

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE FÍSICA

MODELO DE QUATRO FÉRMIONS E ANOMALIAS COM  
EXTENSÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ

RUBENS MARIO MOREIRA DA COSTA FILHO

Maceió

2019

RUBENS MARIO MOREIRA DA COSTA FILHO

MODELO DE QUATRO FÉRMIONS E ANOMALIAS COM  
EXTENSÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ

Tese apresentada no Instituto  
de Física da Universidade Federal de  
Alagoas, como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Doutor em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Tiago Mariz

Maceió

2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos - CRB-4 - 2062

- C837m Costa Filho, Rubens Mário Moreira da.  
Modelo de quatro férmions e anomalias com extensão de Horava-Lifshitz /  
Rubens Mário Moreira da Costa Filho. – 2019.  
111 f. : il.
- Orientador: Tiago Mariz.  
Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de  
Física. Maceió, 2019.
- Bibliografia: f. 100-111.
1. Modelo de Horava-Lifshitz. 2. Gravidade quântica. 3. Modelo de quatro  
férmions. 4. Eletrodinâmica quântica. I. Título.

CDU: 530.145



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL. Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**


*“Modelo de quatro férmions e anomalias com extensão de Hořava-Lifshitz”*


por

**Rubens Mário Moreira da Costa Filho**

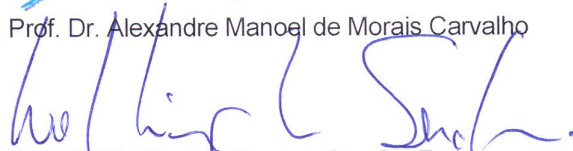
A Banca Examinadora composta pelos Tiago Homero Mariz do Nascimento (presidente da banca examinadora e orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Rodrigo de Paulo Almeida Lima, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Wellington Romero Serafim Freire, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, e Edilberto Oliveira Silva, Universidade Federal do Maranhão consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

Maceió, 4 de outubro de 2019

  
Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento

  
Prof. Dr. Rodrigo de Paulo Almeida Lima

  
Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho

  
Prof. Dr. Wellington Romero Serafim Freire

  
Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva

A DEUS E MINHA FAMÍLIA

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, aos meus pais (Rubens e Jeyne) e avó (Ednaura) que realizaram sacrifícios ao longo de toda a minha vida em prol da minha educação e juntamente com minha irmã, Mirella, deram-me todo o amor, compreensão e carinho.

A minha namorada, Hamyne, pelo apoio incondicional, felicidade e toda a motivação dados durante este período.

A todos os meus amigos, que certamente sabem quem são, mas evitarei citar nominalmente para evitar injustiças. Obrigado por toda ajuda e por tornarem mais leves os dias nesse árduo caminho.

Àqueles que, além de amigos, foram companheiros de grupo de pesquisa, Job, Fábio, Júlio e Jonathas, por cada risada, cálculo e conversa compartilhados.

A todos os professores que participaram da minha formação, em especial ao professor Tiago Mariz, meu orientador desde a graduação, sempre dedicado e paciente.

A todos os funcionários do IF-UFAL, indispensáveis na manutenção do desenvolvimento do nosso instituto.

E, por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

“Não convém a gente levantar escândalo de começo, só aos poucos é que o escuro  
é claro.”

*(Guimarães Rosa)*

# RESUMO

Nesta tese, estudamos o formalismo de Hořava-Lifshitz e sua aplicação em teorias quânticas de campos. Na primeira metade do texto, nós realizamos uma revisão de literatura sobre o modelo de Hořava de gravitação quântica e discutimos as vantagens básicas dessa proposta relacionadas com o método de escalonamento de Lifshitz. Em sequência, aplicamos este método a um modelo de quatro férmions de geração dinâmica do campo eletromagnético, onde mostramos a restauração da covariância, quando o expoente crítico  $z$  é igual a um, e o surgimento de uma quebra espontânea de simetria quando  $z = 3$ , até então inédita na literatura. Na segunda metade do presente trabalho, estudamos uma versão da eletrodinâmica quântica modificada pelo formalismo de Hořava-Lifshitz, com expoente de escalonamento de Lifshitz  $z = 3$ , através do método de expansão derivativa. Analisamos as correções radiativas e conseguimos com isso a geração da ação livre de Maxwell. Por fim, investigamos a possibilidade de surgimento da anomalia Adler Bell Jackiw (ABJ) nesta versão da eletrodinâmica quântica, também através de expansão derivativa.

**Palavras-chave:** Hořava-Lifshitz, Quebra de simetria, Modelo de quatro férmions, anomalia ABJ.



# ABSTRACT

In this thesis we studied the Hořava-Lifshitz formalism and its application to quantum field theories. In the first half of the text we performed a literature review about the Hořava model of quantum gravity and discuss the basic advantages of this proposition related with the Lifshitz scaling method. In sequence, we applied this method to a four fermion model of dynamical generation of the electromagnetic field, where we showed the restoration of covariance, when the critical exponent  $z$  is one, and the emergence of a spontaneous symmetry breaking when  $z = 3$ , still unpublished in the literature. In the second half of the present work we studied a version of the quantum electrodynamics modified by the Hořava-Lifshitz formalism, with Lifshitz scaling exponent  $z = 3$ , through the method of derivative expansion. We analyzed the radiative corrections and we got with this the generation of free Maxwell action. Lastly, we investigated the possibility of Adler Bell Jackiw (ABJ) anomaly arising in this version of quantum electrodynamics, also with derivative expansion.

**Keywords:** Hořava-Lifshitz, symmetry breaking, four fermion model, QED, ABJ anomaly.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>TEORIAS DO TIPO HOŘAVA-LIFSHITZ</b>	<b>9</b>
2.1	O formalismo de Hořava-Lifshitz . . . . .	9
2.2	Modelo para campo escalar na formulação de Hořava-Lifshitz	12
<b>3</b>	<b>MODELOS DE QUATRO FÉRMIONS</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução aos modelos de quatro férmions . . . . .	17
3.2	Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) . . . . .	19
<b>4</b>	<b>MODELO DE QUATRO FÉRMIONS COM EXTENSÃO DE HORAVA-LIFSHITZ</b>	<b>28</b>
4.1	Eletrodinâmica emergente de Bjorken . . . . .	28
4.2	Eletrodinâmica emergente com extensão de Hořava-Lifshitz	30
4.2.1	Potencial efetivo . . . . .	30
4.2.2	Expansão da ação efetiva . . . . .	43
4.2.3	Função de dois pontos . . . . .	44
4.2.4	Função de três pontos . . . . .	58
4.2.5	Função de quatro pontos . . . . .	59
<b>5</b>	<b>ANOMALIA ABJ NA EDQ COM EXTENSÃO DE HOŘAVA-</b>	

---

<b>LIFSHITZ</b>	<b>65</b>
5.1 Anomalia ABJ . . . . .	65
5.2 Correções quânticas para a EDQ com $z = 3$ . . . . .	67
5.3 Anomalia ABJ na EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$ . . . . .	83
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS</b>	<b>87</b>
<b>A IDENTIDADE DE WARD ANÔMALA</b>	<b>92</b>
<b>B DESLOCAMENTO DE VARIÁVEL EM INTEGRAL LINEAR- MENTE DIVERGENTE</b>	<b>96</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>100</b>

## LISTA DE FIGURAS

4.1	Amplitude de tadpole de $A_0$ ( $(\Pi^0)_z$ ) . . . . .	36
4.2	Potencial $V_{ef}(A^i)$ . . . . .	41
4.3	Autoenergia dos campos $A_0$ e $A_i$ ( $(\Pi^{00})_z + (\Pi^{0i})_z + (\Pi^{i0})_z + (\Pi^{ij})_z$ )	49
5.1	Representação diagramática das correções de segunda ordem	71
5.2	Forma geral da contribuição para a anomalia ABJ . . . . .	83
A.1	Gráficos triangulares $T^{\mu\nu\lambda}$ e $T^{\mu\nu}$ . . . . .	92

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O Modelo Padrão (MP) da Física de Partículas é o modelo teórico mais desenvolvido de que dispomos atualmente para a descrição das interações não gravitacionais entre partículas elementares. Sua acurácia tem sido provada desde o início do seu desenvolvimento, com resultados notáveis como a descoberta dos quarks (1969) [1,2] e do bóson de Higgs (2012) [3]. No entanto, apesar do seu indiscutível sucesso na comprovação dos mais diversos resultados experimentais, ele não é capaz de prover um entendimento satisfatoriamente completo das interações fundamentais da natureza, uma vez que não incorpora a gravitação e deixa em aberto a explicação de alguns fenômenos como a oscilação dos neutrinos, a matéria escura, a energia escura, a assimetria bariônica, entre outros.

Visando seu aperfeiçoamento, um dos recursos mais explorados no estudo do MP é a análise das suas simetrias, instrumento hoje crucial na física teórica, que se vale, juntamente com a teoria de grupos, do teorema de Noether para relacionar a cada simetria contínua em um sistema a conservação de uma grandeza. Na física, bem como nas artes, na matemática e outras áreas da ciência, a ideia de simetria sempre ocupou, ainda que implicitamente, um papel relevante.

Contudo, curiosamente, foi com o surgimento de estudos que incorporavam suas violações como propriedades básicas da natureza que esta questão começou a ganhar maior notoriedade. Entre esses estudos, podemos destacar o trabalho de Peter Higgs [4] (que em 1964 descreveu o processo de aquisição de massa por bósons de calibre como resultado de um mecanismo chamado de quebra espontânea de simetria, onde o estado fundamental de um determinado sistema não preserva uma simetria inicialmente presente em sua lagrangiana) e a teoria BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [5], que anos antes, em 1957, já empregava este mecanismo para explicar o fenômeno da supercondutividade. Mais recentemente, esta ideia passou a ser utilizada como base de modelos que se dispõem a complementar ou corrigir o MP, tratando violações de algumas simetrias, e.g., as simetrias de Lorentz e CPT, como manifestações observáveis no limite de baixas energias de efeitos associados a teorias fundamentais, como teorias de cordas [6, 7].

Uma interessante proposição nesse sentido, surgida em 2009, é o modelo de gravitação quântica de Petr Hořava [8], que busca solucionar os problemas da renormalizabilidade e da unitariedade, principais obstáculos para a construção desses tipos de teoria que se propõem a quantizar a gravitação. Este modelo é caracterizado por impor uma forte anisotropia na estrutura do espaço-tempo (escalonamento de Lifshitz), ideia originária de estudos de mecânica estatística feitos por E. Lifshitz [9] que tem como consequência direta a quebra explícita da simetria de Lorentz. Aqui, a teoria de cordas é tratada como uma continuação natural da teoria quântica de campos (TQC), sendo vista assim como um poderoso instrumento para a sua complementação.

A partir dessa proposta tem-se desenvolvido uma nova linha de pesquisa focada no estudo de campos não gravitacionais no contexto anisotrópico de Hořava-

---

Lifshitz (HL), com trabalhos dedicados à sua implementação através tanto de extensões de teorias inicialmente isotrópicas [10–12], quanto de generalizações de teorias já bem estabelecidas com a formatação de espaço-tempo usual, como a eletrodinâmica quântica (EDQ) [13, 14]. Entre as extensões encontramos ainda versões do tipo HL para teorias de campos escalares [15], teorias de calibre [16], modelo  $CP^{n-1}$  [17], entre outras, que ajudam a compor generalizações de Hořava-Lifshitz para a EDQ, como as supracitadas.

As investigações acerca de teorias quânticas de campos do tipo HL já contam com boa atenção na literatura. Isto se deve, em parte, às promissoras perspectivas oferecidas por seu análogo gravitacional e, em parte, a características importantes deste tipo de teorias, como a capacidade de melhoria do comportamento ultravioleta (UV), decorrente da incorporação da anisotropia de Lifshitz. O que torna o escalonamento de Lifshitz um interessante instrumento para análise de violações de simetria de Lorentz, por exemplo. Além disso, o uso dessa formulação já apresenta alguns resultados importantes, como a prova da renormalizabilidade de modelos de campo escalar tipo HL [13–15], a restauração da covariância de Lorentz no limite de baixas energias na EDQ com  $z = 2$  [18], o cálculo do potencial efetivo em diferentes teorias escalares do tipo HL e teorias tipo Yukawa e Eletrodinâmica Quântica, incluindo o caso de temperatura finita [19–22] e o cálculo explícito de contra-termos na EDQ do tipo HL [16, 23].

Deste modo, nesta tese, pretendemos estudar o emprego do escalonamento de Lifshitz em teorias quânticas de campos e alguns dos efeitos dessa modificação. Inicialmente, analisamos uma versão não covariante de um modelo de quatro férmions desenvolvido por James Bjorken [24], que objetivava sugerir uma origem dinâmica para o campo eletromagnético, apresentando o fóton como resultado

---

de interações fermiônicas. Para diferentes valores ímpares do expoente crítico dinâmico  $z$ , que mede o grau de anisotropia entre espaço e tempo, calculamos correções quânticas de um *loop* e, com isso, tecemos análises sobre o potencial efetivo, violação espontânea de simetria e recuperação da covariância de Lorentz, tendo como referência, para fins de comparação, o modelo original desenvolvido em um espaço de Minkowski isotrópico convencional. Além disso, abordaremos ainda uma extensão de Hořava-Lifshitz da eletrodinâmica quântica, com  $z = 3$ , na qual através de correções radiativas tratamos, entre outras questões, da possibilidade de surgimento da anomalia ABJ.

O próximo capítulo traz uma introdução sobre o tema do formalismo de Hořava-Lifshitz. Na sua primeira seção, discutimos a teoria de gravitação de Hořava, que é o contexto original de emprego deste formalismo, abordando o problema do surgimento de campos fantasmas de Ostrogradsky e como este método visa evitá-los. Nesta mesma seção é tratada ainda a questão da suavização do comportamento ultravioleta na gravitação, um dos sucessos mais importantes desta proposta de gravitação quântica. Na seção seguinte, utilizamos um campo escalar como exemplo para discutir alguns dos principais benefícios trazidos pela utilização deste formalismo na teoria quântica de campos.

No terceiro capítulo, realizamos uma resumida exposição sobre modelos de quatro férmions, mostrando alguns dos modelos mais destacados desta categoria, citando algumas das suas diversas aplicações, mas com maior atenção para o modelo NJL, assunto da segunda seção do capítulo.

No capítulo seguinte apresentamos nosso trabalho de generalização de um modelo de quatro férmions via escalonamento de Lifshitz [25], mostrando como esta alteração no modelo é capaz de dar origem a uma quebra espontânea de



simetria, assim como de gerar um termo cinético para os campos auxiliares do sistema.

O quinto capítulo concentra a parte do nosso trabalho dedicada à eletrodinâmica quântica de Hořava-Lifshitz. Nele calculamos correções quânticas para esta versão da EDQ com  $z = 3$ , usando o método da expansão derivativa, visando com isto a obtenção da ação livre de Maxwell e uma análise sobre a ocorrência da anomalia triangular neste cenário, que sucede uma rápida explanação sobre o assunto.

O capítulo 6 resume o nosso trabalho. Com ele expomos nossas conclusões e principais perspectivas futuras para os estudos realizados nesta tese. Por fim, após este capítulo, elaboramos o apêndice A, um exemplo de como calcular a contribuição anômala à identidade de Ward axial, introduzida no capítulo 5. E, como seu complemento, no apêndice B, temos um apêndice matemático para explicar o problema do deslocamento da variável de integração em uma integral linearmente divergente.

Durante todo o trabalho usamos unidades naturais, i.e.,  $\hbar = c = 1$  e a métrica com assinatura  $(+, -, -, -)$ .

# Capítulo 2

## TEORIAS DO TIPO

## HOŘAVA-LIFSHITZ

Neste capítulo, apresentamos resumidamente a proposta de gravitação quântica de Hořava-Lifshitz, com suas motivações e características básicas, bem como a ideia de espaço-tempo anisotrópico que fundamenta esta teoria e as principais consequências da sua adoção, tanto no contexto gravitacional, quanto em teorias quânticas de campos.

### 2.1 O formalismo de Hořava-Lifshitz

Nas últimas décadas a teoria de cordas se consolidou como a referência básica para a averiguação de problemas de gravitação quântica, oferecendo indícios de que pode ser capaz de responder a várias questões basilares da física atual, do paradoxo da informação à energia escura [26, 27]. Contudo, tamanha capacidade pode tornar uma tarefa complexa a sua utilização em certos casos. Isto torna razoável pensá-la como uma extensão da teoria quântica de campos, ao invés

de uma candidata a teoria única para a descrição do universo, para com isso se formular alternativas mais simples para a sua aplicação, visando, por exemplo, abordar problemas de gravitação quântica em (3+1) dimensões de maneira auto-contida. Tal estratégia já foi utilizada com a teoria de Yang-Mills, que embora tenha suas propriedades bem explicadas através da teoria de cordas, não precisa desta última para ser considerada uma teoria completa no contexto da teoria quântica de campos no regime ultravioleta (UV). Em analogia com Yang-Mills, Petr Hořava desenvolveu uma teoria para a gravitação quântica em (3+1) dimensões, derivada da teoria de cordas, com a vantagem de se basear em conceitos modernos da teoria de fenômenos críticos quânticos.

Um dos preceitos básicos objetivados no trabalho de Hořava é a solução do problema da renormalizabilidade da gravitação. Na gravitação de Einstein, com 3 dimensões espaciais e uma temporal, este problema está relacionado à dimensão de massa da constante de acoplamento gravitacional,  $[G_E] = -2$ . Adicionalmente, à medida que se segue para ordens mais altas na expansão de loop, os diagramas de Feynman da teoria passam a necessitar de contratermos de cada vez maior grau na curvatura, requerendo assim um melhoramento de comportamento ultravioleta (UV). Este melhoramento pode ser realizado através da introdução de correções relativísticas de derivadas de alta ordem na lagrangiana da teoria, o que irá alterar o propagador do gráviton da seguinte maneira

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_E k^4 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_E k^4 \frac{1}{k^2} G_E k^4 \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{1}{k^2 - G_E k^4}, \quad (2.1)$$

com o quadrimomento  $k_\mu = (\omega, -\vec{k})$ . Com esta modificação, no limite de altas energias, o termo  $1/k^4$  torna-se dominante e resolve o problema da divergência UV.

Contudo, este novo propagador descreve, além de um gráviton sem massa, uma excitação fantasma indesejada, conhecida como fantasma de Ostrogradsky [28,29],

$$\frac{1}{k^2 - G_E k^4} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - 1/G_E}, \quad (2.2)$$

conforme indicam os dois polos na função. Esta excitação extra, surgida em decorrência da adição de derivadas de ordem superior, impõe uma violação de unitariedade e, assim, impede que esta estratégia seja uma possível solução para o problema da gravitação quântica.

Uma alternativa para a suavização do comportamento UV da teoria, capaz de preservar unitariedade, é a adoção de um modelo com violação da simetria de Lorentz. Embora tal escolha pareça problemática, de acordo com a compreensão vigente nas últimas décadas, tempo e espaço devem ser quantizados para certo limite abaixo da escala de Planck e o espaço-tempo contínuo surgir como limite clássico da gravitação quântica [30]. Sendo assim, a invariância de Lorentz (IL), na condição de simetria contínua do espaço-tempo, poderia não existir na escala da mecânica quântica, emergindo somente em um limite de baixas energias. Com este argumento, Hořava assumiu como mais fundamental o conceito de tempo da mecânica quântica e decidiu construir uma teoria com quebra explícita da simetria de Lorentz no regime UV, mas capaz de recuperá-la no limite infravermelho (IV).

A opção pela quebra da invariância de Lorentz permitiu a adoção de um método comumente usado em estudos de sistemas de matéria condensada, conhecido como escalonamento de Lifshitz, em que se considera a existência de uma anisotropia entre espaço e tempo caracterizada por um expoente crítico  $z$  [9],

$$\vec{x} \rightarrow b\vec{x}, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (2.3)$$

Isto permite a inclusão na lagrangiana de operadores de derivada espaciais de alta ordem, visando melhoria de comportamento UV, mas ainda limitando derivadas temporais à segunda ordem, de modo a evitar o surgimento de campos fantasmas. Além disso, outra consequência desta consideração é o atrelamento de diversas propriedades básicas da teoria ao valor do expoente crítico  $z$ . Por exemplo, a condição para covariância de Lorentz é obtida com  $z = 1$ , ao passo que, na gravitação, sabemos que com a dimensão do espaço  $d = 3$  temos uma teoria renormalizável com  $z = 3$  e, para  $z = 4$ , ela será renormalizável com  $d = 4$  e super-renormalizável com  $d = 3$ .

Esta anisotropia se reflete ainda na dimensão de massa dos objetos da teoria,

$$[\vec{x}] = -1, [t] = -z, \quad (2.4)$$

sendo capaz de alterar a dimensão canônica inclusive da constante de acoplamento, o que explica a influência deste escalonamento sobre a condição de renormalização.

Em adição a estas propriedades já conhecidas, estudos recentes [31] mostram que em (2+1) dimensões a gravitação de Hořava apresenta liberdade assintótica, oferecendo uma interessante perspectiva futura de investigações nessa área em um cenário mais realístico em (3+1) dimensões.

## 2.2 Modelo para campo escalar na formulação de Hořava-Lifshitz

Em que pesem as limitações ainda presentes em seu atual estágio de desenvolvimento, a formulação de Hořava-Lifshitz para a gravitação é uma proposição

profícua e bem sucedida para questões como a suavização de comportamento UV. Isto tem fomentado um interesse crescente na exploração da possibilidade de um espaço-tempo dotado de uma estrutura anisotrópica não-relativística. Deste modo, a construção de teorias de campos, fora do contexto da gravitação, que incorporam o escalonamento de Lifshitz torna-se um processo natural, atualmente bem desenvolvido. Como exemplo deste tipo de aplicação da formulação de Hořava-Lifshitz, vamos estudar uma versão HL de um modelo para o campo escalar, buscando apresentar de maneira prática algumas das vantagens desta abordagem tratadas na seção anterior.

Partindo da sua ação, analisamos um modelo que trata campos escalares em  $(d + 1)$  dimensões,

$$S_E = \int \mathcal{L}_E d^d x_i dx_0, \quad (i = 1, 2, 3)^1 \quad (2.5)$$

em que, em função do escalonamento (2.3),

$$[d^d x_i dx_0] = -(z + d), \quad (2.6)$$

o que limita a  $z + d$  a dimensão da lagrangiana  $\mathcal{L}_E$ . A versão mais geral da ação (2.5), para o caso de um campo escalar livre, é [32, 33]

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^d x_j dx_0 \left\{ (\partial_0 \phi)^2 - \phi \left[ \sum_{i=1}^z \Lambda_i^{2(z-i)} \left( -\vec{\partial} \cdot \vec{\partial} \right)^i \right] \phi - m^{2z} \phi^2 \right\}, \quad (2.7)$$

com as dimensões  $[m] = [\Lambda_i] = 1$ . Definindo  $[(\partial_0 \phi)^2] = z + d$ , com o fim de evitar inconsistências advindas da presença de derivadas temporais de alta ordem, temos

---

<sup>1</sup>Índices latinos aqui representam coordenadas espaciais (e.g.,  $i=1,2,3$ ), ao passo que índices gregos incluem coordenadas temporais (e.g.,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ).

também

$$[\phi] = \frac{d - z}{2}, \quad (2.8)$$

uma vez que  $[\partial_0] = z$ . Assim, vemos que  $d = z$  torna o campo escalar  $\phi$  adimensional e garante a renormalizabilidade da teoria por contagem de potência. Neste cenário devemos ter também

$$[\partial_i \phi \partial_i \phi] = 2 \quad (2.9)$$

e poder, por esta razão, acrescentar à lagrangiana termos de até ordem  $2z$  nas derivadas espaciais, que para o caso não covariante de  $d > 1$  pode influir positivamente no comportamento UV.

