

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA - IF/UFAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DEMITRY MESSIAS SANTOS

**TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM CADEIAS DE *SPINS*
DESORDENADAS: CADEIA COM APERIODICIDADE E LINHA DE GRAFENO**

**MACEIÓ
2021**

Demítry Messias Santos

Transferência de estados quânticos em cadeias de *spins* desordenadas: Cadeia com aperiodicidade e linha de grafeno

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Instituto de Física - IF/UFAL.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

Maceió
2021

*À Manuel Messias dos Santos:
A minha vida lhe é devida
E a sua falta me é sentida.*

AGRADECIMENTOS

É com o misto já habitual de desconforto e euforia que antecede a apresentação que me volto a escrever estes agradecimentos. Como ensinado pelo pastor anglicano John Donne, "nenhum homem é uma ilha, completo em si mesmo[...]"; conseqüentemente, também eu não o sou, de modo a ter a realização de meu trabalho acadêmico final intimamente atrelada às conquistas de outrem. Destacarei portanto, todos aqueles que me auxiliaram no caminho até aqui.

Gostaria de registrar meus agradecimentos ao professor **Dr Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura** por inicialmente ter me recebido de braços abertos, ter sido compreensivo ao longo de todo o período que estamos juntos e por me auxiliar com bons conselhos e sábios sermões, que ajustam continuamente o meu foco para o que é importante na vida acadêmica.

Agradeço ao professor **Dr Guilherme Martins Alves de Almeida**, que dispôs parte preciosa de seu tempo para me auxiliar tanto com a área na qual me envolvi e gerou esta tese, quanto com discretos conselhos sobre a vida acadêmica e pessoal que foram de valores grandiosos.

Tenho muito a agradecer aos professores **Dr Iram Marcelo Gleria e Wandearley da Silva Dias**, pelas contribuições que me fizeram direta e indiretamente no meu período como aluno de doutorado.

No ano de 2021, se completam 14 anos desde a primeira vez que peguei um livro de Física. Naquele ano, jurei nunca esquecer da pessoa que me introduziu ao mundo das Ciências Exatas e da Natureza, carregando comigo nossas amigáveis vivências didáticas enquanto educador e aluno. Ainda que não soubéssemos nada sobre o futuro, e ainda que venha a faltar a memória dessa promessa a este de quem falo, nosso encontro mudou radicalmente a minha vida, me trazendo ao momento em que me encontro atualmente. Agora, chegando ao topo da carreira acadêmica discente, devo constar meu débito como cumprido. Portanto, se conheci Mestres, Doutores, Orientadores e amigos que tenho, foi por causa de sua ação direta em minha vida. Meu muito obrigado a meu primeiro professor de Física, **Péricles Felipe Bastos Gomes**.

Aos professores acima citados, agradeço por estarem sempre presentes cumprindo as suas obrigações como verdadeiros educadores, e não apenas professores. Meus sinceros votos de evolução e engradecimento, sem que nunca se esqueçam do tato, cordialidade e prontidão que tiveram ao lidar com alunos como eu.

Sem dúvidas, meus mais sinceros agradecimentos aos meus pais, **Mauricio Silva Santos e Iracilda Maria Pires Santos**, por me apoiarem inabalavelmente, incondicionalmente e incansavelmente para me garantir as melhores condições possíveis ao alcance deles, visando a minha exclusiva preocupação com os estudos. Tudo que tenho hoje, não se limitando à vida acadêmica, eu devo a vocês. Não há vida suficiente que faça o meu obrigado valer a pena.

Minha namorada e confidente, **Karine Alves Batista**, que por vezes foi a minha força movente na direção da produtividade, me ensinando muito sobre tudo que eu acreditava que já saber, além de ser exemplo para mim em todas as situações aplicáveis. Muito obrigado por tudo!

Aos meus bons amigos da sala 1: **Caio Mendes, Ângela Silva, Renato Dutra e Paulo Ribeiro**. A vida de estudante é excelente, mas seria insuportável sem todas as conversas, auxílios, confissões e apoios que apenas um grupo de pessoas excepcionais como vocês podem me oferecer. Especialmente, meu agradecimento ao **Caio Mendes**, por todos os nossos anos de amizade, em que muitas vezes se colocou no papel do amigo que eu *precisava*, e não o que eu *queria*.

Aos meus amigos de mesas de *Role-Playing Game*, participantes dos grupos **Arapiraca RPG Societatis, RPG Society**, e **JIP** Agradeço por me oferecerem um ambiente saudável no qual me sinto em casa, por perdoarem as minhas faltas devido aos trabalhos de doutorado e por serem meus companheiros nas aventuras que vivemos.

À todos aqueles amigos que não pude citar e que não se encaixaram em nenhum dos agradecimentos anteriores: peço a maior parte da compreensão, uma vez que a tradição acadêmica me impede de tecer os agradecimentos à altura que merecem. Todos vocês coloriram a minha vida, e se sou visto com alguma alta estima em meio a vocês, é por que me sinto agradecido pela dádiva de sua amizade. Obrigado!

Por último, mas não menos importante, agradeço a Deus Todo-Poderoso, o Alfa e o Ômega. Sem sombra de dúvidas, é um grande privilégio para mim ter vivido até aqui estudando a natureza de Sua Obra, e nenhum agradecimento destes seria possível sem a Sua benevolência e infinita sabedoria.

RESUMO

Palavras-chave: Comunicação quântica. Potencial aperiódico. Emaranhamento.

