinatura do efeito Talbot não foi observada.

O background pode até não ser constante como em equação (5.31), mas gaussiana, para o caso de um campo não homogêneo (23), isso acontece por que quando o feixe é espalhado na *RGGD* o espalhamento não é espacialmente homogêneo, de tal maneira que no centro da *RGGD* ocorre menos espalhamento, assim após passar pela *RGGD* temos na região central maior grau de corência fazendo com que a distribuição de densidade es-



pectral (média espacial da intensidade) tenha uma distribuição gaussiana, como podemos ver na figura 5.9.

Figura 5.9: O grau de coerência espectral  $g^{(0)}(\rho', \nu)$ , (primeira coluna) e a distribuição de densidade espectral, (primeira coluna) e a distribuição de densidade espectral  $S^{(0)}(\rho, \nu)$  (segunda coluna). As curvas em (a) pertence a uma fonte completamente coerente ( espacial) e a curva (d) a uma fonte quase coerente.



Fonte: Retirado de (23).

Dessa forma, a média espacial da intensidade não é constante, mas Gaussiana, como mostrado na figura 5.8(c).

Se o campo produzido por um *RGGD* tem uma fase distribuída uniformemente no intervalo  $[-\pi, \pi]$  enquanto a amplitude é dada pela distribuição de Rayleigh. Consequentemente, a intensidade obedece a distribuição exponencial de probabilidade (44), enquanto que a intensidade média é constante. Portanto, se simplesmente executarmos uma média das diferentes medidas do padrão de intensidade, tendemos a obter um valor constante sobre o espaço [ver figura 5.8(c) e (d)]. Isto acontece porque os valores de intensidade para diferentes padrões flutuam aleatoriamente, com uma distribuição probabilidade exponencial, de uma medida para outra.

## 5.8 Conclusão

O uso da decomposição em ondas planas de campos espacialmente aleatórios nos permitiu obter um resultado analítico para a propagação da densidade espectral cruzada da interferência feixes Bessel parcialmente coerentes, sendo abordado em outras aplicações menos intuitivas (48). No entanto, este tratamento implica em uma abertura com largura infinitesimal diferente da largura da abertura finita no experimento, embora o comprimento Talbot obtido esteja de acordo o obtido no experimento.

Os resultados experimentais para a correlação de intensidade concorda qualitativamente com o apresentado pelos resultados analíticos na região de existência dos feixes de Bessel. Ainda não há resultado analítico para fenda com largura finita mesmo para o caso de feixe espacialmente coerente (11). Verificamos que a frequência espacial do módulo quadrado da densidade espectral cruzada, figura 5.7 e o comprimento de Talbot, equação (5.34), dependem apenas do espectro de potencia espacial,  $\tilde{W}(k_{\perp i}, \theta_n)$ , que é o campo cruzando as fendas circulares. O efeito Talbot surge de uma interferência entre dois conjuntos de ondas planas, ou seja dos dois anéis. Cada conjunto de ondas planas formam um campo não-difrativo como na referência (12). Aqui, o espalhamento difrativo é suprimido porque a mesma componente longitudinal do vetor de onda  $k_z$  está associada a cada vetor de onda transversal  $\mathbf{k}_{\perp i, n}$ . Isso é equivalente dizer que todas as ondas planas viajam ao longo de um cone de luz e que o espectro angular forma um anel. Portanto, não importa se uma fase bem definida foi adicionada a cada onda plana ao longo do anel, ou como no presente caso, uma fase aleatória foi adicionada a cada onda plana no cone de luz.

Estas fases não têm efeito no comprimento de Talbot  $z_T$ , que depende apenas do vetor de onda transversal de cada conjunto de ondas planas. Esses resultados podem ser úteis para a inscrição de padrões aleatórios periódicos em 3D por meio da gravação por fotopolimerização a laser (49) ou pela inscrição não-linear de padrões aleatórios periódicos 3D em materiais fotosensíveis (38).

## Conclusões e Perspectiva

Nesta tese procuramos dar uma contribuição no estudo do efeito Talbot. Neste sentido, investigamos o efeito da auto imagem na propagação da interferência de feixes Bessel coerentes (redes ópticas com cargas topológicas) e parcialmente coerentes. O capítulo 2 foi dedicado a teoria de coerência e função de correlação, que serve como base teórica para o entendimento do efeito Talbot para feixes Bessel parcialmente coerente.