O propagador do campo escalar desta teoria é

$$G(\omega, \vec{p}) = \frac{i}{\omega^2 - \sum_{i=1}^z \Lambda_i^{2(z-i)} p^{2i} - m^{2z} + i\epsilon}, \quad (2.10)$$

sendo  $\omega$  a frequência,  $\vec{p}$  o momento e, relacionando estas quantidades, temos a seguinte relação de dispersão:

$$\omega^2 = m^{2z} + \sum_{i=1}^z \Lambda_i^{2(z-i)} p^{2i}. \quad (2.11)$$

Limitando-nos aos primeiros termos do somatório, podemos reescrever a equação acima como

$$\omega^2 = m^{2z} + \Lambda_1^{2(z-1)} \vec{p}^2 + \Lambda_2^{2(z-2)} \vec{p}^4 + \dots \quad (2.12)$$

Se  $\Lambda_1^{2(z-1)} \neq 0$ , dividindo a expressão por  $\Lambda_1^{2(z-1)}$ , de modo a reescalonar a

frequência e a massa, chegamos a

$$\frac{\omega^2}{\Lambda_1^{2(z-1)}} = \frac{m^{2z}}{\Lambda_1^{2(z-1)}} + \vec{p}^2 + \frac{\Lambda_2^{2(z-2)}}{\Lambda_1^{2(z-1)}} \vec{p}^4 + \dots \quad (2.13)$$

Com o reescalonamento, definimos

$$\tilde{m} = \frac{m^z}{\Lambda_1^{z-1}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\Lambda_1^{z-1}} \quad (2.14)$$

e a relação (2.13) torna-se

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{m}^2 + p^2 + \frac{\Lambda_2^{2(z-2)}}{\Lambda_1^{2(z-1)}} p^4 + \dots \quad (2.15)$$

Esta relação pode ser entendida como uma modificação da dinâmica usual com simetria de Lorentz, mas com momentos de alta ordem que podem resultar de efeitos de gravitação quântica [32]. No limite infravermelho  $\vec{p}^2 \ll \Lambda_1^2$  e a relação de dispersão nesta região torna-se

$$\tilde{\omega}^2 \simeq \tilde{m}^2 + \vec{p}^2. \quad (2.16)$$

Este resultado mostra como, no limite  $z \rightarrow 1$ , a invariância de Lorentz é recuperada no regime IV. No caso mais extremo, no regime UV, a expressão (2.11) resultará na relação de dispersão

$$\omega^2 \simeq \vec{p}^{2z}, \quad (2.17)$$

que recupera o resultado covariante usual em  $z = 1$ .

Para observar o efeito desta formulação anisotrópica sobre a convergência



de integrais de loop, iremos inserir autointerações no nosso modelo de campo escalar, nos aproximando do tipo de sistema que iremos estudar nos próximos capítulos. Uma vez que o campo é adimensional, temos liberdade para introduzir termos de autoacoplamento do tipo  $\lambda\phi^n$ , bastando apenas que  $[\lambda] = 2z$ . Logo, assumindo por simplicidade, mas sem perda de generalização,  $z = d = 3$  e  $n = 4$ , teremos

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda\phi^4 \tag{2.18}$$

como o termo de interação do modelo e, por conseguinte, o diagrama com apenas um propagador fermiônico e sua correção como o único relevante. No espaço euclidiano este diagrama é proporcional a

$$\int \frac{d\omega d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 + m^6 + \Lambda_1^4 \vec{p}^2 + \Lambda_2^2 \vec{p}^4 + \vec{p}^6} \propto \int d\vec{p} \frac{\vec{p}^2}{(m^6 + \Lambda_1^4 \vec{p}^2 + \Lambda_2^2 \vec{p}^4 + \vec{p}^6)^{1/2}} \tag{2.19}$$

e, portanto, exibe divergência logarítmica. Ao contrário, em um modelo invariante de Lorentz, onde o diagrama supracitado seria proporcional a

$$\int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2}, \tag{2.20}$$

a integral seria quadraticamente divergente. Este resultado revela uma das mais destacadas características gerais de teorias do tipo Horãva-Lifshitz, que é a diminuição do grau de divergência das suas integrais de loop em comparação com seus análogos invariantes de Lorentz.

# Capítulo 3

## MODELOS DE QUATRO FÉRMIONS

Neste capítulo desenvolvemos uma breve introdução sobre os modelos de quatro férmions, com um pouco da sua história e principais características, focando-nos em aplicações para sistemas abelianos, embora muitos dos principais modelos dessa categoria sejam tratados atualmente como teorias efetivas para a cromodinâmica quântica.

### 3.1 Introdução aos modelos de quatro férmions

Modelos de quatro férmions são modelos teóricos que descrevem interações locais entre quatro campos fermiônicos e seus efeitos, e ocorrem naturalmente em várias extensões do Modelo Padrão, como parametrizações de baixa energia de teorias mais fundamentais, parametrizações válidas mesmo quando não renormalizáveis. Em alguns casos, esses modelos podem ter ainda sua renormalizabilidade alterada pela formação de estados ligados, caso haja a presença de uma cons-

tante de acoplamento suficientemente grande, que fazem com que as interações fermiônicas possam ser tratadas como se fossem mediadas por bósons e, assim, tornarem-se renormalizáveis perturbativamente [34].

Este tipo de interação tem importância no contexto da teoria quântica de campos principalmente em virtude da sua capacidade de geração do efeito de dinâmica emergente. Este é um poderoso instrumento para o estudo de processos físicos elementares, que permite a proposição de explicações para a gênese de diversas quantidades físicas, já tendo sido utilizado para sugerir mecanismos de origem dinâmica para o campo eletromagnético, a massa de férmions e bósons, entre outros fenômenos [35–39].

Os modelos de quatro férmions iniciais eram generalizações relativísticas da teoria BCS [5] e um dos primeiros desse tipo foi o de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [40, 41], apresentado como uma teoria para núcleons e mésons, mas que posteriormente, com o advento da Cromodinâmica Quântica (CDQ), passou a ser entendido como uma teoria efetiva para interações entre quarks [42]. Outro destacado modelo desta categoria é o de Gross-Neveu [43], desenvolvido com base no trabalho de Nambu e Jona-Lasinio. Como uma simplificação deste para (1+1) dimensões, ele foi concebido como um *toy model*<sup>1</sup> para a CDQ e conta atualmente com diversas generalizações úteis para o estudo de variados problemas da física de altas energias, como, por exemplo, a quebra dinâmica de paridade [44]. Contudo, o pioneiro entre os principais trabalhos que buscam explorar este tipo de acoplamento quártico é o modelo de Thirring [45], que foi desenvolvido para ser uma das mais simples possíveis teorias quânticas de campos solucionáveis exatamente e descreve a autointeração de um campo de Dirac em (1+1) dimensões.

---

<sup>1</sup>Modelo físico simplificado, a priori não realístico, utilizado para o estudo de aspectos específicos de problemas complexos.

Respeitando-se as dimensões características de cada um, todos esses modelos, para o caso de férmions sem massa, podem ser representados de maneira geral pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\not{\partial}\psi + G \sum_j (\bar{\psi}\Gamma_j\psi)^2, \quad (3.1)$$

dotada, respectivamente, de um termo cinético e um termo de autointeração entre férmions, com  $G$  sendo a constante de acoplamento própria de cada modelo e os demais parâmetros que lhes caracterizam dados pela Tabela 3.1

**Tabela 3.1: Parâmetros característicos das lagrangianas dos principais modelos de quatro férmions.**

	<b>j</b>	<b><math>\Gamma_1</math></b>	<b><math>\Gamma_2</math></b>
<b>NJL</b>	2	$I_4$	$i\gamma_5$
<b>Thirring</b>	1	$\gamma_\mu$	
<b>Gross-Neveu</b>	1	$I_4$	

Fonte: Autor, 2018.

Para além da física de altas energias, com espaço-tempo de dimensão  $d = 3$ , este tipo de abordagem é utilizado também na física da matéria condensada para modelar sistemas de estado sólido como supercondutores de altas temperaturas e grafeno [46], temas de grande relevância na atualidade, inclusive no cenário da física aplicada.

## 3.2 Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

O modelo de Nambu-Jona-Lasinio foi apresentado em 1961 em um artigo produzido conjuntamente por Yoichiro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio [40] e complementado ainda no mesmo ano com uma versão que incluía a quebra de simetria quiral, isospin e estranheza [41]. Trata-se de um modelo fermiônico não

renormalizável por contagem de potência, i.e., com constante de acoplamento de dimensão de massa negativa, mas que pode ser considerado uma teoria efetiva no limite de baixas energias para as interações fortes, derivável diretamente a partir da Cromodinâmica Quântica [42, 47–52].

A proposta inicial do artigo foi desenvolver uma teoria dinâmica de partículas elementares na qual núcleons<sup>2</sup> e mésons pudessem ser derivados de um campo espinorial fundamental de maneira unificada. A motivação para esta proposição foi a relação encontrada pelos autores entre algumas propriedades dos férmions de Dirac e excitações de quase-partículas surgidas na teoria BCS de supercondutividade. A característica básica deste tipo de sistema, conforme descreve a teoria BCS, é a existência de um *gap* de energia separando seus estados fundamental e excitado, uma consequência de interações atrativas entre elétrons, mediadas por fônons, que produzem pares correlacionados de elétrons com momentos opostos próximos da superfície de Fermi, os chamados pares de Cooper.

As excitações em supercondutores podem ser tratadas como misturas coerentes de elétrons e buracos e assim serem descritas, nas proximidades da superfície de Fermi, pelas equações

$$\begin{aligned} E\psi_{p+} &= \epsilon_p\psi_{p+} + \phi\psi_{-p-}^*, \\ E\psi_{-p-}^* &= -\epsilon_p\psi_{-p-}^* + \phi\psi_{p+}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aqui  $\phi$  é uma constante,  $\epsilon_p$  é a energia cinética medida a partir da superfície de Fermi,  $\psi_{p+}$  é a parte da excitação relacionada a um elétron de momento  $p$  e spin  $+$  (para cima) e  $\psi_{-p-}^*$  um buraco de momento  $p$  e spin  $+$ , o que pode

---

<sup>2</sup>O artigo original foi escrito anos antes da descoberta dos quarks em 1964 [53–55].

ser interpretado como a ausência de um elétron de momento  $-p$  e spin  $-$  (para baixo). Reordenando as expressões, com o determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equações (3.2), calculamos os autovalores de energia:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (\epsilon_p - E) & \phi \\ \phi & -(\epsilon_p - E) \end{vmatrix} &= 0, \\ -(\epsilon_p^2 - E^2) &= \phi^2, \\ E_p &= \pm(\epsilon_p^2 + \phi^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Estes autovalores mostram uma separação de  $2|E_p|$  entre as energias dos dois estados do sistema ( $|E_p|$  e  $-|E_p|$ ), o que significa que para retirar uma partícula do seu estado fundamental é necessária uma energia  $2|E_p| \geq 2|\phi|$ . No caso das partículas fermiônicas, segundo a interpretação de Dirac, o estado fundamental seria composto por elétrons com energia negativa, que para serem excitados para o próximo nível de energia demandariam uma energia  $E \geq 2m$ . Matematicamente, isto pode ser expresso através da equação de Dirac,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (3.4)$$

aqui separada em duas componentes,

$$\begin{aligned} E\psi_1 &= \sigma \cdot p\psi_1 + m\psi_2, \\ E\psi_2 &= -\sigma \cdot p\psi_2 + m\psi_1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

e seus respectivos autovalores,

$$E_p = \pm(p^2 + m^2)^{1/2}, \quad (3.6)$$

com  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sendo os autoestados do operador quiralidade  $\gamma_5$ , que é tal que

$$\gamma_5^2 = 1. \quad (3.7)$$

Na teoria BCS o parâmetro de gap,

$$\phi \approx \omega e^{\frac{-1}{\rho}}, \quad (3.8)$$

é descrito em função de  $\omega$ , a largura de banda ao redor da superfície de Fermi onde as interações são significativas, e  $\rho$ , a energia de interação média entre elétrons na superfície de Fermi, mostrando assim que esta é uma quantidade decorrente da interação elétron-elétron. Esta constatação motivou Nambu e Jona-Lasinio a sugerirem que o fator  $m$ , o análogo nas equações de Dirac do parâmetro de gap, poderia ter também origem em acoplamentos fermiônicos, o que, em termos mais claros, é equivalente a propor um mecanismo para o surgimento da massa em partículas de Dirac. Com base nisso, em analogia com as quase-partículas em supercondutores, que são conjuntos de férmions com cargas opostas (elétron e buracos) e mesmo spin, o modelo NJL afirma que partículas de Dirac massivas seriam uma composição de férmions com quiralidades opostas, mas de mesma carga (ou número fermiônico).

Contudo, teorias de supercondutividade mais elaboradas, conforme mostraram vários trabalhos [56–60], apontam, para além das excitações individuais,

a ocorrência também de excitações coletivas de pares de quase-partículas em supercondutores, uma consequência da necessidade de se garantir invariância sob transformação de calibre, que não seria preservada em uma teoria que lida apenas com as excitações individuais. Essa observação indica a provável existência desse mesmo tipo de excitação no modelo NJL, mas, neste caso, com vistas à preservação da quiralidade, que implica invariância sob o grupo de calibre  $\gamma_5$ , fazendo com que estes estados coletivos devam ser representados por quantidades pseudoescalares, podendo, assim, ser relacionados a píons. Por esta razão, Nambu e Jona-Lasinio optaram por tratar seu trabalho como um modelo para núcleons e mésons, sugerindo com isso, por conseguinte, que a massa do núcleo atômico seria então derivada de uma interação ainda desconhecida entre férmions inicialmente sem massa, que deveria ser também responsável pela relação entre núcleons e píons.

Para compreender e descrever esta interação até então desconhecida e o processo de geração de massa a ela relacionado, a analogia com supercondutores já não é mais suficiente. Conceitos essenciais para a teoria BCS, como a esfera de Fermi, não são compatíveis com a relatividade e, portanto, não podem ser incorporados ao modelo NJL e, assim, impedem uma relação mais direta entre algumas quantidades tratadas nos dois modelos. Um exemplo disso está no parâmetro de gap  $\phi$ , que segundo (3.8) é anulado quando o raio de Fermi é zero, um comportamento que não se pode atribuir à massa de férmions de Dirac, mostrando que uma equação da forma de (3.8) é improvável para a massa desse tipo de partícula.

Prosseguindo para além das analogias, Nambu e Jona-Lasinio definiram propriedades a priori requeridas como características do modelo para dar continuidade à sua construção, como a invariância sob transformações de calibre globais



simples

$$\psi \rightarrow \exp[i\alpha]\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp[-i\alpha] \quad (3.9)$$

e a preservação da simetria quiral, que implica a invariância da lagrangiana do sistema sob a transformação de quiralidade,

$$\psi \rightarrow \exp[i\alpha\gamma_5]\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp[i\alpha\gamma_5]. \quad (3.10)$$

Outro requerimento, importante para a dinâmica da teoria, é que a interação entre partícula e antipartícula seja atrativa para possibilitar a formação de estados ligados. Supondo que a interação é resultante de uma não linearidade inerente do campo fermiônico, foi então escolhida uma langrangiana dotada de uma parte cinética e termos de autoacoplamento quárticos, com constante de acoplamento  $[g_0] = -2$ , que descrevem interações entre quatro campos de férmions

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g_0[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2]. \quad (3.11)$$

É interessante destacar que, embora individualmente os termos de autoacoplamento se modifiquem sob uma transformação de quiralidade de modo a

violando esta simetria, como mostramos abaixo através de (3.10) e (3.7),

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}e^{i\alpha\gamma_5}\psi)^2, \\
&\rightarrow (\bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma_5}\psi)^2, \\
&\rightarrow \left[ \bar{\psi} \left( 1 + 2i\alpha\gamma_5 - 2\alpha^2\gamma_5^2 - \frac{4}{3}i\alpha^3\gamma_5^3 + \frac{2}{3}\alpha^4\gamma_5^4 + \dots \right) \psi \right]^2, \\
&\rightarrow \left[ \bar{\psi} \left( 1 - 2\alpha^2\gamma_5^2 + \frac{2}{3}\alpha^4\gamma_5^4 + \dots \right) \psi + \bar{\psi}\gamma_5 \left( 2i\alpha - \frac{4}{3}i\alpha^3\gamma_5^2 + \dots \right) \psi \right]^2, \\
&\rightarrow (\bar{\psi}\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\gamma_5\psi \sin(2\alpha))^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}\gamma_5e^{i\alpha\gamma_5}\psi)^2, \\
&\rightarrow \left[ \bar{\psi}\gamma_5 \left( 1 - 2\alpha^2\gamma_5^2 + \frac{2}{3}\alpha^4\gamma_5^4 + \dots \right) \psi + \bar{\psi} \left( 2i\alpha - \frac{4}{3}i\alpha^3\gamma_5^2 + \dots \right) \psi \right]^2, \\
&\rightarrow (\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\psi \sin(2\alpha))^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

o mesmo não ocorre com o termo de interação completo,

$$\begin{aligned}
[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] &\rightarrow (\bar{\psi}\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\gamma_5\psi \sin(2\alpha))^2 \\
&\quad - (\bar{\psi}\gamma_5\psi \cos(2\alpha) + i\bar{\psi}\psi \sin(2\alpha))^2, \\
&\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2(\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)) \\
&\quad - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2(\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)) \\
&\quad + 2i(\bar{\psi}\psi)^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) \\
&\quad - 2i(\bar{\psi}\psi)^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha), \\
&\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

garantindo, assim, a preservação da simetria quiral na langrangiana, uma vez que

o termo cinético é também invariante,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \\
&\rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \\
&\rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

pois  $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ .

Se a lagrangiana realmente está correta, ela descreve um sistema com interações capazes de produzir férmions massivos, que devem então satisfazer à equação

$$i\not{p} + m_0 + \Sigma(p, m, g_0, \Lambda) = 0, \tag{3.16}$$

tal que, para  $i\not{p} + m = 0$ ,

$$m - m_0 = \Sigma(p, m, g_0, \Lambda)|_{i\not{p}+m=0}, \tag{3.17}$$

sendo  $\Sigma$ , a autoenergia do férmion, descrita em termos do momento  $p$ , da massa observada  $m$ , da constante de acoplamento  $g_0$  e um corte  $\Lambda$ , utilizado para garantir convergência ao cálculo. Assim, temos

$$\Sigma = -\frac{8ig_0}{(2\pi)^4} \int \frac{m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} dp_0 d^3p F(p, \Lambda), \tag{3.18}$$

com  $F(p, \Lambda)$  cumprindo o papel de um fator de corte. Substituindo a equação (3.17) na integral acima, para o caso de  $m_0 = 0$ , encontramos, finalmente, a expressão necessária para o cálculo da massa observada para as partículas que o

modelo visa descrever, a saber,

$$m = -\frac{ig_0m}{2\pi^4} \int \frac{dp_0 d^3p}{p^2 + m^2 - i\epsilon} F(p, \Lambda). \quad (3.19)$$

Com um corte em  $|p| = \Lambda$  esta equação possui solução não-trivial, dada pela equação de gap

$$\frac{\pi^2}{g_0\Lambda^2} = \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} + 1\right)^{1/2} - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left[ \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right)^{1/2} + \frac{\Lambda}{m} \right]. \quad (3.20)$$

A existência de uma solução não trivial garante a validade da hipótese de Nambu e Jona-Lasinio, mostrando, assim, que um processo de auto-interação fermiônica em um sistema de quatro férmions é capaz de gerar massa para partículas de Dirac, como os quarks, considerados os verdadeiros objetos de estudo do modelo NJL segundo sua interpretação atual. A massa gerada neste processo causa uma violação dinâmica da simetria quiral, que, por sua vez, é responsável pelo surgimento de píons como pseudobósons de Nambu-Goldstone [41].

No capítulo seguinte veremos como este tipo de mecanismo é empregado para tentar descrever a origem do campo eletromagnético, tratando o fóton como um bóson de Goldstone.

# Capítulo 4

## MODELO DE QUATRO FÉRMIONS COM EXTENSÃO DE HORAVA-LIFSHITZ

Neste capítulo apresentamos uma versão do modelo de eletrodinâmica quântica emergente de Bjorken, desenvolvida através da formulação de Hořava-Lifshitz, em um espaço-tempo anisotrópico caracterizado por um expoente crítico ímpar. Calculamos para este sistema as correções radiativas para as funções de um até quatro pontos, para com isto induzirmos um potencial efetivo através do qual analisamos a ocorrência de violações de simetria, além do termo de Maxwell.

### 4.1 Eletrodinâmica emergente de Bjorken

Em 1963, inspirado pelo sucesso da transcrição para o contexto relativístico da teoria BCS, recém realizado por Nambu e Jona-Lasinio, James Bjorken investigou a possibilidade de se entender o fóton como uma excitação coletiva, tal

como ocorre com bósons não massivos surgidos em sistemas supercondutores. De maneira mais geral, sua proposta era tratar bósons de calibre como meros graus de liberdade emergentes de uma interação mais elementar, neste caso uma autointeração quártica fermiônica [35, 61]. Assim, seguindo a ideia de Bardeen, Cooper e Schrieffer para a supercondutividade, Bjorken formulou um modelo que relacionava o surgimento do fóton com a existência de um vácuo infinitamente degenerado, causado por uma quebra dinâmica de simetria.

O modelo é representado inicialmente pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\nabla} - m)\psi + \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2, \quad (4.1)$$

e consiste em um campo fermiônico, com massa  $m$ , em um autoacoplamento via interação vetorial. Com vistas a viabilizar a integração dos espinores, o autor acrescenta ao sistema um campo auxiliar  $A_\mu$ , através do termo

$$-\frac{1}{2G}(A_\mu - G\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2, \quad (4.2)$$

que elimina a autointeração fermiônica e dá à lagrangiana a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2G}(A_\mu - G\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2, \\ &= \bar{\psi}(i\not{\nabla} - m)\psi + A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{A^2}{2G}, \\ &= \bar{\psi}(i\not{\nabla} + A - m)\psi - \frac{A^2}{2G}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Esta técnica é baseada na equivalência entre os acoplamentos do tipo quatro-fermions e de Yukawa, demonstrada para o caso vetorial e exemplificada através da teoria de Bjorken em [62].