A computação quântica já é uma realidade presente na contemporaneidade. Embora a indagação sobre os tipos de problemas que um computador quântico deve resolver ainda esteja (em grande parte) em aberto, muitas já são as potencialidades observadas e espera-se que, num futuro próximo, a utilização desta nova ferramenta possibilite aos pesquisadores novas descobertas, que vão além da imaginação e do alcance atual. Como toda tecnologia em surgimento, entretanto, o computador quântico enfrenta uma série de obstáculos que impedem sua maior produção e difusão. Destes obstáculos, podemos destacar como um dos principais a transferência de informação, principalmente quando se tratando de distâncias curtas (por exemplo, entre dispositivos de uma mesma máquina). Como possível solução, a ideia da utilização de cadeias de spin para transferência de estados foi proposta por Bose no início deste século, dando origem a uma série de outros trabalhos investigando os benefícios de utilização e condições de transferência de estados por cadeias de spin, buscando melhorar o protocolo o máximo possível. Cabe destacar aqui o trabalho de Wójcik *et al.*, que elaborou o modo de transferência de estados quânticos entre dois spins acoplando-os fracamente às extremidades da rede. Esta tese é formada por dois estudos teóricos, nos quais foram verificadas a viabilidade de canais para realização da transferência de estados quânticos. No primeiro deles, estudamos a eficácia de uma cadeia de spin unidimensional cujos sítios estão sob o efeito de campos magnéticos seriados que seguem a regra de aperiodicidade proposta por S. Das Sarma no fim dos anos 80. Mostramos que a transferência pode ocorrer com altos valores de fidelidade, desde que o potencial *onsite* dos spins emissor/receptor estejam sintonizadas na região do espectro da cadeia aperiódica que permita a existência de estados estendidos ao longo da cadeia. O *tradeoff* entre a velocidade e a fidelidade da transferência mostra que a eficácia é comparável com uma cadeia homogênea. No segundo estudo, é realizada a transferência de estados quânticos utilizando como canal uma cadeia quasiunidimensional que simula o grafeno. Os resultados apontam para a transferência com alta fidelidade, mas alta sensibilidade à flutuação estática das energias de interação entre os spins. Tal sensibilidade pode ser explicada por meio da análise espectral da cadeia, revelando a existência de modos localizados que impedem a transmissão efetiva. Em ambos os casos, foi utilizado o protocolo de Wójcik *et al.*. Dado que este tem a capacidade de criação de estados maximamente emaranhados entre os spins emissor e receptor, também foram tomadas medidas da concorrência entre estes, demonstrando também a criação de estados de Bell.

ABSTRACT

Keywords: Quantum communication. Aperiodic Sarma potential. Entanglement.

Quantum computing is already a reality today. Although the question about the types of tasks that a quantum computer must solve is still (to a large extent) open, many are the potentialities already observed, and it is expected that, in the near future, the use of this new tool will enable researchers to make new discoveries beyond imagination and current reach. However, like any emerging technology the quantum computer faces a series of obstacles that prevent its further production and diffusion. Of these obstacles, we can highlight as one of the main the transfer of information, mainly when dealing with short distances (i.e. between internal devices of the machine). As a solution, the idea of using spin chains for state transfer was proposed by Bose at the beginning of this century, originating a series of other studies investigating the benefits of use and conditions of state transfer by spin chains, seeking improve the protocol as possible. It is worth mention the work of Wójcik *et al.*, who developed the method of transferring quantum states between two spins by loosely coupling them to the ends of the network. This thesis is formed by two theoretical studies, in which the viability of some spin channels for carrying out the transfer of quantum states was verified. First, we studied the effectiveness of a one-dimensional spin chain whose sites are under the effect of serial magnetic fields that follow the aperiodicity proposed by S. Das Sarma in the late 1980s. We show that the transfer can occur with high values of fidelity, as long as the onsite energy of the sending (receiving) spins are tuned in the spectrum region of the aperiodic chain that allows the existence of extended states along the chain. The tradeoff between the speed and fidelity of the transfer shows that the efficiency is comparable with a homogeneous chain. In the second study, quantum states are transferred using a quasi-one-dimensional chain that simulates graphene. Our results point to the transfer with high fidelity and high sensitivity to the static fluctuation of the energies of interaction between the spins. This sensitivity can be explained by spectral analysis of the chain, revealing the existence of localized modes that prevent effective transmission. In both cases, the Wójcik *et al.* protocol was used. Given that it has the capacity to create maximally entangled states between the sending and receiving spins, measures of concurrence between them were also taken, also demonstrating the creation of Bell states.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquematização do protocolo básico de transferência de estados entre Alice e Bob.	31
Figura 2 – Fidelidade F (barras) e compartilhamento de emaranhamento ε (linha) para o protocolo de transferência de estados proposto por Bose, entre os <i>spins</i> 2 e 80, no intervalo de tempo $t \in [0, 4000J]$	32
Figura 3 – Máxima Fidelidade Média $F(\tau)$ e Concorrência Média $C(\tau/2)$ como função da energia local W , calculada no tempo ótimo $\tau = \pi/\Omega$. Parâmetros: $N, \nu, \pi\alpha = 100, 0.5, 0.5$ e $V/J = 0.5, 1, 1.5$	47
Figura 4 – Fidelidade máxima F_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ <i>versus</i> energia local W para $N = 50, 100$ (linhas), $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ (colunas). Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).	48
Figura 5 – Concorrência máxima C_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ <i>versus</i> energia local W para $N = 50, 100$ (linhas), $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ (colunas). Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).	48
Figura 6 – Fidelidade e Concorrência máximas F_{max}, C_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ <i>versus</i> energia local W e amplitude de aperiodicidade V para $N = 50$, $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5$ e $g = 0.01$. Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).	49
Figura 7 – Fidelidade e Concorrência máximas F_{max}, C_{max} para $W = 0$ como função de V (a,c) e de ν (b,d), com $g = 0.01J$ (círculos) e $g = 0.1J$ (quadrados), $N = 100$ e $\pi\alpha = 0.1$. Os resultados foram obtidos por meio da diagonalização direta do Hamiltoniano (62), no intervalo de tempo $[0, 10^5]$. A linha acinzentada corresponde aos resultados obtidos por meio da descrição efetiva via perturbação de segunda ordem, $F(\tau)$ e $C(\tau/2)$	50
Figura 8 – Máxima fidelidade média $F(\tau)$, obtida por diagonalização direta do Hamiltoniano (62), para $\tau = \pi/J\delta^2$, como função do parâmetro δ . São representados vários valores de ν para $V = 0.5, 1, 1.5$, em comparação com o caso uniforme ($V = 0$). Nas simulações, $g = \delta J/\sqrt{\tilde{\Omega}}$, $N = 100$, $\pi\alpha = 0.1$ e $W = 0$	51
Figura 9 – Esquematização da cadeia utilizada e da regra de indexação dos sítios. As ligações em vermelho simbolizam a diferença de grandeza entre os acoplamentos do emissor/receptor e os sítios do restante da rede.	53
Figura 10 – Fidelidade máxima F_{Max} e concorrência máxima C_{Max} <i>versus</i> energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$ na ausência de desordem ($b = 0$).	55
Figura 11 – Fidelidade máxima F_{Max} e concorrência máxima C_{Max} <i>versus</i> energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 300$ na ausência de desordem ($b = 0$).	55
Figura 12 – Fidelidade máxima F_{Max} <i>versus</i> energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e 0.1 com amplitudes de desordem $b = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$	56