No capítulo 3 iniciamos com uma breve introdução sobre feixes não difratantes. Analisamos o efeito Talbot ao longo da propagação da interferência dois feixes de Bessel coerentes concluindo que a ocorrência do efeito Talbot para superposição de feixe Bessel, é possível teoricamente dando assim um amparo maior para realizarmos o nosso trabalho.

No capítulo 4 iniciamos com uma introdução sobre redes ópticas com carga topológica e sua transformada de Fourier. E vimos que ao alterar as frequências espaciais também é alterada a formada rede, assim como ao aumentarmos o número de ondas planas interferindo entre si a rede óptica tende a virar um feixe Bessel.

No capítulo 5 estudamos a estrutura de campo parcialmente coerente e como representá-lo em modos coerentes. Dessa forma foi possível explicarmos o efeito Talbot para feixes Bessel parcialmente coerentes mostrando que é possível um modelo analítico para propagação da densidade espectral cruzada para interferência de dois feixes Bessel parcialmente coerentes.

Ao explorar-mos teoricamente e experimentalmente o efeito Talbot em redes óticas com carga topológica no capítulo 6 concluímos que comprimento Talbot não depende da carga topológica, mas depende apenas da frequência espacial transversal. Mostramos que a quantidade de ondas planas não tem efeito sobre a periodicidade das auto imagens,



---

ou seja, podemos ter efeito de auto imagem com poucas ondas planas.

O uso da decomposição em ondas planas de campos espacialmente aleatórios no capítulo 5 nos permitiu obter um resultado analítico para a propagação da densidade espectral cruzada da interferência feixes Bessel parcialmente coerentes. E os resultados experimentais para a correlação de intensidade concorda qualitativamente com o apresentado pelos resultados analíticos na região de existência dos feixes de Bessel. Verificamos que a frequência espacial do módulo quadrado da densidade espectral cruzada, figura 5.7 e o comprimento de Talbot, equação (5.34), dependem apenas do espectro de potência espacial,  $\tilde{W}(k_{\perp i}, \theta_n)$ , que é o campo cruzando as fendas circulares.

Observamos que os resultados do capítulo 4 e 5 no que tange a frequência do efeito de auto imagem são os mesmos e podem ser explicados por que efeito Talbot quando surge na correlação de intensidade (no caso parcialmente coerente) pelo teorema dos momentos de Reed (43) a correlação de campos de quarta ordem recupera a correlação de segunda ordem que por sua vez recupera os mesmos resultados do campo coerente (no caso das redes ópticas).

Portanto, não importa se uma fase bem definida foi adicionada a cada onda plana ao longo do anel no caso de feixes Bessel coerentes, ou como no caso de feixes Bessel parcialmente coerentes onde uma fase aleatória foi adicionada a cada onda plana no cone de luz. Estas fases não têm efeito no comprimento de Talbot  $z_T$ , que quando temos  $\rho_1$  e  $\rho_2$  fixos, depende apenas do comprimento de onda transversal de cada conjunto de ondas planas.

Como perspectiva para trabalhos futuros observamos que temos spots gaussianos uniformemente distribuídos em torno de alguns raios e fases com uma mudança constante entre os spots, simulando um feixe LG cruzando um pinhole, sendo que a periodicidade depende apenas da frequência espacial transversal, portanto, em um futuro trabalho em andamento, nós projetaremos esses estados de forma que o número, a posição angular e a fase dos spots iram produzir estruturas 3D periódicas desejadas nos estados da transformada de Fourier.