Conforme [24], o modelo é renormalizável e compatível com os resultados da eletrodinâmica quântica para todas as ordens da expansão perturbativa. Apesar disso, ele apresenta algumas limitações, como o fato de não induzir o potencial quártico característico de quebras espontâneas de simetria, embora o fóton nesta proposta surja como resultado deste tipo de fenômeno, onde o sistema adquire um valor esperado no vácuo não-trivial, que pode, entre outras formas, ser identificado através do método dos multiplicadores de Lagrange.

## 4.2 Eletrodinâmica emergente com extensão de Hořava-Lifshitz

### 4.2.1 Potencial efetivo

A partir desta seção, estudamos a proposta para o surgimento dinâmico do campo eletromagnético, utilizando a formulação de Hořava-Lifshitz, e apresentamos os principais resultados da introdução no modelo da anisotropia (2.3). Os cálculos são realizados a princípio para um valor ímpar genérico do expoente  $z$ , mas, em geral, estamos especialmente interessados nos resultados com  $z = 1$ , que viabiliza a restauração da covariância e, por conseguinte, comparações com o modelo original, e  $z = 3$ , onde temos as mais importantes correções quânticas para a EDQ espinorial de Hořava-Lifshitz [11].

Nosso ponto inicial é a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}[i\partial_0 + (i\partial_i)^z - m^z]\psi - \frac{G_t}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\psi)^2 - \frac{G_s}{2}[\bar{\psi}\gamma_i(i\partial_j)^{2n}\psi]^2, \quad (4.4)$$

que descreve o autoacoplamento entre quatro campos fermiônicos massivos em

(3+1) dimensões, com  $\phi_0 = \partial_0 \gamma^0$ ,  $\phi_i = \partial_i \gamma^i$  e  $z = 2n + 1$ . As dimensões de massa na lagrangiana são

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = 3/2, [m] = 1, [\partial_0] = z, [\partial_i] = 1, [G_t] = z - 3, [G_s] = -z - 1. \quad (4.5)$$

Sabendo que  $(i\phi_i)^{2n} = [(i\phi_i)^2]^n = (-\partial_i \partial^i)^n$ , podemos reescrever (4.4) como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\phi_0 + i\phi_i \Delta^n - m^z)\psi - \frac{G_t}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\psi)^2 - \frac{G_s}{2}(\bar{\psi}\gamma_i\Delta^n\psi)^2, \quad (4.6)$$

com  $\Delta = -\partial_i \partial^i$ ,  $G_t = \frac{e^2}{g_t^2}$  e  $G_s = \frac{e^2}{g_s^2}$ , sendo  $[e] = [g_t] = 1$  e  $[g_s] = z$ . Com o objetivo de eliminar os termos de autointeração em (4.6), introduzimos os campos auxiliares  $A_0$  ( $[A_0] = \frac{z-1}{2} + 1$ ) e  $A_i$  ( $[A_i] = -\frac{z-1}{2} + 1$ ), que geram uma expressão convenientemente mais simples para a integração dos campos fermiônicos, a saber,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \frac{g_t^2}{2}(A_0 - \frac{e}{g_t^2}\bar{\psi}\gamma_0\psi)^2 + \frac{g_s^2}{2}(A_i - \frac{e}{g_s^2}\bar{\psi}\gamma_i\Delta^n\psi)^2, \\ &= \frac{g_t^2}{2}A_0A^0 + \frac{g_s^2}{2}A_iA^i + \bar{\psi}(i\phi_0 + i\phi_i\Delta^n - eA_0 - eA_i\Delta^n - m^z)\psi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Em termos físicos, este processo implica em afirmar que a interação puramente fermiônica descrita inicialmente pela lagrangiana (4.6) é equivalente a uma interação entre férmions com a mediação de um campo bosônico [61]. O bóson surgido neste processo, através da introdução do campo auxiliar, para realizar esta mediação é o fóton emergente proposto por Bjorken.

De posse da lagrangiana (4.7), podemos construir a ação efetiva, instrumento básico para os cálculos que fundamentam nossas análises, a partir do qual podemos obter, através das regras de Feynman, por exemplo, as correções quânticas da teoria. Com este propósito, introduzindo os termos de fonte  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ ,



definimos o funcional gerador,

$$\mathcal{Z} = \int DA_0 DA_i D\psi D\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx_0 d^3x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right]. \quad (4.8)$$

Contudo, para o cálculo da ação efetiva, estes termos são dispensáveis e, por isso, podemos escrever

$$\mathcal{Z} = \int DA_0 DA_i \mathcal{Z}_o, \quad (4.9)$$

com  $\mathcal{Z}_o$ , o funcional gerador na ausência de fontes externas, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_o = & \int D\psi D\bar{\psi} \times \\ & \exp \left\{ i \int dx_0 d^3x \left[ \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 + \bar{\psi} (i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\mathcal{A}_0 - e\mathcal{A}_i \Delta^n - m^z) \psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Uma vez que os campos auxiliares são independentes dos espinores  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ ,  $\mathcal{Z}_o$  pode ser reordenado, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_o = & \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) \right] \times \\ & \exp \left\{ i \int dx_0 d^3x \left[ \bar{\psi} (i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\mathcal{A}_0 - e\mathcal{A}_i \Delta^n - m^z) \psi \right] \right\}, \\ \mathcal{Z}_o = & \exp \left[ i \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) \right] \times \\ & \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int dx_0 d^3x \left[ \bar{\psi} (i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\mathcal{A}_0 - e\mathcal{A}_i \Delta^n - m^z) \psi \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e a integral fermiônica resolvida:

$$\begin{aligned}
\int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int dx_0 d^3x \left[ \bar{\psi} (i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\cancel{A}_0 - e\cancel{A}_i \Delta^n - m^z) \psi \right] \right. \\
= \det(i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\cancel{A}_0 - e\cancel{A}_i \Delta^n - m^z), \quad (4.12) \\
= \det \Theta,
\end{aligned}$$

com, no espaço dos momentos,

$$\Theta = \det[\cancel{p}_0 + \cancel{p}_i (p_j p^j)^n - e\cancel{A}_0 - e\cancel{A}_i (p_j p^j)^n - m^z]. \quad (4.13)$$

Aproveitando o fato de que  $\Theta$  pode ser representado como uma matriz diagonal, escrevemos seu determinante como o produto dos termos da sua diagonal principal,

$$\det \Theta = \prod_{i=1}^n \theta_i. \quad (4.14)$$

Logo, utilizando propriedades do produtório, obtemos

$$\det \Theta = \prod_{i=1}^n e^{\ln \theta_i} = e^{\sum_i \ln \theta_i} = e^{\ln \sum_i \theta_i} = e^{\ln \text{Tr} \Theta}. \quad (4.15)$$

Portanto, voltando a (4.11), temos

$$\mathcal{Z}_0 = \exp \left[ i \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) \right] \exp(\text{Tr} \ln \Theta). \quad (4.16)$$

Reescrevendo a expressão (4.8), já sem fontes externas, obtemos uma relação entre o funcional gerador e a ação efetiva

$$\mathcal{Z} = \int DA_0 DA_i D\psi D\bar{\psi} e^{i \int dx_0 d^3x \mathcal{L}} = \int DA_0 DA_i e^{i S_{ef}}, \quad (4.17)$$

através da qual vemos que

$$\begin{aligned}
e^{iS_{ef}} &= \mathcal{Z}_0, \\
&= \exp \left[ i \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) \right] \exp(\text{Tr} \ln \Theta), \\
&= \exp \left[ i \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) + \text{Tr} \ln \Theta \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Com isto, aplicando (4.13) na equação acima, somos levados a uma primeira expressão para a ação efetiva, a saber,

$$\begin{aligned}
S_{ef}[A_0, A_i] &= \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) - i \text{Tr} \ln [\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - eA_0 \\
&\quad - eA_i (p_j p^j)^n - m^z].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Aqui “Tr” diz respeito ao traço sobre as matrizes de Dirac, bem como sobre a integração nos espaços dos momentos ou coordenadas e, desta forma,

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \ln [\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - eA_0 - eA_i (p_j p^j)^n - m^z] &= \text{Tr} \ln \Theta \\
&= \text{tr} \int dx_0 d^3x \langle x | \ln \Theta | x \rangle \\
&= \text{tr} \int dx_0 d^3x \\
&\quad \times \langle x | \ln \Theta \left( \int dp_0 d^3p |p\rangle \langle p| \right) | x \rangle \\
&= \text{tr} \int dx_0 d^3x \int dp_0 d^3p \\
&\quad \times \ln \Theta \underbrace{\langle x | p \rangle}_{\frac{e^{ix \cdot p}}{(2\pi)^{4/2}}} \underbrace{\langle p | x \rangle}_{\frac{e^{-ix \cdot p}}{(2\pi)^{4/2}}} \\
&= \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \ln \Theta,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

e a ação efetiva torna-se

$$S_{ef}[A_0, A_i] = \int dx_0 d^3x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right) - i \operatorname{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \ln[\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - eA_0 - eA_i (p_j p^j)^n - m^z]. \quad (4.21)$$

A partir dessa expressão extraímos o potencial efetivo,

$$V_{ef} = -\frac{g_t^2}{2} A_0^2 - \frac{g_s^2}{2} A_i^2 + i \operatorname{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \ln[\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - eA_0 - eA_i (p_j p^j)^n - m^z]. \quad (4.22)$$

Uma vez calculado  $V_{ef}$ , podemos agora, em alusão à teoria BCS, construir a equação de gap do modelo, com o propósito de encontrar mínimos não-triviais que indiquem a ocorrência de uma violação espontânea de simetria. Para tal, necessitamos apenas minimizar o potencial. Porém, em decorrência da perda da covariância, imposta pela anisotropia de Lifshitz, temos uma equação de gap para a parte temporal do campo auxiliar ( $A_0$ ) e outra para a espacial ( $A_i$ ):

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial A_0} \Big|_{A_\mu = \frac{a_\mu}{e}} = -\frac{g_t^2 a_0}{e} - ie \operatorname{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_0}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - \not{a}_0 - \not{a}_i (p_j p^j)^n - m^z} = 0 \quad (4.23)$$

e

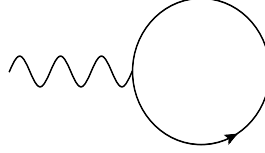
$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial A_i} \Big|_{A_\mu = \frac{a_\mu}{e}} = -\frac{g_s^2 a_i}{e} - ie \operatorname{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_i (p_j p^j)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - \not{a}_0 - \not{a}_i (p_j p^j)^n - m^z} = 0. \quad (4.24)$$

O segundo termo de (4.23) é uma função de um ponto responsável pelas correções quânticas de primeira ordem relacionadas, neste caso, a  $A_0$ ,

$$(\Pi^0)_z = \operatorname{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^0}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - \not{a}_0 - \not{a}_i (p_j p^j)^n - m^z}, \quad (4.25)$$

chamada de amplitude de *tadpole*, por conta da forma do seu diagrama de Feynman (veja Figura 4.1),

**Figura 4.1: Amplitude de tadpole de  $A_0$  ( $(\Pi^0)_z$ )**



Fonte: Autor, 2018.

Para resolver a equação (4.25) utilizamos o propagador fermiônico  $G(p)$ , dado por

$$G(p) = \frac{1}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - m^z} = \frac{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n + m^z}{p_0^2 + (p_j p^j)^{2n+1} - m^{2z}}, \quad (4.26)$$

de maneira a representar a parte temporal do tadpole como

$$(\Pi^0)_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^d \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^0 (p_0 - a_0) + \gamma^i (p_i - a_i) (p_k p^k)^n + m^z}{(p_0 - a_0)^2 + (p_l - a_l) (p^l - a^l) (p_j p^j)^{2n} - m^{2z}} \gamma^0. \quad (4.27)$$

Em seguida, utilizando as identidades abaixo,

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \text{ se } n \text{ é ímpar}; \quad (4.28a)$$

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = 0, \text{ se } n \text{ é ímpar ou menor que } 4; \quad (4.28b)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}; \quad (4.28c)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}); \quad (4.28d)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad (4.28e)$$

$$\{\not{p}, \not{b}\} = 2(p \cdot b); \quad (4.28f)$$

$$g^{i0} = 0; \quad (4.28g)$$

$$(\gamma^0)^2 = 1; \quad (4.28h)$$

calculamos os traços presentes no integrando de (4.27) para obtermos

$$(\Pi^0)_z = 4 \int \frac{dp_0 d^d \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{(p_0 - a_0)}{(p_0 - a_0)^2 + (p_l - a_l)(p^l - a^l)(p_j p^j)^{2n} - m^{2z}}. \quad (4.29)$$

E, através de uma mudança de variáveis ( $p_0 - a_0 \rightarrow p'_0$ ), chegamos à integral

$$(\Pi^0)_z = \int \frac{dp'_0 d^3 \vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{p'_0}{(p'_0)^2 - (\vec{p} - \vec{a})^2 (\vec{p}^2)^{2n} - m^{2z}}, \quad (4.30)$$

que, por razões de simetria, é nula para qualquer valor de  $z$ . Ou seja,

$$(\Pi^0)_z = 0. \quad (4.31)$$

Logo, não temos correções radiativas de primeira ordem associadas a parte temporal do campo auxiliar. Em consequência disso, a equação de gap (4.23) tem apenas a solução trivial, não apresentando, portanto, quebra espontânea de simetria.

Para calcular a parte espacial do tadpole precisamos seguir um caminho diferente, pois a integral em (4.24),

$$(\Pi^i)_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^i (p_j p^j)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p^j)^n - \not{a}_0 - \not{a}_i (p_j p^j)^n - m^z}, \quad (4.32)$$

aparentemente não é solucionável exatamente para um valor arbitrário de  $n$  com  $a_i \neq 0$ . Sendo assim, a completa dependência da equação de gap e, por conseguinte, do potencial efetivo, com relação a  $a_i$  não pode ser encontrada explicitamente, devendo ser obtida então ordem a ordem. Para isso, reescrevemos (4.32)

com a expansão a seguir,

$$\frac{1}{C-B} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C}B\frac{1}{C} + \frac{1}{C}B\frac{1}{C}B\frac{1}{C} + \frac{1}{C}B\frac{1}{C}B\frac{1}{C}B\frac{1}{C} \cdots, \quad (4.33)$$

de modo que encontramos

$$\begin{aligned} (\Pi^i)_z \approx \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} & (G(p) + G(p)\tilde{\alpha}G(p) + G(p)\tilde{\alpha}G(p)\tilde{\alpha}G(p) \\ & + G(p)\tilde{\alpha}G(p)\tilde{\alpha}G(p)\tilde{\alpha}G(p) + \cdots) (p_j p^j)^n \gamma^i, \end{aligned} \quad (4.34)$$

com  $\tilde{\alpha} = \phi_0 + \phi_i (p_j p^j)^n$ . Para prosseguirmos com o cálculo desta primeira correção quântica, calculamos o traço de maneira análoga à realizada para  $(\Pi^0)_z$  e utilizamos o método de regularização dimensional, escolhido dentre os vários possíveis por não alterar as simetrias das teorias em que é aplicado e conseguir lidar com divergências tanto infravermelhas quanto ultravioletas. Em síntese, o método consiste basicamente em um processo de continuação analítica, onde calculamos os traços das matrizes de Dirac em seu número original de dimensões e em seguida promovemos as integrais e o tensor métrico para  $(d+1)$  dimensões, acrescentando ainda um parâmetro regulador  $\mu^{3-d}$ , necessário para a correção da dimensão de massa na expressão, uma vez que esta está sendo variada. Em sequência, visando facilitar os cálculos, utilizando a rotação de Wick, passamos do espaço de Minkowski para o euclidiano. Este procedimento impõe uma mudança na métrica ( $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu}$ ) que tem por consequência imediata a mudança do sinal de produtos internos. Com este recurso, realizamos a integração e encontramos uma expressão geral, para qualquer  $z$  ímpar, para o termo espacial do tadpole:

$$(\Pi^i)_z = -i\alpha_1 a^i + i\beta_z a^i a_j a^j + \cdots, \quad (4.35)$$

com

$$\alpha_{1z} = -\frac{2^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-2}{2z}+1\right)\Gamma\left(-\frac{d+z-2}{2z}\right)}{z^2\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}(d-2)(z-1)m^{d+z-2} \quad (4.36)$$

e

$$\beta_z = \frac{2^{-d-1}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-4}{2z}+2\right)\Gamma\left(-\frac{d+z-4}{2z}\right)}{z^3\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)}(d-4)(z-1)(d(z-1)-2z+4)m^{d+z-4}. \quad (4.37)$$

Especificando os valores de  $z$  de interesse para nossos estudos,  $z = 1$  e  $z = 3$ , encontramos

$$(\Pi^i)_1 = 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} (\Pi^i)_3 = & \frac{i2^{2-d}\mu^{3-d}(d-2)\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}m^{d+1}\Gamma\left(-\frac{d}{6}-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{9d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}a^i \\ & + \frac{i2^{2-d}\mu^{3-d}(d-4)\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}m^{d-1}\Gamma\left(\frac{7}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+8}{6}\right)\bar{a}^2a^i}{9\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Observe que, conforme o esperado, em consequência da restauração da covariância, os resultados para  $z = 1$  dos termos espacial e temporal são idênticos. Já para  $z = 3$ , por conta do uso da regularização dimensional, obtemos um resultado em função do valor  $d$  da dimensão espacial do espaço-tempo quadridimensional com que estamos trabalhando. Por este motivo, expandimos (4.39) em torno de  $d = 3$ , para assim chegarmos a

$$(\Pi^i)_3 = \frac{im^4\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)a^i}{27\pi^{5/2}} + \frac{2iem^2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)a^i a_j a^j}{81\pi^{5/2}}, \quad (4.40)$$

já no espaço de Minkowski.

Calculadas as correções de primeira ordem, podemos agora construir as equações de gap. Aplicando (4.31), (4.35), (4.36) e (4.37), em (4.23) e (4.24),



temos

$$\left. \frac{\partial V_{ef}}{\partial A_0} \right|_{A_\mu = \frac{a_\mu}{e}} = -\frac{1}{G_t} e a^0 = 0, \quad (4.41)$$

$$\left. \frac{\partial V_{ef}}{\partial A_i} \right|_{A_\mu = \frac{a_\mu}{e}} = \left( -\frac{1}{G_s} - \alpha_{1z} + \beta_1 a_j a^j \right) e a^i = 0. \quad (4.42)$$

Como discutido anteriormente, a equação (4.41) tem apenas a solução trivial ( $a_0 = 0$ ) e, por conseguinte, o campo  $A_0$  não apresenta violação de simetria. Já a equação (4.42) tem, além da solução trivial, duas soluções não nulas:

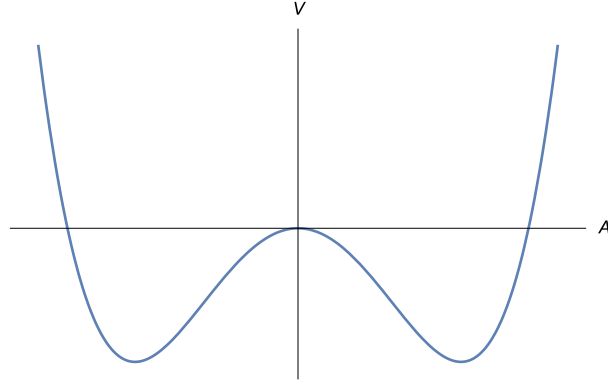
$$a_1^i = 0, \quad (4.43)$$

$$a_{2,3}^i = \pm \left[ \left( \frac{1}{G_s} + \alpha_{1z} \right) \frac{1}{\beta_z} \right]^{1/2}, \quad (4.44)$$

que, para o caso de  $\beta_z > 0$ , representam dois mínimos e um máximo do potencial efetivo  $V_{ef}(A^i)$ ,

$$V_{ef}(A^i) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_s} + \alpha_{1z} \right) e^2 A_i A^i + \frac{\beta_z}{4} e^4 (A_i A^i)^2, \quad (4.45)$$

calculado integrando-se (4.42). Note que  $V_{ef}(A^i)$  apresenta a forma de um potencial do tipo chapéu mexicano, conforme ilustra a figura abaixo,

Figura 4.2: Potencial  $V_{ef}(A^i)$ 

Fonte: Autor, 2018.

o que assinala a presença de uma violação espontânea de simetria.

A partir da equação de gap, i.e., usando o fato de que  $\frac{1}{G_s} = -\alpha_{1z} + \beta_z a_i a^i$ , (4.45) pode ainda ser alterada, como fazemos a seguir,

$$V_{ef}(A^i) = -\frac{e^2 A_i A^i}{2} (-\alpha_z + \beta_z a_i a^i + \alpha_{1z}) + \frac{e^4 \beta_z (A_i A^i)^2}{4}, \quad (4.46)$$

de modo que, adicionando a constante  $\frac{\beta_z}{4} (a_i a^i)^2$ , o potencial efetivo relativo ao campo  $A^i$  passa a ser

$$V_{ef}(A^i) = \frac{\beta_z}{4} (e^2 A_i A^i - a_i a^i)^2, \quad (4.47)$$

assumindo então a forma de um potencial *bumblebee*<sup>1</sup>. Com isto, vemos que a quebra espontânea de simetria ocorre quando  $\beta_z > 0$ . Esta condição depende de uma combinação das desigualdades  $z+4-d > 0$  e  $(d-2)z-d+4 > 0$ , derivadas da equação (4.37) e satisfeitas para qualquer valor positivo de  $z$  com  $d = 3$ . Tal fato

<sup>1</sup>Potencial associado a um campo vetorial, geralmente identificado pela expressão  $V = \lambda(B_\mu B^\mu \mp b^2)^2$ , característico dos chamados modelos de bumblebee, conhecidos por serem a forma mais simples de teoria quântica de campos efetiva com quebra espontânea de simetria de Lorentz.

demonstra que o modelo apresenta violação espontânea de simetria para qualquer valor do expoente crítico  $z$  em um espaço-tempo quadrimensional.

Assim, este resultado evidencia como a extensão de Hořava-Lifshitz é capaz de reparar uma importante ausência da versão covariante deste modelo [61], onde a geração deste potencial é alcançada através de procedimento *ad hoc*, com a adição forçada dos termos quárticos necessários para a criação de um potencial com mínimos não triviais, apesar da presença de quebra espontânea da simetria de Lorentz ser condição necessária para a hipótese de surgimento dinâmico do campo eletromagnético que o artigo visa estudar.

É importante destacar, entretanto, que no nosso modelo a simetria de Lorentz já é violada explicitamente em virtude da presença da anisotropia de Lifshitz, que faz com que a quebra dinâmica de simetria, no caso em questão, se restrinja ao espaço, não se estendendo ao espaço-tempo (o que caracterizaria uma quebra da simetria de Lorentz), como ocorre em teorias covariantes. Assim, a simetria violada por meio de correções quânticas no sistema que estudamos é a simetria rotacional. E, com isto, demonstramos, pela primeira vez, uma quebra dinâmica de simetria deste tipo em uma teoria com anisotropia de Lifshitz [25]. Quebras de simetria com esta configuração são comuns em sistemas de matéria condensada, onde a covariância de Lorentz costuma não ser preservada, o que abre, a partir deste resultado, uma perspectiva para o uso do método de modelos bumblebee, com escalonamento de Lifshitz, em estudos de fenômenos críticos envolvendo sistemas com violação espontânea de simetria.