Figura 13 – Concorrência máxima C_{Max} versus energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e 0.1 com amplitudes de desordem $b = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$	56
Figura 14 – Valores médios de F_{Max} e C_{Max} como função da amplitude de desordem b para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e $w = J, w = 1.35J$. Médias realizadas sobre 50 conjuntos de dados.	56
Figura 15 – Comparação entre a densidade de estados obtida numericamente e seu valor efetivo (eq. (81), em vermelho) para $N = 600$ e $b = 0.1J$	58
Figura 16 – Valores de participação para $N = 600, 1200$ e $b = 0.1J$	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Redes Quânticas	18
1.2	Protocolos de transferência de estados quânticos	19
1.3	Desordem, Localização e Grafeno	22
1.4	Aperiodicidade	25
1.5	Sobre a Tese	27
2	TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS	29
2.1	Protocolo Básico: Cadeias de <i>spin</i> Homogêneas	29
2.2	Limites da Transferência de Estados em Cadeias Homogêneas	33
2.3	Compartilhamento de Emaranhamento	35
2.4	Regime de Fraco Acoplamento	37
2.5	Experimentos Envolvendo Transferência de Estados Quânticos	40
3	RESULTADOS	44
3.1	Transferência de estados em cadeias aperiódicas	44
3.2	Transferência de estados em cadeias de grafeno	52
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	60
	REFERÊNCIAS	62
	ANEXO A – ARTIGOS PUBLICADOS	69

1 Introdução

Um **algoritmo** é definido como uma sequência finita de regras não ambíguas utilizadas para resolver um problema ou cálculo. Alguns dos mais antigos algoritmos advêm dos povos babilônicos, que desenvolveram tabelas de cálculo que eram inerentes ao funcionamento do comércio e à administração de seus territórios. Ao longo da História, o desenvolvimento das sociedades em seus respectivos locais e épocas esteve intrinsecamente relacionada à capacidade de resolver problemas, que se tornaram cada vez mais sofisticados com o passar do tempo.

No século XX, a necessidade de resolver problemas mais complexos e o avanço científico da época motivaram e tornaram possível o surgimento do aparato responsável por mudar a realidade e modo de vida da sociedade desde então; o **computador**, o qual se destacam, entre os criadores, nomes como Alan Turing e John von Neumann. Verificada sua viabilidade, foi uma questão de tempo para que computadores digitais estivessem disponíveis à população em geral.

Atualmente, o desenvolvimento científico é praticamente indissociável da computação. Além disso, hoje em dia é possível fazer uso de computadores para uma grande variedade de tarefas, tais como consumir mídias de entretenimento, notícias, nos comunicar e até mesmo controlar o funcionamento de automóveis e imóveis. A demanda por dispositivos digitais com maior capacidade de armazenamento e processamento não é apenas perene, mas também exponencialmente crescente, com utilização maior em diferentes esferas da vida.

Como regra geral, o aumento na eficiência e na portabilidade de aparelhos computadores digitais reside na criação de dispositivos eletrônicos cada vez menores conforme surgem avanços científicos nas áreas pertinentes às suas criações (por exemplo, no campo de micro/nanoeletrônica, semicondutores e teoria quântica de sólidos), definindo o processo hoje conhecido como **miniaturização**. Desde o início de sua utilização até sua adoção em massa se fez presente o questionamento: qual é a máxima capacidade possível de processamento que computadores podem atingir?

Foi Gordon Moore, químico e físico estadunidense, quem primeiro percebeu que a evolução do desempenho nos computadores era destoante a ponto de dobrar de capacidade a cada período de 18 - 24 meses. Introduzida pelo mesmo no ano de 1965, a então chamada **Lei de Moore** permaneceu válida pelas décadas restantes do século XX e iniciais do século XXI, quando começou a apresentar inconsistências devidas às falhas inerentes à miniaturização; conforme os componentes se tornam cada vez menores, efeitos quânticos passam a se fazer presentes e interferem no funcionamento do mesmo [1].

Dentre as propostas para contornar o problema, desponta como um caminho natural a mudança do paradigma da computação atual baseado na física clássica, substituindo-o pelo que se conhece hoje como computação quântica que, como explícito em seu próprio nome, se pauta nas propriedades da Mecânica Quântica para processar informação.

Pode-se dizer que o impulso inicial para o desenvolvimento de um computador quântico se deu a partir do início da década de 80, quando o físico Richard Feynman propôs a visão de que um computador quântico seria uma ferramenta eficiente para simular a natureza e assim, resolver problemas complexos da física e da química [2]. A partir disso, não apenas muitos trabalhos relevantes para a área vieram à luz, como também outros ramos científicos surgiram. Por exemplo, podemos citar as contribuições de Bennett e Brassard [3] e Shor [4], que serviram de base para o desenvolvimento da criptografia quântica.