## Referências Bibliográficas

- 1 WEN, J.; ZHANG, Y.; XIAO, M. The talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics. *Advances in optics and photonics*, Optical Society of America, v. 5, n. 1, p. 83–130, 2013.
- 2 TALBOT, H. F. Lxxvi. facts relating to optical science. no iv. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 9, n. 56, p. 401–407, 1836.
- 3 PATORSKI, K. I the self-imaging phenomenon and its applications. In: *Progress in optics*. [S.l.]: Elsevier, 1989. v. 27, p. 1–108.
- 4 LUMER, Y. et al. Accelerating self-imaging: the airy-talbot effect. *Physical review letters*, APS, v. 115, n. 1, p. 013901, 2015.
- 5 CHATELLUS, H. G. de et al. Diffraction-induced bidimensional talbot self-imaging with full independent period control. *Physical review letters*, APS, v. 118, n. 13, p. 133903, 2017.
- 6 LOHMANN, A.; OJEDA-CASTANEDA, J. Spatial periodicities in partially coherent fields. *Optica Acta: International Journal of Optics*, Taylor & Francis, v. 30, n. 4, p. 475–479, 1983.
- 7 CLOETENS, P. et al. Fractional talbot imaging of phase gratings with hard x rays. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 22, n. 14, p. 1059–1061, 1997.
- 8 DURNIN, J.; JR, J. M.; EBERLY, J. Diffraction-free beams. *Physical review letters*, APS, v. 58, n. 15, p. 1499, 1987.
- 9 SUN, Y.; ZHANG, X. Unusual quantum talbot effect based on the orbital angular momentum of photons. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 6, p. 063851, 2016.
- 10 CHÁVEZ-CERDA, S. et al. Experimental observation of interfering bessel beams. *Opt. Express*, OSA, v. 3, n. 13, p. 524–529, Dec 1998. Disponível em: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-3-13-524>.
- 11 CHÁVEZ-CERDA, S.; MENESES-NAVA, M.; HICKMANN, J. M. Interference of traveling nondiffracting beams. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 23, n. 24, p. 1871–1873, 1998.

- 12 COTTRELL, D. M.; CRAVEN, J. M.; DAVIS, J. A. Nondiffracting random intensity patterns. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 32, n. 3, p. 298–300, 2007.
- 13 DUDLEY, A. et al. Controlling the evolution of nondiffracting speckle by complex amplitude modulation on a phase-only spatial light modulator. *Optics Communications*, Elsevier, v. 285, n. 1, p. 5–12, 2012.
- 14 WOLF, E. New theory of partial coherence in the space–frequency domain. part i: spectra and cross spectra of steady-state sources. *JOSA*, Optical Society of America, v. 72, n. 3, p. 343–351, 1982.
- 15 SALEH, B. E.; TEICH, M. C.; SALEH, B. E. *Fundamentals of photonics*. [S.l.]: Wiley New York, 1991. v. 22.
- 16 CORTÉS, L. R.; CHATELLUS, H. G. de; AZAÑA, J. On the generality of the talbot condition for inducing self-imaging effects on periodic objects. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 41, n. 2, p. 340–343, 2016.
- 17 MARAM, R. et al. Noiseless intensity amplification of repetitive signals by coherent addition using the temporal talbot effect. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 5163, 2014.
- 18 AZAÑA, J.; CHATELLUS, H. G. de. Angular talbot effect. *Physical Review Letters*, APS, v. 112, n. 21, p. 213902, 2014.
- 19 ZHANG, Y. et al. Fractional nonparaxial accelerating talbot effect. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 41, n. 14, p. 3273–3276, 2016.
- 20 UDEM, T.; OZAWA, A. Mode locking based on the temporal talbot effect. *Applied Physics B*, Springer, v. 123, n. 4, p. 100, 2017.
- 21 ZHANG, Y. et al. Nonlinear talbot effect of rogue waves. *Physical Review E*, APS, v. 89, n. 3, p. 032902, 2014.
- 22 BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. [S.l.]: Elsevier, 2013.
- 23 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- 24 RUDIN, W. *Real and complex analysis*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- 25 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: AAPT, 1999.
- 26 BECKER, J. et al. Systematic approach to complex periodic vortex and helix lattices. *Optics express*, Optical Society of America, v. 19, n. 10, p. 9848–9862, 2011.
- 27 BOGUSLAWSKI, M.; ROSE, P.; DENZ, C. Increasing the structural variety of discrete nondiffracting wave fields. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 1, p. 013832, 2011.
- 28 ARRIZÓN, V. et al. Periodic and quasi-periodic non-diffracting wave fields generated by superposition of multiple bessel beams. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 15, n. 25, p. 16748–16753, 2007.