### 4.2.2 Expansão da ação efetiva

A fim de, com o uso de expansões derivativas [63], estudarmos correções quânticas de ordem mais alta para o nosso modelo, nesta seção introduzimos uma versão expandida da ação efetiva que nos possibilita calcular, além da função de um ponto, as funções de dois, três e quatro pontos, que são aquelas que interessam à nossa análise. Inicialmente, separamos (4.21) em duas partes,

$$S_{ef}[A_0, A_i] = \underbrace{\int d^4x \left( \frac{g_t^2}{2} A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} A_i^2 \right)}_{S_{ef_1}} \underbrace{-i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - e\cancel{A}_0 - e\cancel{A}_i \Delta^n - m^z)}_{S_{ef_2}}, \quad (4.48)$$

das quais apenas  $S_{ef_2}$  é relevante, uma vez que é a fonte dos termos de correção radiativa. Este termo é dividido em outras duas partes,

$$\begin{aligned} S_{ef_2} &= -i \text{Tr} \ln \left[ (i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - m^z) \left( 1 - \frac{e\cancel{A}_0 + e\cancel{A}_i \Delta^n}{i\cancel{\partial}_0 + i\cancel{\partial}_i \Delta^n - m^z} \right) \right], \\ &= -i \text{Tr} \ln[\cancel{\not{p}}_0 + \cancel{\not{p}}_i (p_j p^j)^n - m^z] - i \text{Tr} \ln \left[ 1 - \frac{e\cancel{A}_0 + e\cancel{A}_i (p_j p^j)^n}{\cancel{\not{p}}_0 + \cancel{\not{p}}_i (p_j p^j)^n - m^z} \right], \end{aligned} \quad (4.49)$$

das quais, novamente, ignoramos a primeira, para expandir apenas a segunda parte, que carrega a parte não trivial da dinâmica do sistema,

$$-i \text{Tr} \ln \left[ 1 - \frac{e\cancel{A}_0 + e\cancel{A}_i (p_j p^j)^n}{\cancel{\not{p}}_0 + \cancel{\not{p}}_i (p_j p^j)^n - m^z} \right] = i \text{Tr} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[ \frac{e\cancel{A}_0 + e\cancel{A}_i (p_j p^j)^n}{\cancel{\not{p}}_0 + \cancel{\not{p}}_i (p_j p^j)^n - m^z} \right]^l. \quad (4.50)$$

Chamamos esta expressão de ação efetiva de ordem  $l$  ( $S_{ef}^{(l)}$ ):

$$S_{ef}^{(l)}[A_0, A_i] = i \text{Tr} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[ \frac{e\cancel{A}_0 + e\cancel{A}_i (p_a p^a)^n}{\cancel{\not{p}}_0 + \cancel{\not{p}}_i (p_a p^a)^n - m^z} \right]^l, \quad (4.51)$$

rerepresentada de maneira mais sucinta por

$$S_{ef}^{(l)}[A_0, A_i] = i \text{Tr} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \{ G(p) e [A_0 + A_i (p_a p^a)^n] \}^l. \quad (4.52)$$

Em conformidade com o que já foi dito anteriormente, com esta expressão podemos calcular correções radiativas de diferentes ordens. O tadpole, por exemplo, é obtido com  $l = 1$ :

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(1)}[A_0, A_i] &= i \text{Tr} \frac{e A_0 + e A_i (p_a p^a)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_a p^a)^n - m^z}, \\ &= i \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{e \gamma^0}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_a p^a)^n - m^z} A_0 \\ &\quad + i \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{e \gamma^i (p_a p^a)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i (p_a p^a)^n - m^z} A_i, \\ &= i \int dx_0 d^3x (\Pi^0)_z A_0 + i \int dx_0 d^3x (\Pi^i)_z A_i. \end{aligned} \quad (4.53)$$

### 4.2.3 Função de dois pontos

Uma vez que já foram calculadas a equação de gap e suas soluções, nosso próximo objetivo é a obtenção das correções de um loop de segunda ordem, as funções de dois pontos que representam os chamados termos de autoenergia dos

campos auxiliares  $A_i$  e  $A_0$ . Assim, tomando  $l = 2$  em (4.51), temos

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(2)} &= \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{e[A_0 + A_i(p_a p^a)^n]}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_a p^a)^n - m^z} \times \frac{e[A_0 + A_j(p_b p^b)^n]}{\not{p}_0 + \not{p}_j(p_b p^b)^n - m^z} \right\}, \\
&= \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \frac{A_0}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_a p^a)^n - m^z} \cdot \frac{A_0}{\not{p}_0 + \not{p}_j(p_b p^b)^n - m^z} \\
&\quad + \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \frac{A_i(p_a p^a)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_a p^a)^n - m^z} \cdot \frac{A_j(p_b p^b)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_j(p_b p^b)^n - m^z} \\
&\quad + \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \frac{A_i(p_a p^a)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_a p^a)^n - m^z} \cdot \frac{A_0}{\not{p}_0 + \not{p}_j(p_b p^b)^n - m^z} \\
&\quad + \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \frac{A_0}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_a p^a)^n - m^z} \cdot \frac{A_j(p_b p^b)^n}{\not{p}_0 + \not{p}_j(p_b p^b)^n - m^z},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \{ G(p) A_0 G(p) A_0 + G(p) A_i (p_a p^a)^n G(p) A_j (p_b p^b)^n \\
&\quad + G(p) A_i (p_a p^a)^n G(p) A_0 + G(p) A_0 G(p) A_i (p_a p^a)^n \}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Contudo, uma vez que  $x$  e  $p$  não comutam entre si, devemos ter a seguinte relação entre suas funções  $A_{i,0}(x)$  e  $G(p)$ :

$$A_{i,0}(x)G(p) = G(p - k)A_{i,0}(x), \tag{4.56}$$

com o propagador transladado  $G(p - k)$  dado por

$$G(p - k) = \frac{1}{(p_0 - k_0)\gamma^0 + (p_j - k_j)\gamma^j [(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n - m^z}. \tag{4.57}$$

Em consequência disso, ao passarmos  $A_0(x)$  e  $A_i(x)$  através dos propagadores em (4.55) e efetuarmos o traço no espaço dos momentos, como feito na equação

(4.20), modificamos a ação acrescentando novos termos à sua expressão,

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(2)} = & \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^0}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i (p_a p^a)^n - m^z} \\
& \times \frac{\gamma^0}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_j - k_j) \gamma^j [(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n - m^z} A_0 A_0 \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^i [(p_a - k_a)(p^a - k^a)]^n}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i (p_a \gamma^a)^n - m^z} \\
& \times \frac{\gamma^j [(p_b - k_b + k_b)(p^b - k^b + k^b)]^n}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_j - k_j) \gamma^j [(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n - m^z} A_i A_j \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^i [(p_a - k_a)(p^a - k^a)]^n}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i (p_a p^a)^n - m^z} \\
& \times \frac{\gamma^0}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_j - k_j) \gamma^j [(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n - m^z} A_i A_0 \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^0}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i (p_a \gamma^a)^n - m^z} \\
& \times \frac{\gamma^j [(p_b - k_b + k_b)(p^b - k^b + k^b)]^n}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_j - k_j) \gamma^j [(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n - m^z} A_0 A_i.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Buscando simplificar os integrandos acima, expandimos seus binômios até os termos de segunda ordem nos momentos externos  $k_b$ ,

$$\begin{aligned}
[(p_b - k_b)(p^b - k^b)]^n &= [(p_b)^2 + (k_b)^2 - 2p_b k^b]^n \\
&= \sum_{\rho=0}^n (p_b^2)^{n-\rho} (k_b^2 - 2p_b k^b)^\rho \frac{n!}{(n-\rho)! \rho!} \\
&= (p_b^2)^n + n(p_b^2)^{n-1} (k_b^2 - 2p_b k^b) + \frac{n!}{(n-2)! 2!} (p_b^2)^{n-2} \\
&\quad \times (k_b^2 - 2p_b k^b)^2 + \dots \\
&= (p_b^2)^n + n(p_b^2)^{n-1} (k_b^2 - 2p_b k^b) + \frac{n}{2} (n-1) (p_b^2)^{n-2} 4p_b^2 k_b^2 \\
&\quad + \mathcal{O}(k_b^3) \\
&= (p_b^2)^n + n(p_b^2)^{n-1} (k_b^2 - 2p_b k^b) + 2n(n-1) (p_b^2)^{n-2} (p_b k^b)^2 \\
&\quad + \mathcal{O}(k_b^3).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Logo, definindo os objetos  $V_1$  e  $V_2$ ,

$$V_1 = (p_b^2)^n \quad e \quad V_2 = n(p_b^2)^{n-1}(k_b^2 - 2p_b k^b) + 2n(n-1)(p_b^2)^{n-2}(p_b k^b)^2, \quad (4.60)$$

aplicando (4.59) em (4.57), o propagador transladado  $G(p-k)$  torna-se

$$G(p-k) = \{p_0\gamma^0 + p_j\gamma^j(p_b^2)^n - m^z - [k_0\gamma^0 + k_j\gamma^j(V_1 + V_2) - p_j\gamma^j V_2]\}^{-1}. \quad (4.61)$$

Utilizando outra vez a expansão (4.33), agora com

$$C = G(p)^{-1} = p_0\gamma^0 + p_j\gamma^j(p_b^2)^n - m^z \quad e \quad B = k_0\gamma^0 + k_j\gamma^j(V_1 + V_2) - p_j\gamma^j V_2, \quad (4.62)$$

temos

$$G(p-k) = G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p) + \dots \quad (4.63)$$

Desta forma, podemos escrever a ação efetiva (4.58) da maneira a seguir:

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= \frac{(-e^2)}{2} \text{tr} \int dx_0 d^3x \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \{G(p)\gamma^0[G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)]\gamma^0 A_0 A_0 \\ &\quad + G(p)\gamma^i(V_1 + V_2)[G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)]V_1\gamma^j A_i A_j \\ &\quad + G(p)\gamma^i(V_1 + V_2)[G(p) + G(p)BG(p) + G(p)B(p)BG(p)]\gamma^0 A_i A_0 \\ &\quad + G(p)\gamma^0[G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)]V_1\gamma^j A_0 A_j\} \\ &= \frac{ie^2}{2} \int dx_0 d^3x (\Pi^{00})_z A_0 A_0 + \frac{ie^2}{2} \int dx_0 d^3x (\Pi^{ij})_z A_i A_j \\ &\quad + \frac{ie^2}{2} \int dx_0 d^3x (\Pi^{i0})_z A_i A_0 + \frac{ie^2}{2} \int dx_0 d^3x (\Pi^{0j})_z A_0 A_j, \end{aligned} \quad (4.64)$$



ou, de modo mais compacto, como

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} \int d^4x (\Pi^{\mu\nu})_z A_\mu A_\nu, \quad (4.65)$$

definindo

$$(\Pi^{\mu\nu})_z = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \Gamma^\mu(p) G(p - i\partial) \Gamma^\nu(p - i\partial) \quad (4.66)$$

e

$$\Gamma^\mu(p) = (\gamma^0, \gamma^i (p_j p^j)^n). \quad (4.67)$$

Os termos de autoenergia em (4.64), que compõem (4.66), serão representados para um valor ímpar genérico do expoente crítico como

$$(\Pi^{00})_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 \quad (4.68)$$

$$\times [G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)] \gamma^0 A_0 A_0, \quad (4.69)$$

$$(\Pi^{ij})_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^i (V_1 + V_2) \quad (4.70)$$

$$\times [G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)] V_1 \gamma^j A_i A_j, \quad (4.71)$$

$$(\Pi^{i0})_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^i (V_1 + V_2) \quad (4.72)$$

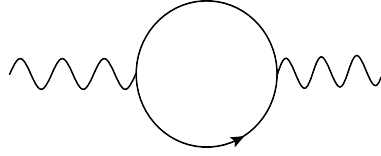
$$\times [G(p) + G(p)BG(p) + G(p)B(p)BG(p)] \gamma^0 A_i A_0, \quad (4.73)$$

$$(\Pi^{0i})_z = \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 \quad (4.74)$$

$$\times [G(p) + G(p)BG(p) + G(p)BG(p)BG(p)] V_1 \gamma^j A_0 A_i, \quad (4.75)$$

podendo ser calculados ainda através do digrama de Feynman dado pela Figura 4.3,

**Figura 4.3: Autoenergia dos campos  $A_0$  e  $A_i$**   
 $((\Pi^{00})_z + (\Pi^{0i})_z + (\Pi^{i0})_z + (\Pi^{ij})_z)$



Fonte: Autor, 2018.

Para efetuar as integrações realizamos procedimento semelhante àquele descrito para o cálculo do tadpole, para assim encontrarmos

$$\begin{aligned}
 (\Pi^{00})_z = & -\frac{i\mu^{3-d}2^{-d-1}\pi^{\frac{1}{2}(-d-1)}m^{d-3(2n+1)}}{3(2n+1)} \times \\
 & \left\{ \frac{-6(\delta^{00}-1)k_0^2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{d}{2(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2(2n+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \right. \\
 & \left. - \frac{[\delta^{00}[-3d(2n+1)+6d+12n] + (2d-4)(2n+1) - 3d + (2n+1)^2 + 3]}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \times \right. \\
 & \left. m^{2(2n+1)-2}\vec{k}^2\Gamma\left(\frac{d-2}{2(2n+1)}+1\right)\Gamma\left(\frac{-d+(2n+1)+2}{2(2n+1)}\right) \right\}, \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Pi^{i0})_z = & \frac{\mu^{3-d}2^{-d-2}\pi^{\frac{1}{2}(-d-1)}m^{d-2n-3}\Gamma\left(\frac{-d+2n+3}{2(2n+1)}\right)k_0\vec{k}^i}{3(2n+1)^2\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \times \\
 & \left\{ [d^2 + 2d(2n-1) + 6(2n+1)^2 - 10(2n+1) + 4]\Gamma\left(\frac{d+2(2n+1)-2}{2(2n+1)}\right) \right. \\
 & \left. - 4(2n+1)^2\Gamma\left(\frac{6(2n+1)+d-2}{2(2n+1)}\right) \right\}, \tag{4.77}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Pi^{ij})_z = & -\frac{1}{15}i\mu^{d-3}2^{-d-1}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}m^{d-2n-3} \left\{ \frac{1}{4(2n+1)^3}5\delta^{ij} \times \right. \\
& \left. \frac{2\Gamma\left(-\frac{d+2n-1}{2(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{d-2}{2(2n+1)}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \{24(d-2)(2n+1)nm^{2(2n+1)}+ \right. \\
& k_0^2(d+2n-1)[3d(2n+1)-d-2(2n+1)+2]\} + \\
& m^{2(2n+1)-2}p^2\Gamma\left(-\frac{d+2n-3}{2(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{d-4}{2(2n+1)}+1\right)(2n+1) \times \\
& \left. \frac{\{(d-4)(3d+2)(2n+1)^2-12(d-2)d(2n+1)+d[(9-2d)d-6]+8\}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)} \right\} + \\
& \left. \frac{5(d(d-2(2n+1)+4)+16n)m^{2(2n+1)-2}\Gamma\left(-\frac{d+2n-3}{2(2n+1)}\right)\Gamma\left(\frac{d-4}{2(2n+1)}+2\right)k^ik^j}{(2n+1)\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)} \right\} \quad (4.78)
\end{aligned}$$

Estes resultados podem ser expressos de maneira mais concisa se, ao invés de apresentarmos diretamente as funções de dois pontos, explicitarmos os coeficientes que lhes compõem, separados das estruturas tensoriais. Para isso, sabendo que

$$S_{ef}^{(2)} = \int d^4x \mathcal{L}_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} \int d^4x (\Pi^{\mu\nu})_z A_\mu A_\nu, \quad (4.79)$$

escrevemos a lagrangiana efetiva de segunda ordem,  $\mathcal{L}_{ef}^{(2)}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ef}^{(2)} = & \frac{e^2}{2}\alpha_{1z}A_iA^i - \frac{e^2}{2}(\alpha_{2z}\partial_0A_i\partial^0A^i - \alpha_{3z}\partial_0A_i\partial^iA^0 - \alpha_{3z}\partial_iA_0\partial^0A^i + \alpha_{4z}\partial_iA_0\partial^iA^0) \\
& - \frac{e^2}{2}(\alpha_{5z}\partial_iA_j\partial^iA^j - \alpha_{6z}\partial_iA_j\partial^jA^i) + \mathcal{O}(\partial^4), \quad (4.80)
\end{aligned}$$

em termos desses coeficientes ( $\alpha_{iz}$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$ ), dados por:

$$\alpha_{2z} = \frac{2^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-2}{2z}+1\right)\Gamma\left(\frac{-d+z+2}{2z}\right)}{3dz^2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}(d(3z-1)-2z+2)m^{d-z-2}, \quad (4.81a)$$

$$\alpha_{3z} = \frac{2^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-2}{2z}+1\right)\Gamma\left(\frac{-d+z+2}{2z}\right)}{3dz\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}(2d+z-1)m^{d-z-2}, \quad (4.81b)$$

$$\alpha_{4z} = \frac{2^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-2}{2z}+1\right)\Gamma\left(\frac{-d+z+2}{2z}\right)}{3dz\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \times ((z-1)(z+3)-d(z-3))m^{d-z-2}, \quad (4.81c)$$

$$\alpha_{5z} = \frac{2^{-d-3}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-4}{2z}+1\right)\Gamma\left(-\frac{d+z-4}{2z}\right)}{3z^2\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)} \times (-(d-4)(3d+2)z^2 + 12(d-2)dz + ((2d-9)d+6)d-8) m^{d+z-4}, \quad (4.81d)$$

$$\alpha_{6z} = -\frac{2^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-4}{2z}+2\right)\Gamma\left(\frac{-d+z+4}{2z}\right)}{3(d+z-4)\Gamma\left(\frac{d}{2}+2\right)}(d(d-2z+4)+8(z-1))m^{d+z-4}. \quad (4.81e)$$

Calculadas as expressões gerais que fornecem as correções radiativas de segunda ordem, para um valor ímpar genérico de  $z$ , em um espaço de dimensão  $d$  qualquer, torna-se possível agora a obtenção das expressões para qualquer  $z = 2n + 1$ . Para o nosso estudo importam, como já esclarecemos, os resultados em

$z = 3$  e  $z = 1$ . Para  $z = 3$ , temos

$$(\Pi^{00})_3 = \underbrace{\frac{i\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{9\pi^{5/2}m^2}}_{C^{(00)}} \vec{k}^2 g^{00} + \mathcal{O}(k^4), \quad (4.82)$$

$$(\Pi^{0i})_3 = - \underbrace{\frac{2i\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{27\pi^{5/2}m^2}}_{C^{(0i)}} k^0 k^i + \mathcal{O}(k^4), \quad (4.83)$$

$$(\Pi^{i0})_3 = (\Pi^{0i})_3, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} (\Pi^{ij})_3 = & - \frac{\overbrace{im^4\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}^{\alpha_{13}}}{27\pi^{5/2}} g^{ij} + \frac{\overbrace{19im^2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\left(\vec{k}^2 g^{ij} - k^i k^j\right)}^{(\Pi^{ij})'_3}}{90\pi^{5/2}} \\ & + \underbrace{\frac{5i\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{81\pi^{5/2}m^2}}_{C^{(ij)}} k_0^2 g^{ij} + \mathcal{O}(k^4), \end{aligned} \quad (4.85)$$

onde  $\alpha_{13}$  é o valor de  $\alpha_{1z}$  para  $z = 3$ . Para  $z = 1$ , obtemos as seguintes contribuições para as correções de segunda ordem:

$$(\Pi^{i0})_1 = - \frac{i \left[ -2(d-3) \ln \mu + d \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + \gamma(d-3) + 3 \ln \left( \frac{4\pi}{m^2} \right) + 2 \right]}{12\pi^2(d-3)} k^i k^0, \quad (4.86)$$

$$(\Pi^{0i})_1 = (\Pi^{i0})_1, \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} (\Pi^{ij})_1 = & \frac{i \left[ -2(d-3) \ln \mu + d \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + \gamma(d-3) + 3 \ln \left( \frac{4\pi}{m^2} \right) + 2 \right]}{12\pi^2(d-3)} \\ & \times \left[ \left( k_0^2 - \vec{k}^2 \right) g^{ij} - k^i k^j \right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} (\Pi^{00})_1 = & \frac{i \left[ -2(d-3) \ln \mu + d \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + \gamma(d-3) + 3 \ln \left( \frac{4\pi}{m^2} \right) + 2 \right]}{12\pi^2(d-3)} \\ & \times \left[ \left( k_0^2 - \vec{k}^2 \right) g^{00} - k^0 k^0 \right]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Para demonstrar como com  $z = 1$  conseguimos recuperar a covariância,

vamos definir a partir de (4.86), (4.88) e (4.89) o coeficiente  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned}\Sigma &= i \left[ -2(d-3) \ln \mu + d \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + \gamma(d-3) + 3 \ln \left( \frac{4\pi}{m^2} \right) + 2 \right] \\ &= i \left[ -2(d-3) \ln \mu + d \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + \gamma(d-3) - 3 \ln \left( \frac{m^2}{4\pi} \right) + 2 \right] \\ &= i \left[ (d-3) \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + (d-3) \ln e^\gamma + 2 \right],\end{aligned}\quad (4.90)$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{12\pi^2(d-3)} &= \frac{i}{12\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \ln e^\gamma + \frac{2}{(d-3)} \right] \\ &= \frac{i}{12\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2 e^{-\gamma}} \right) + \frac{2i}{12\pi^2(d-3)},\end{aligned}\quad (4.91)$$

possibilitando-nos unificar as quatro correções em único objeto e representar a função de dois pontos de maneira covariante:

$$(\Pi^{\mu\nu})_1 = \frac{i}{12\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2 e^{-\gamma}} \right) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) + \frac{2i}{12\pi^2(d-3)} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \quad (4.92)$$

$$(\Pi^{\mu\nu})_1 = \frac{i}{12\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right) (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) - \frac{i}{6\pi^2\epsilon} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu), \quad (4.93)$$

com  $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$  e  $\epsilon = 3 - d$ . Se definimos

$$\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right) \quad (4.94)$$

e aplicamos este termo em (4.93),  $\Pi^{\mu\nu}$  pode ainda ser simplificado e assume o formato abaixo:

$$(\Pi^{\mu\nu})_1 = -\frac{i}{6\pi^2\epsilon'} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu), \quad (4.95)$$

que confirma a restauração da covariância em  $z = 1$  e o resultado obtido em [61].