Mas, o que torna um computador quântico uma máquina com poder de processamento tão superior a ponto de substituir os tão desenvolvidos computadores digitais atuais em termos de processamento? De imediato, podemos citar duas delas. A primeira e mais óbvia consiste na adoção de uma nova unidade básica de informação. Enquanto em um computador clássico usamos o conhecido *bit* - uma variável que pode assumir os valores 0 ou 1 para codificar a informação em números binários - um computador quântico trabalha com o conceito de *qubits* (do inglês “quantum bit”). Um qubit, entretanto, assume não apenas os valores 0 ou 1 para representar uma informação, mas também um valor superposto entre ambos. Um qubit é então representado por um sistema de dois níveis definido em um espaço de Hilbert, representado por:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1)$$

onde $|\alpha|^2$ ($|\beta|^2$) nos dá a probabilidade de obtermos o sistema no estado $|0\rangle$ ($|1\rangle$).

A segunda implicação, menos óbvia inicialmente, advém das consequências do uso do qubit como unidade de informação. Computadores quânticos apresentam a característica inerente de *paralelismo quântico*, proveniente da sobreposição dos estados de um qubit. Posto em outras palavras, a associação de qubits em tarefas de processamento permite ao computador quântico, em apenas UMA execução do programa, lidar com TODOS os resultados possíveis! Devemos frisar que isso é bem diferente do processamento em paralelo clássico, em que vários circuitos trabalham, separadamente ou em conjunto, com uma solução ou um conjunto de soluções específicas. Um dos primeiros exemplos desse poder é o **algoritmo de Deutch-Josza**, que embora não tenha uma aplicação imediata, faz o eficiente uso das propriedades de paralelismo para descobrir informações sobre uma função em tempo muito menor que um computador clássico [1]. Vejamos mais detalhadamente abaixo.

Suponha que Bob desafia Alice em um jogo de adivinhação, que consiste em descobrir qual de dois tipos de função ele calcula com uma máquina que apenas ele conhece. A máquina recebe apenas um número qualquer x , que vai de 0 a $2^n - 1$ (onde n se refere ao número de bits), e retorna um valor do conjunto $\{0, 1\}$. Alice precisa descobrir se a máquina de Bob calcula uma função *balanceada*, isto é, retorna quantidades iguais de 0 e 1 para o conjunto de valores x recebido, ou se ela calcula uma função constante, que retornará sempre o mesmo valor independente do valor de x escolhido. Como regras do jogo, Alice só pode enviar a Bob um número por vez, e ambos devem se comunicar o mínimo possível.

Dado este problema, o quão fácil será para Alice descobrir o tipo da função que Bob calcula com sua máquina? Em tese, bastaria um resultado diferente para o conjunto de números x que Alice envia para que a mesma descubra que a função não é do tipo constante. No pior dos casos, Alice precisará testar $2^n/2 + 1$ valores para adivinhar o tipo de função da máquina. No melhor dos casos, Alice resolveria o problema com dois valores e muita sorte.

Como percebido por Deutch e Josza, a versão quântica deste problema pode ser resolvida com apenas um único palpite! Representando a máquina secreta de Bob pelo operador U_f , que atua sobre um estado qualquer $|x, y\rangle$ tal que:

$$|x, y\rangle \xrightarrow{U_f} |x, y \oplus f(x)\rangle, \quad (2)$$

com $x, y \in \{0, 1\}$ e $y \oplus f(x) = y + f(x) \text{ MOD } 2$. Alice pode, por exemplo, escolher um número x formado por $n + 1$ qubits na forma $|0\rangle^{\otimes n} |1\rangle$, em que $|0\rangle^{\otimes n} = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 \dots |0\rangle_n$. Após isso, Alice pode interagir com os kets aplicando em cada um uma Porta Hadamard [1], obtendo o estado $|\psi_1\rangle$,

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle). \quad (3)$$

O operador U_f atua sobre o estado, seguindo (2). O estado resultante é $|\psi_2\rangle$,

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}} |x\rangle (|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle). \quad (4)$$

Aplicando novamente uma transformação de Hadamard nos n primeiros qubits, Alice obtém:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}} (-1)^{f(x)} \left(\sum_{y \in \{0,1\}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} (-1)^{xy} |y\rangle \right) (|0\rangle - |1\rangle), \quad (5)$$

e, após reorganizar os termos e descartar o último qubit,

$$|\psi_3\rangle = \sum_{x,y \in \{0,1\}} \frac{1}{2^n} (-1)^{xy+f(x)} |y\rangle. \quad (6)$$

Por fim, Alice precisa apenas medir a probabilidade de se obter $|0\rangle^{\otimes n}$, que vale:

$$|{}^{n\otimes} \langle 0 | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \sum_{x \in \{0,1\}} \frac{1}{2^n} (-1)^{f(x)} \right|^2. \quad (7)$$

Caso a função seja constante, $|{}^{n\otimes} \langle 0 | \psi_3 \rangle|^2 = 1$ devido aos n qubits constituintes do número escolhido. Do contrário, obteremos termos simétricos que se anularão mutuamente, fornecendo por consequência $|{}^{n\otimes} \langle 0 | \psi_3 \rangle|^2 = 0$. Perceba que esse resultado foi possível apenas por considerarmos que por meio da superposição dos qubits de Alice, eles representam todos os estados possíveis em todos os instantes!

Outro fato interessante que pode passar despercebido é precisamente o tipo de informação que foi descoberta a partir da interação com o sistema quântico. Foi possível, sem nenhuma análise da função, obter uma informação global sobre o seu comportamento; até então, isso também não seria possível sem que houvessem os testes necessários classicamente, ou ao menos, algum estudo analítico sobre a função.