- 29 ARRIZÓN, V. et al. Efficient generation of periodic and quasi-periodic non-diffractive optical fields with phase holograms. *Optics express*, Optical Society of America, v. 19, n. 11, p. 10553–10562, 2011.
- 30 XAVIER, J. et al. Tailored complex 3d vortex lattice structures by perturbed multiples of three-plane waves. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 51, n. 12, p. 1872–1878, 2012.
- 31 XAVIER, J. et al. Complex 3d vortex lattice formation by phase-engineered multiple beam interference. *International Journal of Optics*, Hindawi, v. 2012, 2012.
- 32 FERNANDEZ-VAZQUEZ, A.; MÉNDEZ, G. On the generation of optical fields satisfying the upper bound diffraction efficiency using phase holograms. *Optics Communications*, Elsevier, v. 301, p. 46–51, 2013.
- 33 GAO, Y. et al. Complex periodic non-diffracting beams generated by superposition of two identical periodic wave fields. *Optics Communications*, Elsevier, v. 389, p. 123–127, 2017.
- 34 WANG, Y. et al. Programmable holographic technique for implementing unitary and nonunitary transformations. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 3, p. 033827, 2017.
- 35 BERKHOUT, G. C.; BEIJERSBERGEN, M. W. Method for probing the orbital angular momentum of optical vortices in electromagnetic waves from astronomical objects. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 10, p. 100801, 2008.
- 36 NUSSENZVEIG, H. M. Física básica. *Ótica, Relatividade, Física Quântica*, 2004.
- 37 ÉMILE, O. et al. Energy and angular momentum transfers from an electromagnetic wave to a copper ring in the uhf band. *Comptes Rendus Physique*, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 137–143, 2017.
- 38 ZANNOTTI, A. et al. Chiral light in helically twisted photonic lattices. *Advanced Optical Materials*, Wiley Online Library, v. 5, n. 16, p. 1600629, 2017.
- 39 WOLF, E. A macroscopic theory of interference and diffraction of light from finite sources ii. fields with a spectral range of arbitrary width. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 230, n. 1181, p. 246–265, 1955.
- 40 MOISEWITSCH, B. L. *Integral equations*. [S.l.]: Courier Corporation, 2011.
- 41 RODRIGUES, J. S. et al. Talbot effect in optical lattices with topological charge. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 42, n. 19, p. 3944–3947, 2017.
- 42 NGUYEN, T. H.; MAJEED, H.; POPESCU, G. Plane-wave decomposition of spatially random fields. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 40, n. 7, p. 1394–1397, 2015.
- 43 REED, I. On a moment theorem for complex gaussian processes. *IRE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 194–195, 1962.
- 44 GOODMAN, J. W. *Speckle phenomena in optics: theory and applications*. [S.l.]: Roberts and Company Publishers, 2007.

- 
- 45 ALVES, C. R.; JESUS-SILVA, A. J.; FONSECA, E. J. Effect of the spatial coherence length on the self-reconfiguration of a speckle field. *Physical Review A*, APS, v. 94, n. 1, p. 013835, 2016.
- 46 AMARAL, J. P.; FONSECA, E. J.; JESUS-SILVA, A. J. Tailoring speckles with weibull intensity statistics. *Physical Review A*, APS, v. 92, n. 6, p. 063851, 2015.
- 47 CAO, A. et al. A robust method for automated background subtraction of tissue fluorescence. *Journal of Raman Spectroscopy: An International Journal for Original Work in all Aspects of Raman Spectroscopy, Including Higher Order Processes, and also Brillouin and Rayleigh Scattering*, Wiley Online Library, v. 38, n. 9, p. 1199–1205, 2007.
- 48 TURUNEN, J.; VASARA, A.; FRIBERG, A. T. Propagation invariance and self-imaging in variable-coherence optics. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 8, n. 2, p. 282–289, 1991.
- 49 SELIMIS, A.; MIRONOV, V.; FARSARI, M. Direct laser writing: Principles and materials for scaffold 3d printing. *Microelectronic Engineering*, Elsevier, v. 132, p. 83–89, 2015.