Nosso próximo objetivo é conseguir, no contexto anisotrópico criado pela escolha de um expoente crítico  $z = 3$ , obter para a lagrangiana do sistema, a partir de correções quânticas, um termo cinético covariante para os campos auxiliares  $A_0$  e  $A_i$ , com o propósito de conferir-lhes um papel dinâmico no modelo. Este termo deve, como na eletrodinâmica quântica usual, ser proporcional a  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , com

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu} \\ &= F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} \end{aligned} \quad (4.96)$$

e

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.97)$$

Sua origem deve ser as funções (4.82), (4.83) e (4.85), mais especificamente seus termos de segunda ordem nos momentos, os únicos participantes do termo cinético. Contudo, para construir uma estrutura manifestamente covariante, precisamos ao menos que dois entre os coeficientes  $C^{(00)}$ ,  $C^{(i0)}$  e  $C^{(ij)}$  sejam idênticos. Para conseguir isso, redefinimos os momentos e campos auxiliares associando-os a constantes multiplicativas, alterando então apenas seus módulos:

$$k_0 \rightarrow \bar{\alpha}_0 k_0, \quad k_i \rightarrow \bar{\alpha}_i k_i, \quad A_0 \rightarrow \bar{\beta}_0 A_0, \quad A_i \rightarrow \bar{\beta}_i A_i. \quad (4.98)$$

Definimos ainda novos coeficientes  $\bar{C}^{(00)}$ ,  $\bar{C}^{(i0)}$  e  $\bar{C}^{(ij)}$ , buscando a incorporação das constantes  $\bar{\alpha}_{i,0}$  e  $\bar{\beta}_{i,0}$ , dos novos momentos e campos, às constantes  $C$ ,

$$\bar{C}^{(00)} = \bar{\alpha}_i^2 \bar{\beta}_0^2 C^{(00)}, \quad \bar{C}^{(ij)} = \bar{\alpha}_0^2 \bar{\beta}_i^2 C^{(ij)}, \quad \bar{C}^{(i0)} = \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_i \bar{\beta}_0 C^{(i0)}. \quad (4.99)$$

Com estes artifícios podemos então igualar inicialmente dois coeficientes. Escolheremos dois envolvidos na construção da componente  $F_{0i}F^{0i}$  de  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , o que nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C^{(ij)} = \frac{5}{6}C^{(i0)} \\ \bar{C}^{(ij)} = \bar{C}^{(i0)}, \end{cases} \quad (4.100)$$

onde a primeira equação expressa a relação entre  $C^{(ij)}$  e  $C^{(i0)}$ , dada por (4.83) e (4.85), e a segunda é a igualdade que requeremos para conseguirmos criar um objeto covariante. Disto temos

$$\begin{cases} C^{(ij)} = \frac{5}{6}C^{(i0)} \\ \bar{\alpha}_0^2 \bar{\beta}_i^2 C^{(ij)} = \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_i \bar{\beta}_0 C^{(i0)}. \end{cases} \quad (4.101)$$

Assim, a primeira condição para a formação do termo cinético é

$$\frac{\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_0}{\bar{\alpha}_0 \bar{\beta}_i} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\alpha}_0} = \frac{5 \bar{\beta}_i}{6 \bar{\beta}_0}. \quad (4.102)$$

Se escrevemos a ação efetiva (4.64) separando seus termos de acordo com suas potências de  $k_0$  e  $k_i$ , com  $S_{k^1}$  e  $S_{k^2}$  sendo os termos de primeira e segunda ordem, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= S_{k^1} + S_{k^2} + \mathcal{O}(k^4) \\ &= \frac{i}{2} \int dx_0 d^3 x \Lambda_3^{(00)} + \frac{i}{2} \int dx_0 d^3 x \Lambda_3^{(i0)} + \frac{i}{2} \int dx_0 d^3 x \Lambda_3^{(0i)} + \frac{i}{2} \int dx_0 d^3 x \Lambda_{31}^{(ij)} \\ &\quad + \frac{i}{2} \int dx_0 d^3 x \Lambda_{32}^{(ij)} + S_{k^1} + \mathcal{O}(k^4). \end{aligned} \quad (4.103)$$



Fazendo as escolhas para as constantes multiplicativas,

$$\bar{\alpha}_0 = 6, \quad \bar{\alpha}_i = 5, \quad \bar{\beta}_0 = 1, \quad \bar{\beta}_i = 1, \quad (4.104)$$

as estruturas que formam  $S_{k^2}$  são

$$\begin{aligned} \Lambda_3^{(00)} &= e^2(\Pi^{00})_3 A_0 A_0 = 25 \frac{ie^2 \Gamma(1/3) \Gamma(7/6)}{9m^2 \pi^{5/2}} \vec{k}^2 A^0 A^0 \\ \Lambda_3^{(i0)} &= e^2(\Pi^{i0})_3 A_i A_0 = -20 \frac{ie^2 \Gamma(1/3) \Gamma(7/6)}{9m^2 \pi^{5/2}} k^i k^0 A^i A^0 \\ \Lambda_{31}^{(ij)} &= e^2(\Pi^{ij})'_3 A_i A_j = \frac{25}{10} \cdot \frac{19ie^2 m^2 \Gamma(2/3) \Gamma(11/6)}{9\pi^{5/2}} (\vec{k}^2 g^{ij} - k^i k^j) A^i A^j \\ \Lambda_{32}^{(ij)} &= e^2(\Pi^{ij})''_3 A_i A_j = 20 \frac{ie^2 \Gamma(1/3) \Gamma(7/6)}{9m^2 \pi^{5/2}} k_0^2 g^{ij} A^i A^j, \end{aligned} \quad (4.105)$$

de tal forma que, com as constantes adimensionais

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{e^2 \Gamma(1/3) \Gamma(7/6)}{9m^2 \pi^{5/2}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{m^2} \cdot \frac{19e^2 \Gamma(2/3) \Gamma(11/6)}{72\pi^{5/2}}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

$S_{k^2}$ , a parte cinética da ação, passa a ser

$$S_{k^2} = \int dx_0 d^3 x \frac{i}{2} \{ i\lambda_1 [20(F^{0i})^2 + 5\partial_i \partial^i A_0 A_0] + 20im^4 \lambda_2 (\partial_j \partial^j A_i A^i - \partial^i A_i \partial_j A^j) \}. \quad (4.107)$$

O termo dotado apenas de objetos espaciais,  $\Lambda_{31}^{(ij)}$ , será o único a contribuir com  $F_{ij} F^{ij}$  e, portanto,

$$S_{k^2} = \int dx_0 d^3 x \frac{1}{2} \{ -\lambda_1 [20(F^{0i})^2 + 5(\partial_i A_0)^2] - 10m^4 \lambda_2 (F^{ij})^2 \}. \quad (4.108)$$

Já tendo construído  $(F^{0i})^2$  e  $(F^{ij})^2$ , necessitamos ainda igualar seus coeficientes para conseguirmos formar uma estrutura covariante. Para isto reescalona-

mos os momentos e campos  $A_0$  e  $A_i$ , de modo a lhes devolver as dimensões usuais da EDQ:

$$\partial_0 \rightarrow \frac{m^2 \lambda_2^{1/4}}{4 \lambda_1^{1/2}} 2^{\frac{1}{2}} \partial_0, \quad (4.109a)$$

$$\partial_i \rightarrow \frac{1}{4 \lambda_2^{1/4}} 2^{\frac{1}{2}} \partial_i, \quad (4.109b)$$

$$A_0 \rightarrow \frac{m \lambda_2^{1/4}}{5^{1/2} \lambda_1^{1/2}} 2^{\frac{1}{2}} A_0, \quad (4.109c)$$

$$A_i \rightarrow \frac{m^{-1}}{5^{1/2} \lambda_2^{1/4}} 2^{\frac{1}{2}} A_i. \quad (4.109d)$$

Com isto formamos finalmente o termo cinético que buscávamos para a lagrangiana,

$$S_{k^2} = \int dx_0 d^3x \left\{ -\frac{m^2}{4} [2(F^{0i})^2 + (F^{ij})^2] - \frac{1}{8} m^2 (\partial_i A_0)^2 \right\} \quad (4.110)$$

$$\mathcal{L}_{cin} = -\frac{1}{4} m^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{8} (\partial_i A_0)^2, \quad (4.111)$$

mostrando, assim, como conseguimos conferir dinâmica, por meio de correções quânticas, para os campos auxiliares através do surgimento de um objeto semelhante àquele existente para o campo bosônico da EDQ. Este é um resultado importante para a validação desta proposta de modelo isotrópico de eletrodinâmica quântica emergente, pois contribui para conceder aos campos  $A_{i,0}$  um comportamento compatível com o do fóton na eletrodinâmica quântica.

É válido destacar, entretanto, que a indução radiativa do termo cinético cria um termo extra,

$$\frac{m^2}{8} (\partial_i A_0)^2, \quad (4.112)$$

para a lagrangiana efetiva do sistema que, com as correções de um loop de segunda

ordem, tem a seguinte configuração:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}}^{(2)} = -\frac{1}{4}m^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{8}(\partial_i A_0)^2 - m^{-2}\zeta_i \frac{\tilde{\alpha}_{13}}{2} g^{ij} A_i A_j, \quad (4.113)$$

com  $\zeta_i = \frac{2^{1/2}}{5\lambda_2^{1/2}}$ ,  $\tilde{\alpha}_{13} = e^2\alpha_{13}$  e  $[\alpha_{13}] = 4$ .

#### 4.2.4 Função de três pontos

Seguindo para correções de um loop de ordem mais alta, apresentamos aqui nossos cálculos para as funções de três pontos. Por já termos apresentado, em seções anteriores, o procedimento matemático aqui empregado, abreviamos a sua descrição.

Tomando  $l = 3$  em (4.51), temos, desconsiderando momentos externos, que contribuem apenas para termos de ordens altas da expansão, irrelevantes para o nosso propósito,

$$S_{ef}^{(3)} = \frac{i}{3} \text{Tr} \left\{ \frac{e[A_0\gamma^0 + A_i\gamma^i(p_a p^a)^n]}{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i(p_a p^a)^n - m^z} \times \frac{e[A_0\gamma^0 + A_j\gamma^j(p_b p^b)^n]}{p_0\gamma^0 + p_j\gamma^j(p_b p^b)^n - m^z} \right. \\ \left. \times \frac{e[A_0\gamma^0 + A_k\gamma^k(p_c p^c)^n]}{p_0\gamma^0 + p_k\gamma^k(p_c p^c)^n - m^z} \right\}, \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(3)} &= \frac{ie^3}{3} \text{Tr} G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^3}{3} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^3}{3} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^j A_j (p_b p^b)^n G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^3}{3} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^j A_j (p_b p^b)^n G(p)\gamma^k A_k (p_c p^c)^n, \quad (4.115) \\
&= \frac{ie^3}{3} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{000})_z A_0 A_0 A_0 + \frac{ie^3}{3} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{i00})_z A_i A_0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^3}{3} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{ij0})_z A_i A_j A_0 + \frac{ie^3}{3} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{ijk})_z A_i A_j A_k, \\
&= \frac{ie^3}{3} \int d^4 x (\Pi^{\mu\nu\alpha})_z A_\mu A_\nu A_\alpha,
\end{aligned}$$

com

$$(\Pi^{\mu\nu\alpha})_z = \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p)\Gamma^\mu(p)G(p)\Gamma^\nu(p)G(p)\Gamma^\alpha(p). \quad (4.116)$$

Contudo, ao efetuarmos o processo de integração, vemos que as contribuições para  $S_{ef}^{(3)}$  são nulas para qualquer  $z$  ímpar, ou seja,

$$(\Pi^{000})_z = (\Pi^{i00})_z = (\Pi^{ij0})_z = (\Pi^{ijk})_z = 0. \quad (4.117)$$

### 4.2.5 Função de quatro pontos

Por último, calculamos o quarto termo da série (4.51),

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(4)} &= \frac{i}{4} \text{Tr} \left\{ \frac{e[A_0\gamma^0 + A_i\gamma^i(p_a p^a)^n]}{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i(p_a p^a)^n - m^z} \times \frac{e[A_0\gamma^0 + A_j\gamma^j(p_b p^b)^n]}{p_0\gamma^0 + p_j\gamma^j(p_b p^b)^n - m^z} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{e[A_0\gamma^0 + A_k\gamma^k(p_c p^c)^n]}{p_0\gamma^0 + p_k\gamma^k(p_c p^c)^n - m^z} \times \frac{e[A_0\gamma^0 + A_m\gamma^m(p_d p^d)^n]}{p_0\gamma^0 + p_m\gamma^m(p_d p^d)^n - m^z} \right\}, \quad (4.118)
\end{aligned}$$

que contém as funções de quatro pontos que originam as correções radiativas de quarta ordem, as correções de ordem mais alta com contribuições não nulas para nossos cálculos.

Escrevendo (4.118) em termos do propagador fermiônico e, em seguida, das funções de quatro pontos, encontramos

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(4)} &= \frac{ie^4}{4} \text{Tr} G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^j A_j (p_b p^b)^n G(p)\gamma^0 A_0 G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^j A_j (p_b p^b)^n G(p)\gamma^k A_k (p_c p^c)^n G(p)\gamma^0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \text{Tr} G(p)\gamma^i A_i (p_a p^a)^n G(p)\gamma^j A_j (p_b p^b)^n \\
&\quad \quad \times G(p)\gamma^k A_k (p_c p^c)^n G(p)\gamma^m A_m (p_d p^d)^n, \\
&= \frac{ie^4}{4} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{0000})_z A_0 A_0 A_0 A_0 + \frac{ie^4}{4} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{i000})_z A_i A_0 A_0 A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{ij00})_z A_i A_j A_0 A_0 + \frac{ie^4}{4} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{ijk0})_z A_i A_j A_k A_0 \\
&\quad + \frac{ie^4}{4} \int dx_0 d^3 x (\Pi^{ijklm})_z A_i A_j A_k A_m, \\
&= \frac{ie^4}{4} \int d^4 x (\Pi^{\mu\nu\alpha\beta})_z A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta,
\end{aligned} \tag{4.119}$$

sendo

$$(\Pi^{\mu\nu\alpha\beta})_z = \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p)\Gamma^\mu(p)G(p)\Gamma^\nu(p)G(p)\Gamma^\alpha(p)G(p)\Gamma^\beta(p). \tag{4.120}$$

Através de um esquema semelhante ao apresentado para os termos anteriores, após uma rotação de Wick, resolvemos (4.119) para  $z = 2n + 1$  e chegamos ao

resultado

$$(\Pi^{\mu\nu\alpha\beta})_z = (\Pi^{ijab})_z \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} &= \Gamma\left(\frac{d-4}{2z} + 2\right) \Gamma\left(-\frac{d+z-4}{2z}\right) (g^{ab}g^{ij} - g^{ai}g^{bj} + g^{aj}g^{bi}) \\ &\times \frac{i2^{-d-1}(d-4)\pi^{\frac{1}{2}(-d-1)}(z-1)((d+1)(z-1) - 3z + 5)m^{d+z-4}}{z^3\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.122)$$

Assim, para  $z = 1$ , encontramos

$$(\Pi^{0000})_1 = (\Pi^{i000})_1 = (\Pi^{ij00})_1 = (\Pi^{ijk0})_1 = 0. \quad (4.123)$$

A única das funções de quatro pontos não nula é aquela puramente espacial,

$$(\Pi^{ijab})_1 = \frac{i\pi^{-\frac{d}{2}-1}m^{d-3} \operatorname{sen}(\pi d)\Gamma(2-d)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (g^{ab}g^{ij} - 2g^{ai}g^{bj} + g^{aj}g^{bi})}{3 \cdot 2}. \quad (4.124)$$

No entanto, ela também não contribuirá para a ação, pois é anulada ao ser contraída com os campos auxiliares

$$(\Pi^{ijab})_1 A_i A_j A_a A_b = 0. \quad (4.125)$$

Isso revela que, para  $z = 1$  (na ausência de momento externo), o termo de ordem quatro da ação efetiva não produz correção quântica, conforme esperado, uma vez que esta correção não existe na EDQ usual.

Para  $z = 3$ , assim como ocorreu com  $z = 1$ ,

$$(\Pi^{0000})_3 = (\Pi^{i000})_3 = (\Pi^{ij00})_3 = (\Pi^{ijk0})_3 = 0. \quad (4.126)$$

E apenas  $(\Pi^{ijab})_3$ , dado por

$$(\Pi^{ijab})_3 = \frac{im^2\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)(97g^{ab}g^{ij} - 218g^{ai}g^{bj} + 97g^{aj}g^{bi})}{2430\pi^{5/2}}, \quad (4.127)$$

mostrou-se diferente de zero, com

$$\begin{aligned} (\Pi^{ijab})_3 A_i A_j A_a A_b &= -\frac{4im^2\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{405\pi^{5/2}} A_i A^i A_j A^j, \\ &= \frac{4im^2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{135\pi^{5/2}} A_i A^i A_j A^j, \\ &= \frac{i\beta_3}{4} A_i A^i A_j A^j, \end{aligned} \quad (4.128)$$

sendo  $\beta_3$  o valor de  $\beta_z$  com  $z = 3$ , tal que  $[\beta_3] = 2$ . Por conseguinte,

$$\mathcal{L}_{ef}^{(4)} = -\frac{e^4\beta_3}{4} A_i A^i A_j A^j. \quad (4.129)$$

Após aplicarmos o escalonamento descrito na seção 4.2.3, juntando todas as correções de um loop calculadas até aqui, por meio da equação (4.48), construímos a lagrangiana efetiva do sistema com  $z = 3$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= \frac{g_t^2}{2} m^2 \zeta_0 A_0^2 + \frac{g_s^2}{2} m^{-2} \zeta_i A_i A^i - \frac{1}{4} m^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{4} (\partial_i A_0)^2 \\ &\quad + e^2 m^{-2} \frac{\tilde{\alpha}_{13} \zeta_i}{2} g^{ij} A_i A_j - e^4 m^{-4} \frac{\beta_3 \zeta_i^2}{4} A_i A^i A_j A^j, \end{aligned} \quad (4.130)$$

sendo  $\zeta_0 = \frac{2\lambda_2^{1/2}}{5\lambda_1}$ ,  $\zeta_i = \frac{2}{5\lambda_2^{1/2}}$ . Ao separarmos desta expressão os termos de potencial, encontramos a expressão completa, para os campos  $A_0$  e  $A_i$ , do potencial

efetivo

$$V_{ef}(A^0, A^i) = -\frac{e^2}{2G_t}m^2\zeta_0 A_0^2 - \frac{e^2}{2G_s}m^{-2}\zeta_i A_i A^i - e^2 m^{-2} \frac{\tilde{\alpha}_{13}\zeta_i}{2} A_i A^i + e^4 m^{-4} \frac{\beta_3 \zeta_i^2}{4} A_i A^i A_j A^j, \quad (4.131)$$

usando  $g_{s,t}^2 = \frac{e^2}{G_{s,t}}$ . Com isso, da mesma maneira que fizemos na seção 4.2.1, conseguimos reorganizar o potencial efetivo e escrevê-lo como um potencial bumblebee:

$$V_{ef}(A^0, A^i) = -\frac{g_t^2}{2}m^2\zeta_0 A_0^2 + \frac{m^2\tilde{\beta}_3\zeta_i^2}{4} \left( A_i A^i - \frac{a_i a^i}{e^2} \right)^2, \quad (4.132)$$

com o acréscimo da constante adimensional  $\tilde{\beta}_3 = e^4 \frac{\beta_3}{m^6}$ . Desta forma, conseguimos corroborar o resultado (4.47), desta vez calculando o potencial com o uso das correções quânticas de ordem dois e quatro.

Com esta nova configuração para o potencial efetivo, a equação (4.130) ganha a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{g_t^2}{2}m^2\zeta_0 A_0^2 - \frac{1}{4}m^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{4}(\partial_i A_0)^2 - \frac{m^2\tilde{\beta}_3\zeta_i^2}{4} \left( A_i A^i - \frac{a_i a^i}{e^2} \right)^2. \quad (4.133)$$

Esta lagrangiana é formada por um termo de massa para  $A_0$ , pelo termo de Maxwell, um termo com derivada de segunda ordem e o potencial bumblebee para  $A_i$ . O termo com duas derivadas, surgido durante o processo de indução do termo de Maxwell, pode ser considerado um termo espúrio, uma vez que não existe na EDQ usual. Por isso, buscamos um meio de eliminá-lo. Uma opção é considerar o limite de acoplamento forte ( $g_t \rightarrow 0$ ), que torna a teoria uma teoria de calibre e permite-nos assumir  $(\partial_i A_0)^2 = 0$  como nossa escolha de calibre. Assim,



a lagrangiana efetiva assume a forma simplificada que desejamos:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = -\frac{1}{4}m^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{4m^2\tilde{\beta}_3}{100\lambda_2} \left( A_i A^i - \frac{a_i a^i}{e^2} \right)^2 \quad (4.134)$$

Todavia, devemos ainda observar que, segundo (4.106),  $\lambda_2 < 0$  e, portanto, a transformação (4.109) é imaginária e elimina a quebra espontânea da simetria rotacional, uma vez que inverte os sinais dos termos do potencial efetivo. Sendo assim, no nosso modelo, a construção do termo de Maxwell inviabiliza a violação espontânea de simetria. Mas, por outro lado, podemos escolher considerar  $\lambda_2 = -|\lambda_2|$  em (4.108) e escrever o escalonamento em termos de  $|\lambda_2|$ , o que resulta em:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = -\frac{1}{2}m^2 F_{0i}F^{0i} + \frac{1}{4}m^2 F_{ij}F^{ij} - \frac{4m^2\tilde{\beta}_3}{100|\lambda_2|} \left( A_i A^i - \frac{a_i a^i}{e^2} \right)^2. \quad (4.135)$$

Assim, embora percamos a restauração perturbativa da simetria de Lorentz, preservamos a violação espontânea da simetria rotacional. Ademais, nosso modelo, além de demonstrar a aplicabilidade da metodologia dos modelos bumblebee em teorias do tipo Hořava-Lifshitz, que pode permitir sua utilização em estudos de matéria condensada, preserva ainda uma característica do modelo de quatro férmions com invariância de Lorentz, que é, partindo de uma lagrangiana que apresenta simetria global  $U(1)$ , chegar a uma lagrangiana com simetria local  $U(1)$  nos mínimos do potencial [65].

# Capítulo 5

## ANOMALIA ABJ NA EDQ COM EXTENSÃO DE HOŘAVA-LIFSHITZ

No presente capítulo, estudamos alguns aspectos da introdução da formulação de Hořava-Lifshitz na eletrodinâmica quântica. Com foco no caso com expoente crítico  $z = 3$ , calculamos correções quânticas de um loop e mostramos como é possível com elas induzir o surgimento da ação livre de Maxwell a partir do setor fermiônico de EDQ de Hořava-Lifshitz. Além disso, analisamos a possibilidade da ocorrência da anomalia ABJ neste modelo.

### 5.1 Anomalia ABJ

Com o avanço dos estudos sobre teorias quânticas de campos do tipo Hořava-Lifshitz, tem-se buscado compreender aspectos mais sofisticados destes modelos, e um desses aspectos é o problema das anomalias. Chamamos de ano-

malia a quebra, decorrente de efeitos quânticos, de uma determinada lei de conservação associada a uma simetria clássica de um dado sistema [66]. Este efeito foi observado pela primeira vez na teoria de perturbação em um processo de regularização UV de um diagrama divergente [67]. Contudo, este não é um efeito exclusivo da regularização, podendo surgir em diversos procedimentos. Anomalias podem emergir, por exemplo, como uma singularidade infravermelha através do método de relações de dispersão [68, 69] ou regras de soma [70]. Elas também são identificadas com o uso de integrais de trajetória, através de transformações quirais da medida da integral [71, 72].