Até o momento de escrita deste trabalho, o maior feito experimental já realizado em computação quântica é atribuído ao time de cientistas dos laboratórios da empresa privada Google, em colaboração com cientistas de diversos outros institutos de ensino e pesquisa ao redor do mundo. Frank Arute *et al.* afirmam em [5] terem desenvolvido e utilizado o processador quântico *Sycamore*, contendo uma rede bidimensional de 54 qubits supercondutores que são acoplados em seus vizinhos mais próximos, gerando assim um espaço de Hilbert de dimensão $2^{53} (\approx 9 \cdot 10^{15})$ para resolver um determinado problema que, de acordo com as estimativas seria temporalmente impossível para um computador clássico. O *Sycamore* precisou de 200s para chegar a uma solução que os supercomputadores mais desenvolvidos da atualidade levariam 10^4 anos para obter, o que o tornaria portanto o primeiro cálculo da história a ser possível de ser resolvido apenas por um processador quântico.

Este resultado tem sido vigorosamente contestado pelo time de pesquisadores de outra tradicional empresa de tecnologia, a IBM [6]. Os pesquisadores apontam que teoricamente é possível fazer simulações tangíveis utilizando o supercomputador Summit com sofisticadas técnicas desenvolvidas na computação tradicional, chegando a um resultado semelhante em dias. Até a data de escrita deste trabalho, o resultado ainda carece de comprovações experimentais.

1.1 REDES QUÂNTICAS

Verificado o aumento de performance na computação usando qubits em vez de bits clássicos, é conveniente analisar a escalabilidade de seu uso. Uma vez que seja possível o uso e a associação de qubits em tarefas de processamento como a do algoritmo no exemplo anterior, o que mais é possível criar? De maneira semelhante à computação clássica, voltam-se os olhares de pesquisadores sobre o conceito de *redes quânticas*.

Núcleo do controle e das operações sobre qubits, a rede quântica consiste na junção de dois ou mais nós que atuam como processadores quânticos, isto é, unidades capazes de armazenar e realizar operações lógicas com qubits, transferir estados quânticos e gerar emaranhamento.

A capacidade de uma rede puramente quântica é exponencialmente superior à combinação de elementos clássicos e quânticos para a transmissão de informação sobretudo para problemas associados à correção de erros e ao funcionamento de softwares quânticos. Torna-se claro o aumento do desempenho de processamento com a adição de elementos quânticos já no processador *Sycamore* [5] - uma rede com k nós e n qubits ligada por meio de canais clássicos tem dimensão $k2^n$, bem menos que a que utiliza canais quânticos, com dimensão 2^{kn} [7, 8].

A construção de uma unidade de processamento quântico esbarra em vários desafios - no topo destes, se destacam o controle sobre elementos atômicos e subatômicos com alta precisão local e a própria robustez do sistema, que precisa manter a coerência, sendo necessário isolá-lo o máximo possível para que não haja interações indesejadas com o ambiente (geralmente em temperaturas criogênicas). Por outro lado, resultados bastantes significativos na área de computação quântica tolerante a falhas [9, 10] geram um certo otimismo nessa direção. Problemas associados à física da informação quântica em si também requerem sua devida atenção; por sua relação com o desenvolvimento desta tese, falaremos um pouco mais sobre isso na seção 2.1, abaixo.

Atualmente, uma das plataformas mais promissoras para implementação física da computação quântica é baseada em eletrodinâmica quântica de circuitos [11]. Inclusive, os computadores quânticos desenvolvidos pela Google e pela IBM fazem uso de qubits supercondutores. Experimentos mostram que qubits supercondutores mantêm a coerência por um tempo que torna possível a tolerância à falhas, com tempos da ordem de 20-60 μs [12, 13].

Em geral, tratando-se de redes quânticas, sistemas híbridos que apresentam interação entre luz e matéria oferecem uma certa conveniência uma vez que fótons podem propagar-se por longas distâncias e átomos aprisionados são boas memórias quânticas [7, 14, 15]. Cavidades

e fibras ópticas são utilizadas com sucesso para a geração e a transferência de qubits [16, 17], assim como pontos quânticos [18, 19].

Por outro lado, o controle constante dessas interações podem induzir a erros, devido a processos de decoerência. Uma alternativa é o uso de dispositivos de estado sólido, tais como redes de *spin* pré-configuradas [20], tema central deste trabalho e que será explorado com mais detalhes no Capítulo 2.

1.2 PROTOCOLOS DE TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

A utilização de qubits no processamento de informações representa, de fato, um avanço sem precedentes nas tecnologias digitais. Entretanto, a natureza linear de operações sobre sistemas quânticos requer especial atenção ao lidar com as tarefas de gestão da informação. Operações até então simples, como a cópia de informações entre dispositivos, não é permitida. Pode se demonstrar essa afirmação nas operações que se seguem.

Consideremos inicialmente um sistema composto por 2 qubits num estado $|\psi\rangle|s\rangle$, com $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ e $|s\rangle$ sendo um qubit "em branco", que servirá de base para a cópia. A partir disto, podemos manipular este sistema apenas de duas formas possíveis: ou realizamos uma *observação* do sistema, fazendo-o colapsar em um estado específico (o que, a priori, é totalmente o oposto de nossa intenção); ou alternativamente, interagimos com o sistema completo por meio de um operador unitário que evolui com o tempo a fim de obtermos o resultado desejado antes da observação. Então, assumindo que esse operador de fato exista, podemos escrever:

$$U|\psi\rangle|s\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle. \quad (8)$$

A partir disto, ao se realizar a cópia de um segundo estado $|\phi\rangle$, montamos o sistema:

$$U|\psi\rangle|s\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle; \quad (9)$$

$$U|\phi\rangle|s\rangle = |\phi\rangle|\phi\rangle. \quad (10)$$

Finalmente, fazendo o produto interno entre estas duas equações, obtemos a igualdade

$$\langle\psi|\phi\rangle = |\langle\psi|\phi\rangle|^2, \quad (11)$$

válida apenas nos casos em que $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ e em que $|\psi\rangle \perp |\phi\rangle$. Este resultado é conhecido como *Teorema da não-clonagem*, descrito em [21].