## Produção dos Hogramas para Redes Ópticas

```

units : mm
clear all
pix = 6.4 * 10-3;
N = 1080;
n = -N/2 : N/2 - 1; pixel indices for complex filter
x = n * pix;
[x, y] = meshgrid(x);
[teta, r] = cart2pol(x, y);
lamb = 532 * 10(-6);
kt1 = 50;
kt2 = 160;
pho1 = kt1/(2 * pi);
pho2 = kt2/(2 * pi);
Q = 5;
dt = 2 * pi/Q;
p1 = 1;
p2 = 2;
Q = 3, 4, 5; p1 = 1; p2 = 1, 2;
fun = zeros(size(x));
forn = 1 : Q

```

---

```

n = n - 1;
fun = fun + exp(1i * p1 * n * dt) .* exp(1i * 2 * pho1 * (x .* cos(n * dt) + y .* sin(n * dt))) + ...
exp(1i * p2 * n * dt) .* exp(1i * 2 * pho2 * (x .* cos(n * dt) + y .* sin(n * dt)));
end
fun = fun / max(abs(fun(:)));
figure
imagesc(abs(fun)); colormap gray
figure
imagesc(angle(fun))
k1 = 150;
PSH = exp(1i * (angle(fun))) .* exp(1i * angle(exp(1i * k1 * (x - y))));
circ = r < max(x(:));
imagesc(circ)
imagesc(abs(fftshift(fft2(circ .* exp(1i * (angle(fun))))), 3000, 3000)))
datt = input('press 1 to generate bmp :');
if datt == 1
g = zeros(1080, 1920);
holo = (angle(PSH) + pi) .* circ;
no = (1080 - N) / 2;
mo = (1920 - N) / 2;
g(no + 1 : 1080 - no, mo + 1 : 1920 - mo) = holo;
z = (g / (2 * pi)) * 254;
z = uint8(z);
name = input('name of bmp file :');
imwrite(z, name, 'bmp')
end

```

## Produção dos Hogramas para efeito de um abertura constituída por duas fendas circulares concêntricas

```

clearall
uo = 8;
vo = uo;
u1 = 10;
v1 = u1;
L1 = 16;
L2 = 12;
x = linspace(-L1/2, L1/2, 792);
y = linspace(-L2/2, L2/2, 600);
[x, y] = meshgrid(x, y);
[theta, r] = cart2pol(x, y);
carrier = 2 * pi * (uo * x + vo * y);
x1 = x * cos(2 * pi/4) + y * sin(2 * pi/4);
y1 = -x * sin(2 * pi/4) + y * cos(2 * pi/4);
carrier2 = 2 * pi * (u1 * x1 + v1 * y1);
Ld = 532 * 10(-6);
k = (2 * pi)/Ld;
f2 = 500;

```



```
ra = .5;
rb = 4;
w0 = .3;
d = .12;
SLa = (r > ra - d/2) .* (r < ra + d/2);
SLb = (r > rb - d/2) .* (r < rb + d/2);
BB = SLa + SLb; s = BB .* exp(i * 1.5 * carrier);
g = (angle(s)+pi) .* BB + (1-BB) .* (angle((1-BB) .* exp(-1i*2*carrier2))+pi);
z = (g/(2 * pi)) * 254;
z = uint8(z);
name = input('name of out file :');
imwrite(z, name, 'bmp')
```



# Talbot effect with partially coherent interfering Bessel beams

JOSÉ S. RODRIGUES,<sup>1,2</sup> EDUARDO J. S. FONSECA,<sup>1</sup> AND ALCENÍSIO J. JESUS-SILVA<sup>1,\*</sup> 

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas 57061-970, Brazil

<sup>2</sup>Instituto Federal do Piauí, Floriano, Piauí 64800-000, Brazil

\*Corresponding author: [alcenisio@fis.ufal.br](mailto:alcenisio@fis.ufal.br)

Received 12 February 2018; revised 8 March 2018; accepted 20 March 2018; posted 21 March 2018 (Doc. ID 323081); published 18 April 2018

We studied the free-space propagation of interfering partially coherent Bessel beams. The partially coherent superimposed Bessel beams were generated by diffracting a spatially incoherent light by two concentric circular slits. We observed a Talbot effect in the random intensity pattern and in the intensity correlation. We showed that the Talbot length depends only on the radii of the circular slits. We explained this effect on the basis of the plane-wave decomposition of spatially random fields. © 2018 Optical Society of America

**OCIS codes:** (030.1640) Coherence; (030.0030) Coherence and statistical optics; (050.1970) Diffractive optics; (070.6760) Talbot and self-imaging effects.