Nos últimos anos tem ocorrido um crescimento da atenção dada a questão das anomalias, e este trouxe consigo o desenvolvimento de novos instrumentos matemáticos para a descrição desse fenômeno. Como exemplo, podemos citar o uso de geometria diferencial [73–79], topologia [80–91] e cohomologia [92–95].

Um caso de destacada importância é o da anomalia Adler-Bell-Jackiw (ABJ) [96], também conhecida como anomalia triangular ou quiral. Em particular, muito do interesse pelo estudo dessa questão no contexto das teorias do tipo HL [97, 98] está diretamente relacionado ao fato de que esta anomalia é a única capaz de causar ambiguidades em teorias com pequenas violações da simetria Lorentz [99]. A anomalia ABJ é um tipo de anomalia global  $U(1)$  encontrada em algumas teorias quânticas de campos em que a corrente quiral não é conservada. A não conservação desta corrente se dá quando a representação espinorial na teoria apresenta classicamente simetria quiral, i.e., a teoria é aplicável igualmente para férmions de mão direita e mão esquerda, mas perde esta propriedade após a quantização. Isto ocorre porque, nestes casos, a medida da integral de trajetória ( $D\psi$ ) não possui esta simetria.

Uma característica crucial da anomalia ABJ é que ela é irreduzível, o que significa que não é possível acrescentar contra termos ao diagrama triangular que a descreve de modo a garantir a preservação da conservação da corrente vetorial e a consequente eliminação da anomalia. É possível demonstrar, inclusive, que não existe maneira de se alterar a eletrodinâmica quântica de modo a eliminar a anomalia quiral sem a perda de alguma propriedade fundamental, como renormalizabilidade, invariância de calibre ou unitariedade. O que mostra que esta anomalia é de fato uma propriedade física da EDQ, embora inexista na teoria clássica.

Um exemplo de cálculo desta anomalia é tratado no Apêndice A.

## 5.2 Correções quânticas para a EDQ com $z = 3$

Para uma melhor compreensão do cenário que origina a anomalia ABJ, precisamos conhecer a eletrodinâmica quântica. No caso do nosso trabalho, precisamos, mais especificamente, de algum conhecimento a respeito dos efeitos da incorporação do escalonamento de Lifshitz na EDQ.

Ainda antes da publicação do modelo gravitacional de Petr Hořava, importantes trabalhos já empregavam o escalonamento de Lifshitz em teorias quânticas de campos, buscando criar modelos com derivadas espaciais de alta ordem sem com isso alterar o comportamento das derivadas temporais, evitando assim o surgimento de campos fantasmas [100–104]. Contudo, o relativo sucesso da utilização desta anisotropia no contexto da gravitação fez o uso da quebra explícita da simetria de Lorentz via escalonamento de Lifshitz se popularizar. Nesta conjuntura,

surtem extensões de Hořava-Lifshitz da eletrodinâmica quântica para diversos valores do expoente  $z$ . Essas versões da EDQ visam incorporar a formulação de Hořava para, entre outras coisas, incrementar a convergência de integrais de loop.

Para além daqueles já citados aqui anteriormente, diversos outros estudos têm sido realizados recentemente no âmbito da eletrodinâmica quântica de Hořava-Lifshitz. Como exemplos importantes, podemos destacar análises do modelo de Liouville [105], dependência de calibre [106] e de correções quânticas para a EDQ com  $z = 2$  [18]. Também já foram estudados modelos de EDQ em 5 dimensões [107], eletrodinâmica clássica [108], o efeito Casimir em uma teoria de campo escalar [109], além de teorias supersimétricas [110, 111].

Para estudar efeitos do escalonamento de Lifshitz na EDQ, na presente seção, analisamos, via expansão perturbativa, o setor fermiônico de uma versão de Hořava-Lifshitz da lagrangiana da eletrodinâmica quântica com expoente crítico  $z = 3$ , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}\Delta^2F^{ij} + \bar{\psi}[iD_0\gamma^0 + (iD_i\gamma^i)^3 - m^3]\psi \\ &= \bar{\psi}[i\partial_0\gamma^0 + eA_0\gamma^0 - i(\partial_i - ieA_i)\gamma^i(\partial_j - ieA_j)\gamma^j(\partial_k - ieA_k)\gamma^k - m^3]\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}\Delta^2F^{ij}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

já estudada em [11] e também em [18], neste último com  $z = 2$  e a adição de um campo escalar, revelando apenas correções nulas. As dimensões de massa dos objetos em (5.1) são

$$[A_0] = 2, [A_i] = 0, [\psi] = \frac{3}{2}, [e] = [m] = [1], [\partial_0] = 3, [\partial_i] = 1 \quad (5.2)$$

e a ação relacionada a esta lagrangiana é invariante sob as transformações de

calibre

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha}\psi, \quad A_{0,i} \rightarrow A_{0,i} + \partial_{0,i}\alpha. \quad (5.3)$$

Nosso propósito inicial é induzir a geração da ação livre de Maxwell a partir de correções radiativas no setor fermiônico do modelo. Para calcular as correções de um loop, nosso primeiro passo deve ser a obtenção do propagador fermiônico, aqui designado por  $G(p)$  e dado por

$$G(p) = \frac{i\partial_0 + i\gamma^i\partial_i\Delta + m^3}{\partial_0^2 - \Delta^3 - m^6}. \quad (5.4)$$

Sabendo que no espaço dos momentos  $i\partial_i \rightarrow k_i$ , quando a derivada atua nos campos de calibre, e  $i\partial_i \rightarrow p_i$ , quando a derivação se dá nos espinores,  $G(p)$  pode então ser escrito como

$$G(p) = \frac{1}{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_j p^j) - m^3} = \frac{\not{p}_0 + \not{p}_i(p_j p^j) + m^3}{p_0^2 + (p_j p^j)^3 - m^6}, \quad (5.5)$$

conforme já apresentado anteriormente no capítulo 4.

A partir dos termos de interação da lagrangiana calculamos os vértices trilineares  $V^l$  e  $V^0$ . Ao efetuarmos os produtos que descrevem a relação entre fótons e férmions em (5.1), ignorando os termos de ordem superior a  $\mathcal{O}(e^2)$ , dos termos espaciais temos

$$\bar{V}\psi = \gamma^i\gamma^j\gamma^k V_{ijk}\psi, \quad (5.6)$$

sendo,

$$V_{ijk} = \partial_i\partial_j A_k\psi + \partial_i A_j(\partial_k\psi) + A_i(\partial_j\partial_k\psi). \quad (5.7)$$

Ao contrairmos as matrizes de Dirac com os campos e derivadas, a equação (5.6)

torna-se

$$\begin{aligned}\bar{V}\psi = & e(\partial_i\partial^i A_k)\gamma^k\psi + 2e(\partial_i A_k)\gamma^k\partial^i\psi + 2eA_k\gamma^k(\partial_i\partial^i\psi) + e(\partial_i A_j)\gamma^j\gamma^j\gamma^k(\partial_k\psi) \\ & + eA_j\gamma^i\gamma^j\gamma^k(\partial_i\partial_k\psi),\end{aligned}\tag{5.8}$$

com

$$\begin{aligned}(\partial_i A_j)\gamma^j\gamma^j\gamma^k(\partial_k\psi) &= (\partial_i A_j), (g^{ij}\gamma^k + g^{jk}\gamma^i - g^{ik}\gamma^j - i\epsilon^{aijk}\gamma_a\gamma^5)(\partial_k\psi) \\ &= (\partial^j A_j)\gamma^k(\partial_k\psi) + (\partial_i A^k)\gamma^i(\partial_k\psi) - (\partial^k A_j)\gamma^j(\partial_k\psi)\end{aligned}\tag{5.9}$$

e

$$\begin{aligned}A_j\gamma^i\gamma^j\gamma^k(\partial_i\partial_k\psi) &= A_j\gamma^k(\partial^j\partial_k\psi) + A_j\gamma^i(\partial_i\partial^j\psi) - A_j\gamma^j(\partial^k\partial_k\psi), \\ &= 2A_j\gamma^k(\partial^j\partial_k\psi) - A_j\gamma^j(\partial_k\partial^k\psi).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Logo,  $\bar{V}\psi$  será


$$\begin{aligned}\bar{V}\psi = & e(\partial_i\partial^i A_k)\gamma^k\psi + e(\partial_i A_k)\gamma^k(\partial^i\psi) + eA_k\gamma^k(\partial_i\partial^i\psi) + e(\partial^j A_j)\gamma^k(\partial_k\psi) \\ & + e(\partial_i A_k)\gamma^i(\partial^k\psi) + 2eA_j\gamma^k(\partial^j\partial_k\psi).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Com isso, encontramos  $\bar{V}(p, k)$ ,

$$\bar{V}(p, k) = ek_i^2 A_l \gamma^l + ek_i A_l \gamma^l p^i + eA_l \gamma^l p_i^2 + ek^i A_i \gamma^l p_l + ek_i A_l \gamma^i p^l + 2eA_l \gamma^i p^l p_i. \tag{5.12}$$

A partir deste ponto, iremos computar as correções de um loop de segunda ordem representadas pelo diagrama de polarização do vácuo, ou autoenergia do fóton,

**Figura 5.1: Representação diagramática das correções de segunda ordem**



$$= \Pi^{00} + \Pi^{l0} + \Pi^{0l} + \Pi^{lm}$$

Fonte: Autor, 2018.

Estas correções podem, conforme feito no capítulo 4, ser todas obtidas através da versão expandida da ação efetiva,

$$S_{ef}^{(l)} = i \text{Tr} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[ \frac{V_0 + \bar{V}}{\not{p}_0 + \not{p}_i p_j^2 - m^3} \right]^l, \quad (5.13)$$

com  $\bar{V}$  dado por (5.12), contendo a parte espacial do campo de calibre, e

$$V_0 = eA_0\gamma^0. \quad (5.14)$$

Mais especificamente, as correções são computadas através dos termos de segunda ordem de (5.13), aqui escritos em função do propagador  $G(p)$ :

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} = & i \text{Tr} \{ G(p) \not{A}_0 G(p) \not{A}_0 + G(p) \not{A}_0 G(p) V^l A_l \\ & + G(p) V^l(p-k, k) A_l G(p) \not{A}_0 + G(p) V^l(p-k, k) A_l G(p) V^m(p-k, k) A_m \}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

O vértice  $V^l(p-k, k)$  é obtido passando-se o campo  $A_l$  para o final dos termos



de  $\bar{V}(p, k)$  em (5.12):

$$\begin{aligned}
\bar{V}(p, k) &= ek_i^2 \gamma^l A_l + ek_i \gamma^l (p^i - k^i) A_l + e \gamma^l (p_i - k_i)^2 A_l \\
&\quad + ek^l \gamma^i (p_i - k_i) A_l + ek_i \gamma^i (p^l - k^l) A_l \\
&\quad + 2e \gamma^i (p^l - k^l) (p_i - k_i) A_l, \\
&= V^l(p - k, k) A_l.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

De tal modo que, separando o campo de calibre, encontramos a expressão para o vértice:

$$\begin{aligned}
V^l(p - k, k) &= ek_i^2 \gamma^l + ek_i \gamma^l (p^i - k^i) + e \gamma^l (p_i - k_i)^2 \\
&\quad + ek^l \gamma^i (p_i - k_i) + ek_i \gamma^i (p^l - k^l) \\
&\quad + 2e \gamma^i (p^l - k^l) (p_i - k_i).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Voltando para (5.15), usando

$$\begin{aligned}
A_{i,0} A_{i,0} p^l &= (p^l - k^l - k'^l) A_{i,0} A_{i,0} \\
&= p^l A_{i,0} A_{i,0},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

com  $k^l = -k'^l$ , passamos desta vez os campos  $A_{i,0}$  pelos propagadores  $G(p)$  e, após efetuarmos o traço no espaço dos momentos, obtemos uma expressão integral para

a ação efetiva,

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(2)} = & \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p-k) \gamma^0 A_0 A_0 \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) V^l(p-k, k) G(p-k) V^m(p, k) A_l A_m \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p-k) V^l(p, k) A_0 A_l \\
& + \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) V^l(p-k, k) G(p-k) \gamma^0 A_l A_0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Por meio dos termos de auto-energia do fóton, a equação acima pode ainda ser sintetizada da seguinte forma:

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{i}{2} \int d^4x \Pi^{00} A_0 A_0 + \frac{i}{2} \int d^4x \Pi^{lm} A_l A_m + \frac{i}{2} \int d^4x \Pi^{0l} A_0 A_l + \frac{i}{2} \int d^4x \Pi^{l0} A_l A_0. \tag{5.20}$$

Nosso próximo passo é, por meio da equação (5.19), visando a indução da ação de Maxwell, construirmos um termo cinético da forma de  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , o que explica o fato de a polarização do vácuo ser a única correção relevante para nosso propósito, uma vez que o tadpole e as outras correções de ordens diferentes não produzem contribuições quadráticas no momento externo. No entanto, uma vez que estamos estudando um modelo não covariante, necessitamos obter separadamente as componentes  $F_{0l} F^{0l}$  e  $F_{lm} F^{lm}$  de  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Optamos então por iniciar os cálculos com as componentes de  $F_{0l} F^{0l}$ , a saber

$$\partial_l A_0 \partial^l A^0, \quad \partial_0 A_l \partial^0 A^l, \quad \partial_0 A_l \partial^l A^0, \quad \partial_l A_0 \partial^0 A^l. \tag{5.21}$$

A componente  $\partial_l A_0 \partial^0 A^l$ , associada a  $\Pi^{0l}$ , é dada pela expressão

$$\Omega^{(0l)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p-k) V^l(p, k) A_0 A_l, \quad (5.22)$$

sendo o propagador transladado,  $G(p-k)$ , tal que

$$\begin{aligned} G(p-k) &= \frac{1}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_i - k_i) \gamma^i (k_j - p_j)^2 - m^3}, \\ &= \frac{1}{(p_0 - k_0) \gamma^0 + (p_i - k_i) \gamma^i (k_j^2 - 2k_j p_j + p_j^2) - m^3}, \\ &= \{ -k_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i (-2p_j k_j + k_j^2) - k_i \gamma^i (p_j^2 - 2p_j k_j + k_j^2) \\ &\quad + p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i k_j^2 - m^3 \}^{-1}, \\ &= \frac{1}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i p_j^2 - m^3 - \lambda}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

com

$$\lambda = k_0 \gamma^0 - p_i \gamma^i (-2p_j k_j + k_j^2) + k_i \gamma^i (p_j^2 - 2p_j k_j + k_j^2). \quad (5.24)$$

Deste modo, encontramos a equação para  $\Omega^{(0l)}$ , dada por

$$\Omega^{(0l)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \not{p}_0 + \not{p}_i (p_j p_j) - m^3 \gamma^0 \frac{1}{p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i p_j^2 - m^3 - \lambda} V^l(p, k) A_0 A_l, \quad (5.25)$$

retirada de (5.19). Para resolver  $\Omega^{(0l)}$ , precisamos adotar alguns procedimentos, sendo o primeiro deles expandir  $G(p-k)$  até a segunda ordem no parâmetro  $\lambda$ , o que nos leva a

$$G(p-k) = G(p) + G(p) \lambda G(p) + G(p) \lambda G(p) \lambda G(p) + O(\lambda^3), \quad (5.26)$$

e resulta em

$$\begin{aligned}
\Omega^{(0l)} &= \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) V^l(p, k) A_0 A_l \\
&+ \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 [G(p) \lambda G(p)] V^l(p, k) A_0 A_l \\
&+ \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 [G(p) \lambda G(p) \lambda G(p)] V^l(p, k) A_0 A_l + \mathcal{O}(\lambda^3).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Após isso, limitando-nos aos termos com dois momentos externos, conseguimos separar  $\Omega^{(0l)}$  em três partes, i.e.,

$$\Omega^{(0l)} = \Omega_1^{(0l)} + \Omega_2^{(0l)} + \Omega_3^{(0l)}, \tag{5.28}$$

com  $\Omega_1^{(0l)}$  sendo o termo de ordem zero em  $\lambda$ ,

$$\Omega_1^{(0l)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) k_i^2 \gamma^l A_0 A_l, \tag{5.29}$$

$\Omega_2^{(0l)}$  contendo a parte do vértice  $V^l$  dependente de  $k_0$  e  $k_i$ ,

$$\Omega_2^{(0l)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) \not{k}_0 G(p) [\gamma^l p_i k^i + p_i k^i k^l + k_i \gamma^i p^l] A_0 A_l, \tag{5.30}$$

e  $\Omega_3^{(0l)}$  englobando os termos restantes,

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_3^{(0l)} &= \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) \not{k}_0 G(p) (2\not{p}_i p_j k^j + \not{k}_i p_j^2) G(p) \\
&\times [\gamma^l p_i p^i + 2\gamma^j p^l p_j] A_0 A_l.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Uma vez conhecidas estas três componentes, podemos então resolvê-las isoladamente, diminuindo o grau de complexidade dos nossos cálculos. Começando

por  $\Omega_1^{(0l)}$ , aplicando (5.5) em (5.29), chegamos a

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(0l)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^2} & \left[ k_i^2 m^3 p_i^2 \gamma^0 \not{p}_i \gamma^l + k_i^2 m^3 p_i^2 \not{p}_i \gamma^0 \gamma^l \right. \\ & \left. + k_i^2 p_i^2 \not{p} \gamma^0 \not{p} \gamma^l + k_i^2 \not{p}_0 \gamma^0 \not{p}_0 \gamma^l + k_i^2 \gamma^0 \gamma^l m^6 \right] A_0 A_l. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Mas o traço do integrando acima é nulo. Logo

$$\Omega_1^{(0l)} = 0, \quad (5.33)$$

e, portanto, esta componente não produz contribuição para o termo cinético. Para  $\Omega_2^{(0l)}$ , após o cálculo do traço, com o procedimento de regularização dimensional, temos

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(0l)} = \mu^{3-d} \frac{e^2}{2} \int \frac{dp_0 d^d p}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3} & \left[ 12 A_0 p_0^2 k_0 \vec{p}^4 A_l k^l \right. \\ & + 24 A_0 p_0^2 k_0 \vec{p}^2 A_l p^l p_j k^j + 4 m^6 A_0 k_0 \vec{p}^4 A_l k^l + 8 m^6 A_0 k_0 \vec{p}^2 A_l p^l p_k k^k \\ & \left. + 4 A_0 p_0^0 \vec{k}^{10} A_l p^l + 8 A_0 p_0^0 \vec{k}^8 A_l k^l k_k p^k \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Contudo, esta componente também não produz contribuição, sendo anulada com a integração na parte espacial do momento. Dessa forma,

$$\Omega_2^{(0l)} = 0. \quad (5.35)$$

A última componente ainda a ser calculada,  $\Omega_3^{(0l)}$ , dá-nos, após efetuarmos o traço

e uma rotação de Wick,

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{(0l)} = & -\mu^{3-d} \frac{e^2}{2} \int \frac{dp_0 d^d p}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{(-p_0^2 - \vec{p}^2 - m^6)^4} \left[ -64ip_0^2 m^6 k^0 A_0 \vec{p}^2 p^l A_l \vec{p} \cdot \vec{k} \right. \\
& - 8ip_0^2 m^6 k^0 A_0 \vec{p}^4 k^l A_l + 440ip_0^2 k_0 A_0 \vec{p}^8 p^l A_l \vec{p} \cdot \vec{k} - 64ip_0^4 k^0 A_0 \vec{p}^2 p^l A_l \vec{k} \cdot \vec{p} \\
& - 8ik_0^2 p^0 A_0 \vec{k}^{10} p^l A_l - 8ip_0^4 k^0 A_0 \vec{p}^4 k^l A_l - 72im^6 k^0 A_0 \vec{p}^8 p^l A_l \vec{p} \cdot \vec{k} \\
& \left. - 72ik^0 A_0 \vec{p}^4 4p^l A_l \vec{p} \cdot \vec{k} \right]. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Em seguida, utilizando coordenadas esféricas em  $d$  dimensões na parte espacial dos momentos internos, realizamos a integração sobre as componentes temporais do momento e encontramos

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{(0l)} = & \mu^{3-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{e^2}{2} \int \frac{dr r^{d-1}}{(2\pi)^d} \left[ -\frac{k^0 A_0 r^{10} \left(\frac{1}{m^6+r^6}\right)^{5/2} k^l A_l}{2d} \right. \\
& + \frac{4m^6 k^0 A_0 r^4 \left(\frac{1}{m^6+r^6}\right)^{5/2} k^l A_l}{d} + \frac{1}{2} k^0 A_0 r^{10} \left(\frac{1}{m^6+r^6}\right)^{5/2} k^l A_l \\
& \left. + \frac{1}{2} m^6 k^0 A_0 r^4 \left(\frac{1}{m^6+r^6}\right)^{5/2} k^l A_l \right]. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Resolvendo por fim a integral em  $r$ , obtemos, já no espaço de Minkowski,

$$\Omega_3^{(0l)} = \frac{ie^2 \mu^{3-d} 2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} (k_0 \cdot A_0) (\vec{k} \cdot \vec{A}). \tag{5.38}$$

Como esta é a única contribuição diferente de zero para  $\partial_l A_0 \partial^0 A^l$ , então

$$\Omega^{(0l)} = \Omega_3^{(0l)}. \tag{5.39}$$

A contribuição de  $\partial_l A_0 \partial^l A^0$ , dada por  $\Omega^{(00)}$  e associada a  $\Pi^{00}$ , é

$$\Omega^{(00)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p-k) \gamma^0 A_0 A_0. \quad (5.40)$$

Desta vez, após o emprego da expansão (5.26), separamos a expressão em duas partes,

$$\Omega^{(00)} = \Omega_1^{(00)} + \Omega_2^{(00)}, \quad (5.41)$$

sendo a primeira delas,  $\Omega_1^{(00)}$ , independente de  $\lambda$ ,

$$\Omega_1^{(00)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) \gamma^0 A_0 A_0 \quad (5.42)$$

e a segunda,  $\Omega_2^{(00)}$ , contendo os termos restantes,

$$\Omega_2^{(00)} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 [G(p) + G(p)\lambda G(p) + G(p)\lambda G(p)\lambda G(p)] \gamma^0 A_0 A_0. \quad (5.43)$$

Calculado o traço da parte sem momento externo (5.42), obtemos

$$\Omega_1^{(00)} = \frac{e^2}{2} \int \frac{dp_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0^2 + p_i^6 - m^6)^3} [-4A_0^2 p_i^6 - 4A_0^2 p_0^2 + 8(A_0 p_0)^2 + 4A_0^2 m^6]. \quad (5.44)$$