Logo, um estado geral não pode ser clonado, sob pena da perda das vantagens de estar sobreposto. Portanto, uma vez que a informação quântica contida no qubit não pode ser copiada, é necessário que ela seja *transferida* entre os pontos de interesse onde ela é necessária.

De maneira geral, a transferência de estados quânticos pode ser realizada de duas formas. A primeira delas (e menos intuitiva) envolve inicialmente emaranhar dois estados para que depois se faça a transferência de um terceiro por **teleporte quântico**. A segunda, por outro lado, envolve a criação de um **canal quântico**, pelo qual os estados podem seguir de um ponto a outro seguindo estratégias diversas para criação, envio e armazenamento.

O teleporte quântico é um protocolo intrinsecamente quântico uma vez que, devido à necessidade de emaranhamento, não encontra análogo na física clássica. Previsto teoricamente em 1993 [22], para que o teletransporte quântico ocorra entre dois pontos distintos, é necessário que o emissor (Alice) e o receptor (Bob) tenham consigo duas partículas maximamente emaranhadas (estados de Bell). O processo de envio do estado se dá quando Alice promove o emaranhamento de sua parte no estado de Bell com o qubit a ser enviado, efetuando assim uma medida conjunta na base dos estados de Bell. Alice então avisa Bob por algum meio de comunicação clássico o resultado de sua medida, de modo que Bob possa aplicar localmente a porta lógica correta no qubit ao qual ele tem acesso, assim recuperando o estado inicialmente possuído por Alice.

Um protocolo que aqui merece destaque consiste em transferir estados quânticos em cadeias de *spin* pré-configuradas, conforme introduzido por Bose [20]. Em contraste ao teleporte quântico, é mais simples, não requerendo uma medida para se obter o estado transferido. Além disso, se apresenta como forma promissora para transferir estados à curtas distâncias, como entre os diferentes dispositivos que fazem parte do computador quântico. Neste protocolo, Alice e Bob dispõem de uma quantidade N de *spins* interagentes sujeitos a um Hamiltoniano unidimensional de Heisenberg. Alice, tendo o controle de um determinado sítio da cadeia, prepara o *spin* que ocupa em um determinado estado de um qubit (conhecido ou não) que deve ser enviado para Bob, que controla um outro sítio da rede. Para recuperar o estado emitido por Alice, Bob precisa apenas esperar a evolução temporal do sistema, visto que no caso proposto a fidelidade tem uma dependência do tempo. A única consideração feita para o funcionamento do sistema, além do Hamiltoniano ao qual ele está sujeito, é que todos os *spins* (com exceção do de Alice) estejam no nível fundamental antes da dinâmica começar.

Apollaro *et al.* [23] divide os protocolos de QST (do inglês *Quantum State Transfer*) atuantes em sistemas de *spin* 1/2 entre dependentes e independentes do tempo. No primeiro, a operação de transferência é realizada por meio da modulação temporal dos parâmetros de

interação; no segundo, os parâmetros são mantidos fixos durante a execução do protocolo de QST. Ainda, o autor classifica os sistemas de Hamiltonianos independentes do tempo de acordo com as estratégias adotadas para maximizar a medida de fidelidade do sistema, se encaixando em três categorias: métodos de engenharia de acoplamento, balístico e dinâmica do tipo Rabi.

Nos sistemas com engenharia de acoplamento, os termos de acoplamento dos vizinhos mais próximos são escolhidos de forma a manter a linearidade do espectro de energia, garantindo assim que não haja a dispersão da transferência da excitação. Um exemplo desta estratégia pode ser vista em [24], em que os autores realizam o protocolo de QST em um grafo sujeito à ação de um Hamiltoniano com interações do tipo XY , atingindo a fidelidade máxima graças a uma relação com a matriz de adjacência da cadeia.

Sistemas balísticos são aqueles em que se alteram apenas as energias de acoplamento do emissor e receptor da cadeia, de maneira a ter a maior parte dos modos em uma porção do espectro. Banchi *et. al* [25] propõem um modelo em que obtém regimes alternados que vão das oscilações de Rabi até o balístico, observando a redução do tempo de transmissão de informação entre os regimes citados.

Sistemas que apresentam oscilações de Rabi também têm seus valores de energia de acoplamento do emissor e receptor alterados em relação ao resto da cadeia. Escolhendo valores muito menores que as energias de acoplamento dos *spins* da cadeia, é possível restringir a dinâmica para dois ou três modos de excitação efetiva que ocorrem entre os pontos iniciais e finais da mesma, conforme modelos introduzidos nas Refs. [26, 27]. Em [26], Wójcik *et. al* demonstram que pequenos valores para a energia de acoplamento do emissor/receptor tem o efeito de eliminar as contribuições não harmônicas do espectro de autovetores da cadeia, aumentando sua sensibilidade à ressonâncias espontâneas e fazendo com que a dinâmica do sistema fosse aproximada por um modelo efetivo de dois níveis interagentes. Os autores também apresentaram a desvantagem associada ao método, que é o longo tempo de espera para o sistema atingir altos valores de fidelidade de transferência. A maximização da fidelidade do sistema em um protocolo de QST na presença de desordem por meio das oscilações de Rabi faz parte dos objetivos deste trabalho, e será tratada com maior profundidade na seção 2.4.