<https://doi.org/10.1364/AO.57.003186>

## 1. INTRODUCTION

It is well known that the Talbot effect produces periodic self-images at certain regular longitudinal distances through illumination of a periodic structure. Since its discovery by Henry Fox Talbot in the early nineteenth century [1], the Talbot effect has attracted considerable attention in different areas [2,3]; however, here we are concerned with the Talbot effect in optics. Even recently, this effect has driven interesting new research and applications. In the spatial domain, an accelerating self-imaging effect [4] and a diffraction-induced bi-dimensional Talbot self-imaging with full independent period control [5] were demonstrated. The Talbot effect has also been observed with pseudothermal light [6–8] and with quantum light [9–11], just to mention a few examples.

The Talbot effect has also been studied with interfering nondiffracting beams [12,13]. These nondiffracting beams are the so-called Bessel beams. Spatially incoherent Bessel beams have been reported to show the nondiffracting property [14,15]. However, no work has been reported showing the Talbot effect with interfering spatially incoherent Bessel beams. Therefore, in this work, we present a theory supported by experiments to explain this effect. We have shown that it is possible to analytically model the propagation of cross-spectral density for two interfering incoherent Bessel beams. To that end, we have used the plane-wave decomposition of cross-spectral density.

## 2. EXPERIMENT

The experimental setup is shown schematically in Fig. 1(a). A laser model Finesse (Laser Quantum), operating at 532 nm, is

transmitted through an objective lens  $O$  of focal length  $f_o = 2.5$  mm, mounted on a translation stage. The laser beam is transmitted through a rotating ground-glass disk (RGGD), generating speckled spatially incoherent beams. By longitudinally moving  $O$ , we can control the spot size of the beam on the RGGD, which actually controls the beam coherence length after collimating lens  $L_1$  of focal length  $f_1 = 100$  mm. The light scattered by the RGGD forms a Gaussian speckle field because the RGGD surface itself can be modeled by a random phasor sum with Gaussian statistic [16]. The spatial coherence length is roughly the speckle grain size [17], which was estimated by performing an autocorrelation of the speckle pattern intensity measured after lens  $L_1$ . The objective lens was placed at  $d = 3.0$  mm from the RGGD corresponding to a speckle field with a spatial coherence length of  $\delta = 0.19$  mm, which illuminates a reflective spatial light modulator (SLM), model X10468-01 (Hamamatsu). The SLM works only for a linear light polarization, i.e., vertical or horizontal, and, therefore, a polarizer,  $P$ , was used before the SLM because the light scattered by the RGGD is unpolarized. A computer-generated hologram was written in the SLM, producing the effect of an aperture consisting of two concentric circular slits as illustrated in Fig. 1(b). To generate this hologram, we have just multiplied a linear phase by the aperture function. The aperture function is 1 inside and 0 outside the aperture. The width of the two slits was  $\Delta = 0.12$  mm. An iris (I) was placed at the focal plane of lens  $L_2$  of focal length  $f_2 = 1000$  mm to select the desired diffraction order. Lenses  $L_2$  and  $L_3$  were used to project the SLM image at the focal distance of  $L_3$  [18], which is  $f_3 = 300$  mm. A lens  $L_4$  was used to project the Fourier transform

# Optics Letters

## Talbot effect in optical lattices with topological charge

JOSÉ S. RODRIGUES,<sup>1,2</sup> CAIO V. C. MENDES,<sup>1</sup> EDUARDO J. S. FONSECA,<sup>1</sup> AND ALCENÍSIO J. JESUS-SILVA<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas 57061-970, Brazil

<sup>2</sup>Instituto Federal do Piauí, Floriano, Piauí 64800-000, Brazil

\*Corresponding author: [alcenisio@fis.ufal.br](mailto:alcenisio@fis.ufal.br)

Received 27 July 2017; accepted 30 August 2017; posted 7 September 2017 (Doc. ID 303490); published 27 September 2017