No espaço euclidiano, por meio de um processo semelhante ao descrito para  $\Omega^{0l}$ , resolvemos a integral na parte temporal dos momentos chegando a

$$\Omega_1^{(00)} = \mu^{3-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{e^2}{2} \int \frac{dr r^{d-1}}{(2\pi)^d} \left\{ iA_0^2 \left( \frac{1}{m^6 + r^6} \right)^{3/2} [(-r^2)^3 + r^6] \right\}. \quad (5.45)$$

Esta integral é anulada pela soma dos termos entre colchetes. Portanto,

$$\Omega_1^{(00)} = 0. \quad (5.46)$$

O segundo termo (5.43), uma vez calculado o traço, torna-se no espaço euclidiano, já excluídos os objetos ímpares nos momentos de integração,

$$\begin{aligned} \Omega_2^{(00)} = & e^2 \mu^{3-d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2)} \int \frac{dp_0 dr}{(2\pi)^{d+1}} \frac{r^{d-1}}{(-p_0^2 - r^6 - m^6)^4} \left[ \frac{40r^{16} A_0^2 \vec{k}^2}{d} + \frac{216p_0^2 A_0^2 r^{10} \vec{k}^2}{d} \right. \\ & + \frac{8m^6 A_0^2 r^{10} \vec{k}^2}{d} + \frac{32p_0^4 A_0^2 r^4 \vec{k}^2}{d} - \frac{32m^{12} A_0^2 r^4 \vec{k}^2}{d} + 4p_0^4 A_0^2 r^4 \vec{k}^2 - 4m^{12} A_0^2 r^4 \vec{k}^2 \\ & \left. - 8m^6 r^{10} A_0^2 \vec{k}^2 - 4A_0^2 r^{16} \vec{k}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Resolvendo as integrações, encontramos a contribuição relativa a  $\partial_l A_0 \partial^l A^0$ ,

$$\Omega_2^{(00)} = - \frac{i\mu^{3-d} e^2 2^{1-d} \pi^{-d/2-1/2} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right) \vec{k}^2 A_0^2}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}. \quad (5.48)$$

Com isso, por (5.46) e (5.41),

$$\Omega^{(00)} = \Omega_2^{(00)}. \quad (5.49)$$

As contribuições relativas a  $\partial_0 A_l \partial^0 A^l$  ( $\Omega^{(ll)}$ ) e a  $\partial_0 A_l \partial^l A^0$  ( $\Omega^{(l0)}$ ) foram obtidas de maneira análoga às aquelas cujos cálculos detalhamos acima. A correção  $\Omega^{(ll)}$  é originada pelos termos com dois momentos temporais de

$$\frac{e^2}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) V^l(p-k, k) G(p-k) V^m(p, k) A_l A_m \quad (5.50)$$



e tem a seguinte forma:

$$\Omega^{(ll)} = -\frac{i\mu^{3-d}e^22^{1-d}\pi^{-d/2-1/2}m^{d-5}\Gamma\left(\frac{5}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}k_0^2A_l^2. \quad (5.51)$$

Já a correção  $\Omega^{(l0)}$  resulta de

$$\frac{e^2}{2}\text{tr}\int d^4x\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G(p)V^l(p-k,k)G(p-k)\gamma^0A_lA_0 \quad (5.52)$$

e é dada pela expressão

$$\Omega_2^{(l0)} = \frac{i\mu^{3-d}e^22^{1-d}\pi^{-d/2-1/2}m^{d-5}\Gamma\left(\frac{5}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}(\vec{k}\cdot\vec{A})(k_0\cdot A_0). \quad (5.53)$$

Com os resultados (5.38), (5.48), (5.51) e (5.53), vemos que todas as contribuições para  $F_{0l}F_{0l}$  têm um mesmo coeficiente finito. Este fato nos permite escrever então a primeira componente do termo cinético como

$$\frac{\xi}{2}F_{0l}F_{0l} = \Omega^{(0l)} + \Omega^{(l0)} + \Omega^{(00)} + \Omega^{(ll)}, \quad (5.54)$$

sendo

$$\xi = -\frac{\mu^{3-d}e^22^{2-d}\pi^{-d/2-1/2}m^{d-5}\Gamma\left(\frac{5}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}. \quad (5.55)$$

A outra componente,  $F_{ij}F_{ij}$ , é, assim como  $\Omega^{(ll)}$ , relacionada a  $\Pi_{lm}$  e decorrente de (5.50). Contudo, ela é resultante dos termos com dois momentos externos

espaciais e é expressa como

$$\Omega_2^{(lm)} = -\frac{i\mu^{3-d}e^22^{-d}(d-2)(d+8)\pi^{-d/2-1/2}m^{d-1}\Gamma\left(\frac{1}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{6}\right)}{9d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \times (k^l k^m - \vec{k}^2 g^{lm}) A_l A_m. \quad (5.56)$$

Assim, podemos escrever a segunda componente do termo cinético como

$$\Omega^{(lm)} = -\frac{1}{4}\chi m^4 F_{lm} F_{lm}, \quad (5.57)$$

com

$$\chi = -\frac{e^2\mu^{3-d}2^{-d+2}(d-2)(d+8)\pi^{-d/2-1/2}m^{d-5}\Gamma\left(\frac{1}{6}-\frac{d}{6}\right)\Gamma\left(\frac{d+2}{6}\right)}{9d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (5.58)$$

Para conseguirmos igualar os coeficientes  $\xi$  e  $\chi$  e, assim, montarmos a ação livre de Maxwell, expandimos os coeficientes  $\xi$  e  $\chi$  em torno de  $d = 3$ , uma vez que estamos estudando um modelo quadridimensional,

$$\xi = -\frac{e^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{9\pi^{5/2}m^2}, \quad (5.59)$$

$$\chi = -\frac{11e^2\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{27\pi^{5/2}m^2}, \quad (5.60)$$

para em sequência reescalarmos os momentos e campos de calibre:

$$k^l \rightarrow \frac{1}{\chi^{\frac{1}{4}}}k^l, \quad (5.61a)$$

$$A^l \rightarrow \frac{1}{m\chi^{\frac{1}{4}}}A^l, \quad (5.61b)$$

$$A^0 \rightarrow \frac{m\chi^{\frac{1}{4}}}{(\xi + 1)^{\frac{1}{2}}} A^0, \quad (5.61c)$$

$$k^0 \rightarrow \frac{m^2\chi^{\frac{1}{4}}}{(\xi + 1)^{\frac{1}{2}}} k^0. \quad (5.61d)$$

Note que, uma vez que  $\xi < 0$ , para que este escalonamento seja válido devemos ter  $|\xi| < 1$ .

Levando-se em consideração o termo com  $F_{0i}F^{0i}$  em (5.1), das correções (5.54) e (5.57) temos:

$$-\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} + \Omega^{(0l)} + \Omega^{(l0)} + \Omega^{(00)} + \Omega^{(ll)} = -\frac{m^2}{2}F_{0l}F^{0l} \quad (5.62)$$

e

$$\Omega_2^{(lm)} = -\frac{1}{4}m^2F_{lm}F^{lm}. \quad (5.63)$$

Com isto, conseguimos construir a partir da ação efetiva (5.19) o termo

$$S_M = \int dx_0 d^3x \left( -\frac{m^2}{2}F_{0l}F^{0l} - \frac{1}{4}m^2F_{lm}F^{lm} \right), \quad (5.64)$$

$$S_M = \int dx_0 d^3x \left( -\frac{m^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right), \quad (5.65)$$

a chamada ação livre de Maxwell.

Este resultado mostra como a EDQ de Hořava-Lifshitz com expoente crítico  $z = 3$  é capaz de induzir, através de correções quânticas de um loop, a ação livre de Maxwell a partir do setor fermiônico da sua lagrangiana.

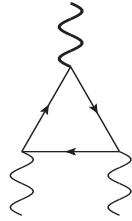
### 5.3 Anomalia ABJ na EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$

Nesta seção discutimos a possibilidade de surgimento da anomalia ABJ na extensão de Hořava-Lifshitz da eletrodinâmica quântica, apresentada na Seção 5.2, mas com a inserção de um campo externo. Para isso utilizamos a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[iD_0\gamma^0 + (iD_i\gamma^i)^3 - m^3 + \not{B}\gamma_5]\psi. \quad (5.66)$$

O diagrama de Feynman que descreve a anomalia no caso que estudamos aqui é apresentado na Figura 5.2, onde a linha ondulada mais escura representa o campo externo  $B_\mu$ ,

**Figura 5.2:** Forma geral da contribuição para a anomalia ABJ



Fonte: Autor, 2018.

O propagador fermiônico com a inserção do campo externo é descrito pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} G_B(p) &= \frac{1}{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i(p_j)^2 - m^3 - \not{B}\gamma_5}, \\ &= G(p) + G(p)\not{B}\gamma_5G(p) + \dots, \end{aligned} \quad (5.67)$$

com  $G(p)$  definido como em (5.5). Sua versão transladada é então escrita como

$$\begin{aligned} G_B(p-k) &= \frac{1}{(p_0 - k_0)\gamma^0 + (p_i - k_i)\gamma^i(p_j - k_j)^2 - m^3 - \not{B}\gamma_5}, \\ &= G(p-k) + G(p-k)\not{B}\gamma_5 G(p-k) + \dots. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Substituindo (5.26) na expressão acima, expressamos agora o propagador transladado como

$$\begin{aligned} G_B(p-k) &= [G(p) + G(p)\lambda G(p) + \dots] \\ &\quad + [G(p) + G(p)\lambda G(p) + \dots] \not{B}\gamma_5 [G(p) + G(p)\lambda G(p) + \dots], \end{aligned} \quad (5.69)$$

com  $\lambda$  dado por (5.24).

Conhecendo a expressão do propagador e os vértices (5.14) e (5.16), construímos finalmente a ação efetiva de segunda ordem com a inserção do campo externo

$$\begin{aligned} S_{efB}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i(p_j p^j)^2 - m^3 - \not{B}\gamma_5} (A_0\gamma^0 + V^l(p-k, k)A_l) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i(p_j p^j)^2 - m^3 - \not{B}\gamma_5} (A_0\gamma^0 + V^m(p-k, k)A_m) \right\}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Ao passarmos os campos de calibre para o final da expressão e computarmos o traço no espaço dos momentos, a ação efetiva assume a forma

$$\begin{aligned} S_{efB}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} \text{tr} \int \frac{dp_0 d^3 p}{(2\pi)^4} [G_B(k)\gamma^0 G_B(k-p)\gamma^0 A_0 A_0 \\ &\quad + G_B(p)V^l(p-k, k)G_B(p-k)V^m(p, k)A_l A_m \\ &\quad + G_B(p)\gamma^0 G_B(p-k)V^l(p, k)A_0 A_l + G_B(p)V^l(p-k, k)G_B(p-k)\gamma^0 A_l A_0], \end{aligned} \quad (5.71)$$

com o uso da identidade

$$A_0 V^l(p - k, k) A_l = V^l(p, k) A_0 A_l. \quad (5.72)$$

Note que, uma vez que nosso cálculo aqui equivale a avaliar o diagrama triangular da Figura 5.2, interessam-nos somente os termos de  $S_{efB}^{(2)}$  que contêm apenas três propagadores e um campo externo. Por esta razão, termos dependentes de  $\lambda$  serão desprezados, permitindo-nos assumir

$$G_B(p - k) \approx G(p) + G(p) \not{B} \gamma_5 G(p). \quad (5.73)$$

Com esta simplificação, encontramos as expressões das contribuições para o diagrama triangular que seguem

$$\Pi^{00} = ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) (B_i \gamma^i + B_0 \gamma^0) \gamma_5 G(p) \gamma^0, \quad (5.74)$$

$$\Pi^{lm} = ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) V^l(p - k, k) G(p) (B_i \gamma^i + B_0 \gamma^0) \gamma_5 G(p) V^m(p, k), \quad (5.75)$$

$$\Pi^{0l} = ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^0 G(p) (B_i \gamma^i + B_0 \gamma^0) \gamma_5 G(p) V^l(p - k, k), \quad (5.76)$$

sabendo que  $\Pi^{0l} = \Pi^{l0}$ . Empregando um método já descrito em detalhes nos capítulos anteriores, resolvemos as integrais acima. Vemos, com isso, que todas elas possuem traço nulo e, por conseguinte,

$$\Pi^{00} = \Pi^{0l} = \Pi^{l0} = \Pi^{lm} = 0. \quad (5.77)$$

Este resultado, ainda que preliminar, indica-nos que os vértices de primeira ordem em  $A_{i,0}$  não produzem contribuição para a anomalia ABJ na EDQ de Lifshitz

com  $z = 3$ , na presença do campo de fundo  $B_\mu$ . Contudo, precisamos ainda incorporar vértices de ordem mais alta para obter um resultado definitivo sobre a ocorrência da anomalia no modelo em questão. Uma vez calculados todos os vértices relevantes para o processo, esperamos confirmar as conclusões encontradas em [97] e [112], onde se constatou a presença da anomalia ABJ em modelos com férmions de Lifshitz ( $z = 3$ ), resultados análogos aos dos casos relativísticos.

## Capítulo 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

No trabalho apresentado nesta tese, dedicamo-nos ao estudo de um tema que tem ganhado bastante relevância nos últimos tempos, em especial na busca por uma teoria capaz de complementar o Modelo Padrão, que é a formulação de Hořava-Lifshitz para teorias quânticas de campos. A parte principal do nosso trabalho se divide basicamente em duas etapas. A primeira delas consiste na aplicação da proposta de espaço-tempo anisotrópico de Hořava em um modelo de quatro férmions. Na segunda parte introduzimos a extensão de Hořava-Lifshitz para a eletrodinâmica quântica. Em ambos os casos, buscamos avaliar algumas das consequências nas teorias da realização de uma mudança tão drástica quanto a modificação de uma estrutura física fundamental para a nossa descrição do universo como é o espaço-tempo. A escolha na primeira parte do trabalho por um modelo com interação fermiônica quártica se deu em razão do valor do papel que estes desempenham como parametrizações de baixa energia para teorias funda-



---

mentais, valor em grande parte relacionado com a sua versatilidade e o efeito de dinâmica emergente, que fazem com que estes modelos sejam utilizados com frequência para a explicação de diversos fenômenos em teorias quânticas de campos abelianas, não abelianas, na física da matéria condensada, entre outras áreas. Já a opção subsequente pelo estudo da EDQ com expoente crítico  $z = 3$  foi feita em virtude da centralidade da posição que esta teoria ocupa no Modelo Padrão da Física de Partículas, juntamente com a pouca quantidade de estudos feitos para este tema com este valor específico de  $z$ , embora com ele tenhamos as mais relevantes correções quânticas para a EDQ espinorial de Lifshitz, além da renormalizabilidade da gravitação em (3+1) dimensões.

Nosso estudo é iniciado com um primeiro capítulo onde realizamos uma breve descrição da sequência histórica do desenvolvimento de algumas das principais teorias físicas que fundamentam esta tese, com o propósito de localizar e justificar a realização deste trabalho no contexto da física atual. Aliada a isso, apresentamos uma explanação simplificada de alguns detalhes técnicos por trás da motivação para a elaboração e a escolha de alguns dos modelos aqui estudados.

No capítulo segundo tratamos da teoria de gravitação de Hořava, uma proposta de gravitação quântica renormalizável perturbativamente, feita com base na ideia de escalonamento de Lifshitz, que considera a existência de uma assimetria entre tempo e espaço determinada por um expoente crítico, pretendendo com isso evitar o surgimento de campos fantasmas. Após uma introdução sobre o modelo gravitacional, mostramos, através de um exemplo com campo escalar, como o emprego deste escalonamento é capaz de diminuir o grau de divergência de integrais de loop. Antes disso, mostramos ainda como o expoente  $z$  é capaz de influir positivamente no comportamento UV e na renormalizabilidade de TQC's.

---

O capítulo 3 é uma revisão sobre modelos de quatro férmions. Nele exibimos uma visão geral sobre os modelos que estudam interações quárticas fermiônicas, com algumas de suas características básicas, discutindo brevemente alguns dos seus principais exemplares, com enfoque especial para o modelo de Nambu-Jona-Lasinio. Em seguida, no capítulo quatro, o primeiro dos capítulos principais do trabalho, elaboramos uma versão com extensão de Hořava-Lifshitz de um modelo de geração dinâmica do campo eletromagnético, que gerou a publicação [25]. Neste trabalho, calculamos correções quânticas de um loop para uma versão com  $z$  ímpar genérico desta proposta de eletrodinâmica, utilizadas para análises dos casos de  $z = 1$  e  $z = 3$ . Por meio dessas correções, conseguimos identificar, com  $z = 3$ , a ocorrência de uma violação dinâmica de simetria rotacional, apontada pela presença de um potencial bumblebee, feito que ainda não havia sido registrado em teorias do tipo Lifshitz. Além disso, no trabalho original, de J. Bjorken, a violação espontânea de simetria foi conseguida apenas com a adição artificial de termos extras na ação. Este resultado, a violação da simetria rotacional, indica a possibilidade de aplicação do método de modelos bumblebee, com escalonamento de Lifshitz, em análises de sistemas com comportamento crítico, onde quebras de simetrias espaciais podem ser relevantes. Ainda por meio de correções radiativas, conseguimos induzir, neste mesmo modelo, o surgimento de um termo cinético covariante para os campos auxiliares (termo de Maxwell), mas ao custo da eliminação da quebra espontânea de simetria. Isto revelou uma incompatibilidade entre a quebra espontânea de simetria e a restauração perturbativa da covariância de Lorentz, implicando que, neste modelo, ou existe um potencial com quebra de simetria ou um termo de Maxwell covariante.

No capítulo cinco, estudamos a eletrodinâmica quântica com a formulação

---

de Hořava-Lifshitz, com expoente crítico  $z = 3$ , utilizando para isso a expansão derivativa, método ainda não empregado para este tipo de sistema. Este capítulo compõe a parte final dos capítulos principais da tese e contém os cálculos das correções radiativas (todas finitas) que utilizamos para induzir neste modelo, por meio da obtenção da sua ação efetiva, a ação livre de Maxwell, a partir do setor fermiônico da lagrangiana, bem como para discutirmos a possibilidade de surgimento da anomalia ABJ, que mostramos não ter contribuição gerada pelos vértices de primeira ordem nos campos de calibre.

No apêndice A, apresentamos um exemplo de cálculo da anomalia ABJ, utilizando formalismo covariante, com o propósito de facilitar a compreensão deste tema, que, até então, nesta tese, só havia sido trabalhado no contexto de um espaço-tempo anisotrópico.

Ao final do trabalho, no apêndice B, elaboramos um apêndice matemático para tratar da questão da impossibilidade do uso de deslocamentos na variável de integração, em integrais linearmente divergentes, e calculamos a contribuição anômala para a identidade de Ward axial, tema do apêndice A.

Como perspectivas futuras temos a possibilidade de estender nossa análise com a formulação de Hořava para outros aspectos do modelo de Bjorken de fótons de Goldstone, como o cálculo da constante de estrutura fina, e, principalmente, testar sua equivalência para várias ordens de perturbação com relação à eletrodinâmica quântica usual, atestada em [24] para o modelo relativístico. Podemos também estudar a termodinâmica do modelo, levando em conta a presença de temperatura nos cálculos, em uma análise com temperatura finita, buscando compreender os efeitos dessa consideração sobre as simetrias do sistema, com e sem anisotropia de Lifshitz.

Os estudos sobre a aplicação do escalonamento de Lifshitz na EDQ nos oferecem também boas oportunidades futuras, como a generalização dos nossos resultados para um valor ímpar genérico de  $z$ , e, em especial, a continuação dos cálculos relativos à anomalia ABJ, já realizados em [18] para  $z = 2$ . Outro estudo possível é o das implicações de uma possível alteração no vértice  $\mathcal{B}\gamma_5$  provocada pela anisotropia de Lifshitz. E, além da possibilidade de desenvolvimento da generalização da EDQ de Hořava-Lifshitz, podemos prosseguir nosso trabalho para testar o efeito da anisotropia no espaço-tempo sobre a renormalizabilidade desta teoria.

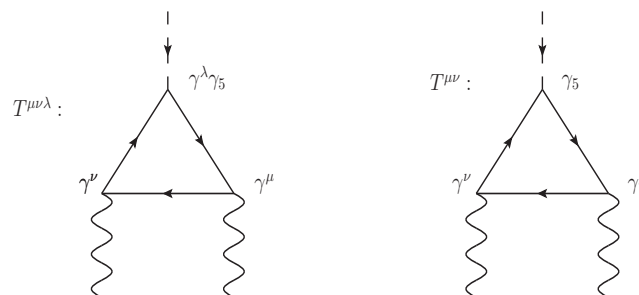
Por fim, uma vez que conseguimos demonstrar a viabilidade da descrição de teorias de Hořava-Lifshitz como modelos de bumblebee, esperamos que esta abordagem seja generalizada para teorias mais complexas, como, por exemplo, aquelas incluindo o acoplamento entre vetor e espinor no contexto da gravitação. Ademais, desde que uma das principais motivações para teorias do tipo Lifshitz reside na possibilidade da sua aplicação na descrição de fenômenos que envolvem transições de fase e comportamento crítico, esperamos que nossos resultados possam contribuir para futuras aplicações em estudos de matéria condensada, onde a quebra espontânea de simetria é bastante importante.

# Apêndice A

## IDENTIDADE DE WARD ANÔMALA

Com a finalidade de explicar como se dá a identificação da anomalia ABJ, apresentamos um exemplo de sua ocorrência através do cálculo do gráfico triangular fermiônico, buscando verificar a preservação ou não da identidade de Ward, que para estes fins pode ser tratada como uma confirmação da conservação de corrente [113]. Calculamos os gráficos do triângulo de um loop fermiônico, com correntes vetorial-vetorial-axial ( $T^{\mu\nu\lambda}$ ) e vetorial-vetorial-pseudoescalar ( $T^{\mu\nu}$ ), com massa e em (3+1) dimensões:

**Figura A.1:** Gráficos triangulares  $T^{\mu\nu\lambda}$  e  $T^{\mu\nu}$



Fonte: Autor, 2018.

A amplitude correspondente ao primeiro dos diagramas apresentados acima, no espaço dos momentos, é calculada usando-se

$$T^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2), \quad (\text{A.1})$$

com

$$T_1^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu, \quad (\text{A.2})$$

sendo

$$T_2^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu\lambda}(p_2, p_1) \quad e \quad q = p_1 + p_2. \quad (\text{A.3})$$

Onde usamos  $p_1^\mu$  e  $p_2^\nu$  para os momentos vetoriais, e  $q^\lambda$  para o axial. Para o segundo gráfico temos

$$T^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (\text{A.4})$$

com

$$T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \quad (\text{A.5})$$

e

$$T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu}(p_2, p_1). \quad (\text{A.6})$$

Com o fim de verificarmos a preservação da identidade de Ward no sistema em questão, devemos então observar se é ou não válida a equação

$$q_\alpha T^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2). \quad (\text{A.7})$$

Para isso, lançamos mão da identidade,

$$\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{k} - \not{q} - m) + (\not{k} - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5. \quad (\text{A.8})$$

Através dela encontramos a seguinte relação entre (A.2) e (A.5),

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) + R_1^{\mu\nu} + R_2^{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

com

$$R_1^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{p}_2 - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \right] \quad (\text{A.10})$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{p}_2 - m} \gamma^\nu \right], \quad (\text{A.11})$$

de modo que, semelhantemente ao que ocorre com os tensores  $T^{\mu\nu\lambda}$  e  $T^{\mu\nu}$ ,

$$R_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = R_1^{\nu\mu}(p_2, p_1). \quad (\text{A.12})$$

Note que se deslocarmos os momentos  $k$  nas expressões dos termos de repouso

$R_1^{\mu\nu}$  e  $R_2^{\mu\nu}$  por

$$k \rightarrow k + p_2 \text{ e } k \rightarrow k + p_1, \quad (\text{A.13})$$

passamos a ter

$$R_1^{\mu\nu} = R_2^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.14})$$

e, em consequência disso, (A.9) torna-se

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (\text{A.15})$$

o que confirmaria a validade da identidade de Ward. No entanto, as integrais em (A.10) e (A.11) são linearmente divergentes e por isso não podemos realizar deslocamentos nas variáveis de integração (Apêndice B). Logo, os termos de repouso contribuirão e assim a identidade de Ward não pode ser satisfeita, confirmando a existência da anomalia ABJ no sistema estudado.