Os avanços nos estudos de protocolos para QST têm trazido resultados positivos. Podemos destacar os resultados obtidos na ref. [28], no regime balístico, onde fidelidades da ordem de 0.99 foram obtidas utilizando a simetria de espelho para determinar as energias dos pares de *spins* nas pontas da cadeia de um canal quasi-uniforme, ou seja, um canal que tem seus termos de hopping com pouquíssimas diferenças entre si. Em [23], o mesmo grupo propôs um método

para a transferência n , ($n \geq 1$) estados ao longo de uma cadeia uniforme. É destacado que o elemento principal para que haja a transmissão dos estados quânticos é a presença de um forte campo magnético no primeiro e último *spin* da cadeia de transmissão (portanto os *spins* $n + 1$ e $n + N$), que acaba efetivamente desacoplando os *spins* a serem enviados e recebidos da cadeia de transmissão, o que resulta num Hamiltoniano efetivo que admite oscilações de Rabi entre estes dois extremos da cadeia.

Até então, os protocolos até aqui apresentados para QST são normalmente considerados ideais, não levando em conta as dificuldades de fabricação e implementação destes canais que podem alterar dramaticamente a transferência de estados. Neste contexto, é importante entender como as cadeias são alteradas pela introdução de desordem nem verificando sua viabilidade como canal de transferência.

1.3 DESORDEM, LOCALIZAÇÃO E GRAFENO

O estudo de sistemas desordenados na Física tomou a forma atual com a necessidade de compreensão da condutância dos elétrons em materiais. As tentativas de compreender por que razão os elétrons não sofriam espalhamento ao se chocarem com os íons em pontos regulares das redes cristalinas só tiveram sucesso com o advento da teoria quântica, no século *XX*. A natureza ondulatória do elétron permite que ele sofra difração ao encontrar os íons, encontrando resistência apenas por impurezas no cristal [29].

Estudando a desordem introduzida nas cadeias cristalinas, P. W. Anderson publicou em 1958 um trabalho em que procurava explicar como a condutividade sofria variações mediante a presença dessas impurezas [30]. Nele, foi proposta e realizada uma simulação numérica para a dinâmica de um elétron em um material. Anderson considerou uma rede com vários sítios distribuídos de alguma maneira, regular ou aleatoriamente num espaço tridimensional. Estes espaços, ocupados por outros elétrons, apresentam uma energia E_n local de interação, escolhida aleatoriamente, representando a desordem presente no canal, e um termo de acoplamento V_{jk} que é responsável por transferir o elétron do sítio j ao sítio k . A simulação é simplificada, desprezando por exemplo, efeitos coulombianos na interação eletrônica. As únicas interações provêm do potencial aleatório em E_n .

No caso de Anderson, os valores de E_n foram escolhidos aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme de probabilidade com uma certa largura W , e verificou-se que o sistema não apresentava condução, devido ao efeito de interferência causada pela desordem no sistema [30]. Em resultados posteriores, Abrahams *et al.* [31] mostrou que para um sistema tridimensional,

existe um valor crítico de energia W_c para o qual ele se comporta como um condutor quando $W < W_c$; do contrário, os elétrons passam a ficar "presos" e o material torna-se um isolante, não permitindo a condução de elétrons. Além de sistemas eletrônicos, a localização de Anderson pode ser vista em praticamente todos os outros campos ondulatórios. A ref. [29] cita, por exemplo, evidências da localização na luz, micro-ondas, ondas acústicas e até é levantada a possibilidade de sua existência em ondas sísmicas.

O trabalho de Anderson inspirou outros pesquisadores a buscarem mais respostas sobre o processo de localização eletrônica, bem como fenômenos decorrentes dela. Por exemplo, Mott [32] foi o primeiro a trazer a noção de **limite de mobilidade** (do inglês, *mobility edge*), um valor de energia para o qual os elétrons com energia superior apresentam estados estendidos, ao passo que aqueles que apresentam energia inferior se encontram localizados.

Além desses, podemos citar o trabalho de Thouless [33], que aplicou a teoria de escala ao modelo de Anderson e estabeleceu na literatura o parâmetro de desordem g , expresso pela razão entre as grandezas conhecidas como tempo de Thouless (o tempo que leva para um elétron em condução pode chegar às bordas da amostra seguindo um movimento browniano) e tempo de Heisenberg (o tempo máximo que um elétron em condução leva para chegar até a borda da amostra sem passar duas vezes no mesmo lugar). Caso o tempo de Thouless seja maior que o de Heisenberg, $g < 1$, e diante disso o elétron se encontraria localizado [29].

Alguns anos depois, Theodorou e Cohen [34] acreditavam ter evidências teóricas de que cadeias em uma e duas dimensões apresentavam comportamento condutor, desde que representassem a desordem nos termos fora da diagonal (ou seja, os termos de energia de ligação da cadeia, também chamados de termos de *hopping*). Esse resultado foi contestado com sucesso por Fleishman e Licciardello [35], que afirmaram que o sistema ainda se comporta como isolante, argumentando que o coeficiente de transmissão era reduzido a zero no limite termodinâmico. Este resultado foi ainda reforçado por Abrahams *et al.*, que mostrou que em sistemas de uma e duas dimensões todos os estados são localizados, não havendo condução de elétrons [31].

No fim dos anos 80, publicações envolvendo o conceito de desordem correlacionada e aperiodicidade chamaram atenção. Flores [36] observou que era possível quebrar a localização de Anderson adotando valores aleatórios tanto para os termos de desordem quanto para os termos de hopping, desde que houvesse uma correlação entre eles. Outras pesquisas que podemos citar são as relacionadas à aperiodicidade. Dado o caráter determinístico de sistemas aperiódicos e quasiperiódicos, é costume não se referir aos sistemas que apresentam esse tipo de defeito como desordem, visto que esta indica a ocorrência dos defeitos de maneira aleatória. A existência de

mobility edges e estados estendidos em cadeias unidimensionais foi teoricamente indicada pela primeira vez no estudo de cadeias aperiódicas [37]. Mais adiante, a seção 1.4 traz um maior destaque ao tema, dado o interesse especial do escopo deste trabalho.