**We studied the interference resulting from the superposition of optical lattices, which are non-diffracting fields propagating in free space, and showed a Talbot self-imaging effect. These lattices are formed by spatially Fourier transforming a “quasi”-orbital angular momentum (OAM) state. We experimentally observed that although the Talbot images change, the Talbot length is insensitive to the topological charge of the “quasi”-OAM state. Our findings can be useful for laser-written photonic lattices.** © 2017 Optical Society of America

**OCIS codes:** (050.0050) Diffraction and gratings; (050.1950) Diffraction gratings; (050.1970) Diffractive optics; (070.6760) Talbot and self-imaging effects.

<https://doi.org/10.1364/OL.42.003944>

The Talbot effect, also referred to as self-imaging, is a phenomenon characterized by the periodic repetition of planar field distributions in certain types of wave fields, such as acoustics [1,2], electrons [3], plasmons [4], x-ray [5,6], photons [7–9], and atomic [10]. The Talbot effect has found interesting applications in different areas. A nice review about this subject was published in [11]. In optics, it was proved that the Talbot effect is a consequence of the light diffraction after crossing a one-dimensional periodic structure with Talbot length expressed as  $z_T = d^2/\lambda$ . Here,  $d$  and  $\lambda$  are the period of the structure and the wavelength of the incident light, respectively.

Recently, the Talbot effect has been theoretically explored using orbital angular momentum (OAM) of entangled two photon states, showing that the Talbot length is insensitive to the topological charge (TC) [12], but to the best of our knowledge, this effect was not experimentally explored.

Non-diffracting beams or a finite number of plane waves have induced a great variety of two- or three-dimensional optical lattices in linear [13–20] and nonlinear media [21]. Therefore, in the context of non-diffractive optical fields, an optical lattice can be expressed by the superposition of  $Q$  plane waves of equal amplitude, whose propagation vectors have a common projection  $k_z$  respect to the  $z$  axis. The transverse component modulus of the propagation vectors  $k_T$  is also a

constant given by the identity  $k_T^2 = k^2 - k_z^2$ , where  $k = 2\pi/\lambda$  is the wave number. The projection of the propagation vectors of interfering waves to the  $xy$ -plane form angles, respect to the  $x$  axis, which are multiples of  $2\pi/Q$ . The spatial inverse Fourier transform of this field is precisely a “quasi”-OAM state [22], and this state can be approximately simulated by passing a Laguerre–Gaussian (LG) beam through a circular pinhole array [23]. This state is considered as a superposition of Gaussian beam spots radially dislocated from the center of the same amount with a certain azimuthal angle and a constant phase proportional to this angle [22].

In this paper, we explored the Talbot effect using a superposition of two optical lattices, which were generated by a superposition of two “quasi”-OAM states. We studied the Talbot effect by interfering “quasi”-OAM states with different moduli of the wave vectors and with different TC. Figure 1 illustrates the main idea of this paper. The first and the second column describe the intensity of the beam and its respective phase distribution. Figure 1(b) shows a set of pinholes superimposed with the beam, forming a “quasi”-OAM state. Figure 1(c) displays the superposition of two “quasi”-OAM states. The longitudinal propagation of the spatial spectrum of the field in Fig. 1(c) will present the Talbot effect. It is important to note that when extrapolating the number of pinholes to infinite in Fig. 1(b), a ring structure will be formed, and its spatial spectrum is the well-known Bessel beam, a non-diffracting beam [16].

Considering that the Gaussian spots in Fig. 1(c) are so small that they can be written as Dirac’s delta functions, the two interfering non-diffractive optical lattices field can be described as

$$f(x, y) = c \sum_{n=0}^{Q-1} \{ \exp(ip_1(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_1(x \cos(n\Delta\theta) + y \sin(n\Delta\theta))] + \exp(ip_2(n\Delta\theta)) \exp[i2\pi\rho_2(x \cos(n\Delta\theta) + y \sin(n\Delta\theta))] \}, \quad (1)$$

where  $\rho_{1,2} = k_{T,1,2}/2\pi$  are the spatial frequency and  $\Delta\theta = 2\pi/Q$ .  $p_{1,2}$  are integer numbers and represent the TC.