## Apêndice B

# DESLOCAMENTO DE VARIÁVEL EM INTEGRAL LINEARMENTE DIVERGENTE

Para entendermos o problema do deslocamento na variável de integração de uma integral linearmente divergente, consideramos o exemplo simples de uma integral unidimensional,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x). \quad (\text{B.1})$$

Ao realizarmos um deslocamento  $x \rightarrow x + a$  e subtrairmos da nova integral a integral (B.1), definimos a função

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x + a) - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x), \quad (\text{B.2})$$

que é tal que

$$\Delta(a) = 0, \quad (\text{B.3})$$

se o deslocamento em  $x$  não alterar (B.1). Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ a \frac{d}{dx} f(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \dots \right] \\ &= a [f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2!} [f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Se a integral (B.1) for convergente, ou ao menos logaritmicamente divergente, deve ser verdade que

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots = 0 \quad (\text{B.5})$$

e assim encontramos o resultado (B.3), provando com isso que o deslocamento em  $x$  não modificou o resultado de (B.1). Se, entretanto, a integral (B.1) for linearmente divergente, embora

$$f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots = 0, \quad (\text{B.6})$$

teremos agora

$$f(\pm\infty) \neq 0. \quad (\text{B.7})$$

Isto tornará o resultado de (B.4) não nulo ao dar origem a um termo de superfície

$$\Delta(a) = a [f(\infty) - f(-\infty)] \neq 0, \quad (\text{B.8})$$

que comprova a inviabilidade do emprego de deslocamentos na variável de integração de integrais linearmente divergentes.

Entendido o problema unidimensional, podemos agora generalizar este exemplo para o caso de  $n$  dimensões, onde, no espaço euclidiano, a função  $\Delta(a)$  é

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x [f(x+a) - f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x [a^\mu \partial_\mu f(x) + a^\mu a^\nu \partial_\mu \partial_\nu f(x) + \dots].\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Novamente, se a integral for linearmente divergente, teremos

$$f(\pm\infty) \neq 0 \quad e \quad \partial_\mu f(\pm\infty) = \partial_\mu \partial_\nu f(\pm\infty) = \dots = 0 \quad (\text{B.10})$$

e  $\Delta(a)$  gerará um termo de superfície da forma

$$\Delta(a) = a^\mu \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^\mu}{r} S^{n-1}(r) f(r), \quad (\text{B.11})$$

obtido através do teorema de Gauss, após o uso de coordenadas esféricas generalizadas, com  $S^{n-1}(r)$  representando a superfície de uma esfera  $(n-1)$ -dimensional de raio  $r$ .

Para voltarmos ao problema dos termos de repouso do diagrama triangular, abordado na Seção 5.1, nos limitamos, a partir daqui, a um espaço  $(3+1)$ -dimensional, onde a superfície esférica é dada por

$$S^3(r) = 2\pi^2 r^3 \quad (\text{B.12})$$

e a função (B.11)

$$\Delta(a) = i2\pi^2 a^\mu r_\mu r^2 f(r), \quad (\text{B.13})$$

que torna-se imaginária por estar agora no espaço de Minkowski ( $x_0 \rightarrow ix_0$ ).

Como é possível notar em (A.10) e (A.11), os termos de repouso tem a forma

$$R_1^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [f(k - p_2) - f(k)], \quad (\text{B.14})$$

$$R_2^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [f(k - p_1) - f(k)]. \quad (\text{B.15})$$

Isso nos permite aplicar (B.13) para resolver estas integrais. Assim, com um deslocamento de  $a^\lambda = -p_2^\lambda$ ,  $R_1^{\mu\nu}$  torna-se

$$R_1^{\mu\nu} = i2\pi^2(-p_2^\lambda) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 k_\lambda \text{tr}(\not{k} + m)\gamma_5 \gamma^\nu (\not{k} - \not{p}_1 + m)\gamma^\mu}{(2\pi)^4 (k^2 - m^2) [(k - p_1)^2 - m^2]}, \quad (\text{B.16})$$

que, efetuado o traço, nos dá

$$\begin{aligned} R_1^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\beta\nu\alpha\mu} p_{1\alpha} p_{2\lambda} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^\lambda k_\beta}{k^2} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Calculado da mesma forma que  $R_1^{\mu\nu}$ , apenas com as trocas de  $p_1 \leftrightarrow p_2$  e  $\mu \leftrightarrow \nu$ ,  $R_2^{\mu\nu}$  é igual a  $R_1^{\mu\nu}$ , i.e,

$$R_2^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, aplicando (B.17) e (B.18) na expressão (A.9), obtemos

$$q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}, \quad (\text{B.19})$$

a expressão da identidade de Ward anômala<sup>1</sup>, que indica a existência da anomalia ABJ.

---

<sup>1</sup>Para um maior aprofundamento na questão indicamos o livro [114].

# Referências Bibliográficas

- [1] E.D. Bloom *et al.*, “High-Energy Inelastic e-p Scattering at  $6^\circ$  and  $10^\circ$ ”, Phys. Rev. Lett. 23, 16 (1969).
- [2] E.M. Riordan “The Discovery of Quarks”, Science 256, 1287 (1992).
- [3] The Atlas coloboration, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”, Phys. Lett. B. 716, 1 (2012).
- [4] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”, Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).
- [5] J. Bardeen, L. N. Cooper, e J. R. Schrieffer, “Microscopic Theory of Superconductivity”, Phys. Rev. 106, 162 (1957).
- [6] V. A. Kostelecký e S. Samuel, “Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory”, Phys Rev. D 39, 683 (1989)
- [7] V. A. Kostelecký e R. Potting, “CPT and strings”, Nucl. Phys. B 359, 545 (1991).
- [8] P. Hořava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point”, Phys. Rev. D 79, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

- [9] E. M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 11, 255 e 269 (1941).
- [10] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, “On the radiative corrections in the Horava-Lifshitz  $z=2$  QED”, Physics Letters B, 724, 277 (2017).
- [11] M. Gomes, F. Marques, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva “One-loop corrections in the  $z=3$  Lifshitz extension of QED”, [arxiv: 1809.05692v1 [hep-th]].
- [12] Jean Alexander and James Brister, “Fermion effective dispersion relation for  $z=2$  Lifshitz QED”, Phys. Rev. D 88, 065020 (2013).
- [13] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. I: General properties”, Ann. Phys. 324, 874 (2009) [arXiv:0808.3470 [hep-th]].
- [14] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. II: Classification”, Ann. Phys. 324, 1058 (2009) [arXiv:0808.3474 [hep-th]].
- [15] P. Gomes, M. Gomes, “On Higher Spatial Derivative Field Theories”, Phys. Rev. D 85, 085018 (2012) [arXiv:1107.6040 [hep-th]].
- [16] R. Iengo, J. Russo, M. Serone, “ Renormalization group in Lifshitz-type theories”, JHEP 11, 020 (2009) [arXiv:0906.3477 [hep-th]].
- [17] S. Das, K. Murthy, “CP N 1 Models at a Lifshitz Point”, Phys. Rev. D 80, 065006 (2009) [arXiv:0906.3261 [hep-th]].

- [18] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, J. M. Queiruga, and A. J. da Silva, “On one-loop corrections in the Horava-Lifshitz-like QED”, Phys. Rev. D 92, 129902 (2015) [arXiv:1504.04506 [hep-th]].
- [19] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories”, Phys. Rev. D 85, 127701 (2012) [arXiv:1112.2081 [hep-th]].
- [20] C. F. Farias, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories with the arbitrary critical exponent”, Phys. Lett. B 719, 196 (2013) [arXiv:1208.3427 [hep-th]].
- [21] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, “On the effective potential, Horava-Lifshitz-like theories and finite temperature”, Phys. Rev. D 89, 025014 (2014) [arXiv: 1311.6313 [hep-th]].
- [22] A. M. Lima, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, R. F. Ribeiro, “On the duality in CPT-even Lorentz-breaking theories”, Phys. Rev. D 91, 25027 (2015) [arXiv: 1412.6957 [hep-th]].
- [23] V.S. Alves, B. Charneski, M. Gomes, L. Nascimento, F. Peña, “Chern-Simons terms in Lifshitz-like quantum electrodynamics”, Phys. Rev. D 88, 067703 (2013).
- [24] J. D. Bjorken, “A Dynamical origin for the electromagnetic field”, Annals Phys. 24, 174 (1963).
- [25] T. Mariz, R. Moreira, A. Yu. Petrov, “Emergent gauge bosons and dynamical symmetry breaking in a four-fermion Lifshitz model”, Eur. Phys. J. C 79 5, 550 (2019).

- [26] Andrii Dashko and Rainer Dick, “The shadow of dark matter as the shadow of string theory” [arXiv:1809.01089 [hep-ph]].
- [27] L. Susskind, “String theory and the principles of black hole complementarity”, Phys. Rev. Lett. 71, 2367 (1993) [arXiv:9307168 [hep-th]]
- [28] M., Ostrogradsky, “Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres”, Mem. Acad. St. Petersburg 6 (1850) n° 4, 385.
- [29] R.P. Woodard, “Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity”, Lect. Notes Phys. 720, 403 (2007) [astro-ph/0601672].
- [30] Anzhong Wang, “Hořava gravity at a Lifshitz point: A progress report”, Int. J. Mod. Phys. D 26, 1730014 (2017).
- [31] D. Blas, “Hořava gravity: motivation and status”, J. Phys.: Conf. Ser.952, 012002 (2018).
- [32] Jean Alexandre, “Lifshitz-type Quantum Field Theories in Particle Physics”, Int.J. Mod. Phys. A 26, 4523 (2011) [arXiv:1109.5629 [hep-ph]]
- [33] J. Leite, “Aspects of fermion dynamics from Lorentz symmetry violation”, Tese (Doutorado em física) - Departament of Physics, Kings College London (2016).
- [34] I. Bialynicki-Birula, “Quantum Electrodynamics without Electromagnetic Field”, Phys. Rev. 130, 465 (1963).
- [35] O. J. Franca, R. Montemayor and L. F. Urrutia, “Emergent electrodynamics from the Nambu model for spontaneous Lorentz symmetry breaking”, Phys. Rev. D 85, 085008 (2012).



- [36] Y. Nambu, “Quantum Electrodynamics in Nonlinear Gauge”, Prog. Theor. Phys. Supp. Extra Number, 190 (1968).
- [37] R. Bluhm, N. L. Gagne, R. Potting, and A. Vrublevskis, “Constraints and stability in vector theories with spontaneous Lorentz violation”, Phys. Rev. D 77, 125007 (2008).
- [38] I. Arraut, “The Dynamical Origin of the Graviton Mass in the Non-Linear Theory of Massive Gravity”, Universe 5, 166 (2019).
- [39] V. Elias, “Possible dynamical origin of fermion mass differences within SO(10) unifying symmetry”, Phys. Rev. D 22, 2255 (1980).
- [40] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I”, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [41] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II”, Phys. Rev. 124, 246 (1961).
- [42] A. Dhar e S.R. Wadia, “Nambu—Jona-Lasinio Model: An Effective Lagrangian for Quantum Chromodynamics at Intermediate Length Scales”, Phys. Rev. Lett. 52, 959 (1984).
- [43] Gross, David J. and Neveu, Andre, “Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories”, Phys. Rev. D 10, 3235(1974).
- [44] A.M Lima, T. Mariz, R. Martinez, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov e R.F. Ribeiro, “On the Horava-Lifshitz-like Gross-Neveu model”, Phys. Rev. D 95, 065031 (2017).

- [45] Walter. E. Thirring, “A Soluble Relativistic Field Theory”, *Annals of Physics* 3, 91 (1958).
- [46] Daniel Schmidt, Björn Wellegehausen, Andreas Wipf, “Four-Fermion Theories with Exact Chiral Symmetry in Three Dimensions”, 34th annual International Symposium on Lattice Field Theory [arXiv:1611.00275 [hep-lat]].
- [47] A. Dhar, R. Shankar e S.R. Wadia, “Nambu–Jona-Lasinio–type effective Lagrangian: Anomalies and nonlinear Lagrangian of low-energy, large- $N$  QCD”, *Phys. Rev. D* 31, 3256 (1986).
- [48] J. Finger e J. Mandula, “Quark pair condensation and chiral symmetry breaking in QCD”, *Nucl. Phys. B* 199, 168 (1982).
- [49] P. Ferstl, M. Shaden e E. Werner, “Confinement and the composite “pionic” goldstone mode via the NJL mechanism in a bag-like potential model”, *Nucl. Phys. A* 452, 680 (1986).
- [50] A. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, “Relativistic factorized S-matrix in two dimensions having  $O(N)$  isotopic symmetry”, *Nucl. Phys. B* 133, 525 (1978).
- [51] A. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, “Exact S matrix of Gross-Neveu “elementary” fermions”, *Phys. Lett. B* 72, 481 (1978).
- [52] A. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, “Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models”, *Ann. Phys.* 120, 253 (1979).
- [53] M. Gell-Mann “A schematic model of baryons and mesons”, *Physics Letters*. 8, 214 (1964).

- [54] G. Zweig “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking”, CERN Report No.8182/TH.401 (1964).
- [55] G. Zweig “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking II”, CERN Report No.8419/TH.412 (1964).
- [56] D. Pines e J. R. Schrieffer, “Gauge invariance in the theory of superconductivity”, *Nuovo cimento* 10, 496 (1958).
- [57] P. W. Anderson, “Coherent Excited States in the Theory of Superconductivity: Gauge Invariance and the Meissner Effect”, *Phys. Rev.* 110, 827 (1958).
- [58] P. W. Anderson, “Spectral Diffusion, Phonons, and Paramagnetic Spin-Lattice Relaxation”, *Phys. Rev.* 114, 1002 (1959).
- [59] G. Rickayzen, “Collective Excitations in the Theory of Superconductivity”, *Phys. Rev.* 115, 795 (1959).
- [60] Y. Nambu, “Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity”, *Phys. Rev.* 117, 648 (1960).
- [61] J. Bjorken, “Emergent gauge bosons”, [arXiv: 0111196 [hep-th]].
- [62] D. Lurié and A. J. Macfarlane, ”Equivalence Between Four-Fermion and Yukawa Coupling, and the  $Z_3 = 0$  Condition for Composite Bosons”, *Phys. Rev.* 136, B816 (1964).
- [63] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, “Derivative expansions of fermion determinants: Anomaly-induced vertices, Goldstone-Wilczek currents, and Skyrme terms”, *Phys. Rev. D* 31, 10 (1985).

- [64] Kurt Haller, “Quantum electrodynamics in the temporal gauge”, Phys. Rev. D 36, 1830 (1987).
- [65] T. Eguchi, “New approach to collective phenomena in superconductivity models”, Phys. Rev. D. 14, 2775 (1976).
- [66] R. A. Bertlmann, “Anomalies in quantum field theory: Dispersion Relations and Differential Geometry”, Nucl.Phys. B Proc.Suppl. 39, 482 (1995) [arXiv:hep-ph/9411254 [hep-ph]].
- [67] S. Adler, “Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics”, Phys. Rev. 177, 2426 (1969)
- [68] A.D. Dolgov and V.I. Zakharov, “On Conservation of the axial current in massless electrodynamics”, Nucl. Phys. B 27, 525 (1971).
- [69] C. Adam, R.A. Bertlmann and P. Hofer, Z. Phys. C 56, 123 (1992).
- [70] I. Caprini, L. Micu and M. Visinescu, Z. Phys. C 56, 225 (1992).
- [71] K. Fujikawa, “Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories”, Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979)
- [72] K. Fujikawa, “Path integral for gauge theories with fermions”, Phys. Rev. D 21, 2848 (1980).
- [73] R. Stora, “Continuum gauge theories”, New developments in quantum field theory and statistical mechanics, 1976, Plenum Press, New York-USA (1977).
- [74] R. Stora, “Algebraic structure and topological origin of anomalies”, Recent progress in gauge theories, Plenum Press, New York-USA (1984).

- [75] R. Stora, “Algebraic structure of chiral anomalies”, New perspectives in quantum field theory, World Scientific, Singapore (1986).
- [76] B. Zumino, “Chiral anomalies and differential geometry”, Relativity, groups and topology II, Les Houches Lectures, Amsterdam-Netherlands (1984).
- [77] B. Zumino, Y.S. Wu and A. Zee, “Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry”, Nucl. Phys. B239, 477 (1984).
- [78] B. Zumino, “Cohomology of gauge groups: Cocycles and Schwinger terms”, Nucl. Phys. B253, 477 (1985).
- [79] L. Alvarez–Gaume and P. Ginsparg, “The structure of gauge and gravitational anomalies”, Ann. Phys. 161, 423 (1985).
- [80] M. Atiyah and I. Singer, Proc. Nat. Acad. Sci. 81, 2597 (1984).
- [81] R. Jackiw and C. Rebbi, “Conformal properties of a Yang-Mills pseudoparticle”, Phys. Rev. D 14, 517 (1976).
- [82] N.K. Nielsen and B. Schroer, “Axial anomaly and Atiyah-Singer theorem”, Nucl. Phys. B 127, 493 (1977).
- [83] N.K. Nielsen, H. Romer and B. Schroer, “Classical Anomalies and Local Version of the Atiyah-Singer Theorem”, Phys. Lett. 70 B, 445 (1977).
- [84] L. Alvarez–Gaume and P. Ginsparg, Nucl. Phys. B243, 449 (1984).
- [85] O. Alvarez, I.M. Singer and B. Zumino, Commun. Math. Phys. 96, 409 (1984).
- [86] L. Alvarez–Gaume and E. Witten, “Gravitational Anomalies”, Nucl. Phys. B 234, 269 (1984).

- [87] J.-M. Bismut, preprint Université de Paris–Sud, Mathématiques, Orsay, No. 91–04, (1991)
- [88] J.M. Bismut and D.S. Freed, Commun. Math. Phys. 106, 159 (1986).
- [89] J.M. Bismut and D.S. Freed, Commun. Math. Phys. 107, 103 (1986).
- [90] M. Knecht, S. Lazzarini and R. Stora, “On holomorphic factorization for free conformal fields”, Phys. Lett. B 262, 25 (1991).
- [91] M. Knecht, S. Lazzarini and R. Stora, “On holomorphic factorization for free conformal fields II”, Phys. Lett. B 273, 63 (1991).
- [92] M. Dubois–Violette, M. Talon and C.M. Viallet, Commun. Math. Phys. 102, 105 (1985).
- [93] M. Dubois–Violette, M. Talon and C.M. Viallet, Phys. Lett. 158B, 231 (1985).
- [94] L. Bonora and P. Cotta–Ramusino, Commun. Math. Phys. 87, 589 (1983).
- [95] L. Bonora and P. Cotta–Ramusino, Phys. Rev. D 33, 3055 (1986).
- [96] J.S. Bell and R. Jackiw, “A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -model”, Nuovo Cimento A 60, 47 (1969).
- [97] I. Bakas and D. Lüst, ”Axial anomalies of Lifshitz fermions”, Fortschr. Phys. 59(2011) 937 [arXiv:1103.5693 [hep-th]].
- [98] I. Bakas, “Anomalies, instantons and chiral symmetry breaking at a Lifshitz point”, [arXiv:1204.3833v1 [hep-th]].

- [99] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, “On the Adler-Bell-Jackiw anomaly in a Horava-Lifshitz-like QED”, EPL 112, 61002 (2015) [arXiv:1505.00715 [hep-th]].
- [100] D. Anselmi and M. Halat, “Renormalization of Lorentz violating theories”, Phys. Rev. D 76, 125011 (2007) [arXiv:0707.2480 [hep-th]]
- [101] D. Anselmi, “Weighted scale invariant quantum field theories”, JHEP 0802, 51 (2008) [arXiv:0801.1216 [hep-th]].
- [102] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. I. General properties”, Annals Phys. 324, 874 (2009) [arXiv:0808.3470 [hep-th]].
- [103] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. II. Classification”, Annals Phys. 324, 1058 (2009) [arXiv:0808.3474 [hep-th]].
- [104] M. Visser, “Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator”, Phys. Rev. D 80, 025011 (2009) [arXiv:0902.0590 [hep-th]].
- [105] J. Alexandre, K. Farakos and A. Tsapalis, “Liouville-Lifshitz theory in 3+1 dimensions”, Phys. Rev. D 81, 105029 (2010) [arXiv:1004.4201 [hep-th]].
- [106] A. M. Lima, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and R. F. Ribeiro, “Gauge dependence of the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories”, Phys. Rev. D 91, no. 2, 025027 (2015) [arXiv:1412.2944 [hep-th]].
- [107] R. Iengo, M. Serone, “A Simple UV-Completion of QED in 5D”, Phys. Rev. D 81, 125005 (2010) [arXiv: 1003.4430 [hep-th]].

- [108] J. M. Romero, J. A. Santiago, O. Gonzalez-Gaxiola, A. Zamora, “Electrodynamics a la Horava”, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 3381 (2010) [arXiv:1006.0956 [hep-th]].
- [109] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Horava-Lifshitz modifications of the Casimir effect”, *Mod. Phys. Lett. A* 28, 1350052 (2013) [arXiv:1006.1635 [hep-th]].
- [110] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Horava-Lifshitz-like extensions of supersymmetric theories”, *Phys. Rev. D* 90, 125022 (2014) [arXiv:1408.6499 [hep-th]].
- [111] M. Gomes, J. Queiruga and A. J. da Silva, “Lorentz breaking supersymmetry and Horava-Lifshitz-like models”, *Phys. Rev. D* 92, 025050 (2015) [arXiv:1506.01331 [hep-th]].
- [112] Avinash Dhar, Gautaum Mandal, and Spenta R. Wadia, “Asymptotically free four-fermi theory in 4 dimensions at the  $z=3$  Lifshitz-like fixed point”, *Phys. Rev. D* 80, 105018 (2009) [arXiv:0905.2928 [hep-th]].
- [113] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, 160p, Westview Press, USA (1995).
- [114] R. A. Bertlmann, “Anomalies in quantum field theory”, International Series of Monographs on Physics, 91, Oxford University Press, USA (1996).