Ainda no final da década de 80 Dunlap *et al.*, motivados pelos trabalhos de Anderson e Flores, obtiveram resultados interessantes envolvendo também as cadeias unidimensionais. Redes do tipo dímero, isto é, formada por dois tipos de células diferentes, apresentam uma transição entre estados localizados e estendidos, ao contrário do que a literatura afirmava a priori [38]. Posteriormente, pesquisadores obtiveram êxito ao utilizar o formalismo de Dunlap para explicar a transição isolante-metálica da polianilina, polímero flexível cuja condutividade já vinha sendo estudada [39]. Vale lembrar que a polianilina, por ser constituída de anéis benzenóides, trata-se de uma cadeia quasiunidimensional, ou seja, apresenta mais de uma dimensão, mas estas sendo de menor expressividade em relação à sua extensão, podendo portanto ter as suas características aproximadas por uma cadeia unidimensional. Vários outros trabalhos da época trataram da ideia de representar polímeros por meio de cadeias quasiunidimensionais, descobrindo novas propriedades supercondutoras [40] e ópticas [41], por exemplo. Ainda, outros polímeros foram criados e modelados por meio de redes quasiunidimensionais, a fim de se descobrirem suas propriedades eletrônicas e de localização [42, 43].

Em 1998, Moura e Lyra obtiveram resultados importantes com redes introduzindo uma correlação de longo alcance na desordem diagonal do sistema, de maneira que esta foi caracterizada por um espectro da lei de potência na forma $S(k) \propto 1/k^\alpha$. As energias locais foram geradas tomando o traço do movimento browniano fracionário. O expoente α oferece uma medida do controle sobre a correlação desordem: para $\alpha = 0$, recuperamos o caso não correlacionado, ou seja, o modelo de Anderson tradicional com os modos exponencialmente localizados. A forma usual do traço do movimento browniano fracionário é obtida com $\alpha = 2$. Usando a técnica de grupos de renormalização, os autores mostraram que para $\alpha > 2$ existe uma região no centro da banda formada por estados estendidos [44].

Além destes, Moura *et al.* também investigaram a introdução das propriedades da correlação de longo alcance nos termos de hopping. Com um formalismo semelhante, obteve em contraste com o trabalho anterior, mostrando a existência de estados estendidos para $\alpha > 1$ [45]; também estudou fenômenos resultantes da introdução de correlações de longo alcance em cadeias harmônicas [46] e ferromagnéticas [47], entre outros.

No contexto desse trabalho, destaca-se mais uma vez a importância do estudo de desordens aplicadas a protocolos QST, devido aos possíveis erros associados à produção dos

dispositivos, por exemplo, que podem alterar drasticamente a dinâmica do sistema.

Motivados por isso, Almeida e colaboradores propuseram um estudo teórico de QST em uma cadeia sujeita à desordem correlacionada de longo alcance [48]. Seus resultados apontam a robustez da técnica de oscilações do tipo Rabi, que consegue manter altas fidelidades mesmo na presença de desordem; foram obtidos altos valores de fidelidade para $\alpha = 2, 3$. Ainda, para $\alpha = 2$ é possível notar um regime de transição. Por fim, estabelecendo uma relação entre o tempo de transferência numa cadeia ideal e o tempo de transferência na cadeia desordenada, os autores conseguiram obter uma estimativa razoável do tempo necessário para se alcançar a ótima fidelidade.

Cabe destacar aqui um material de interesse para foco da tese: o grafeno, forma cristalina de átomos de carbono, dispostos em uma rede hexagonal bidimensional. O grafeno apresenta propriedades muito interessantes principalmente do ponto de vista da condução eletrônica, exibindo fraca localização não apenas devido ao espalhamento inelástico e mudanças na direção do *spin*, como previa a literatura até então, mas por uma gama de fatores que são especiais nesse material [49–51]. Do ponto de vista da computação quântica, o grafeno se destaca por seu uso na fabricação de qubits [52–54] e processamento [55, 56], além da possibilidade da utilização da dinâmica balística com alto grau de controle na transferência de informação [57].

1.4 APERIODICIDADE

Na década de 80, a relação entre os defeitos e o sistema em estudo ganhou maior destaque à vista dos pesquisadores. Foi percebido que a comensurabilidade dos potenciais em relação ao sistema estudado poderia permitir a existência de uma transição entre o comportamento isolante e metálico. O maior exemplo deste comportamento refere-se ao trabalho de Aubry e Andre [58], que obtiveram todos os autoestados localizados ou estendidos a depender da força do potencial e da energia. Outros trabalhos indicavam ainda a localização para todos os estados em cadeias unidimensionais [59].

De nosso interesse, os resultados mais importantes ocorreram no ano de 1988, com o trabalho de Sankar das Sarma [37, 60]. Embora outros estudos relacionados viessem à tona praticamente na mesma época [61, 62], foi Sarma quem primeiro determinou a existência de *mobility edges* em sistemas unidimensionais [60].

Em sua pesquisa, Sarma estudou a série aperiódica incomensurável:

$$V_n = \lambda \cos(\pi\alpha n^\nu), \quad (12)$$

em que V_n se refere ao valor do potencial no n -ésimo sítio, e λ , α e ν são parâmetros que caracterizam a aperiodicidade e a localização. Por exemplo, definindo um valor de α racional e considerando $\nu = \lambda = 1$ coloca o potencial em uma forma já estudada anteriormente por Harper em [63]. Sarma verificou que, para α irracional, $0 < \lambda < 2$ e $0 < \nu < 1$, expoente de Lyapunov do sistema (neste caso, o inverso do comprimento de localização) atinge valores zero, indicando a existência de regimes metálicos para valores de energia compreendidos no intervalo simétrico $E_c < |2 - \lambda|$ [60]. Pouco tempo depois, na ref [37], obteve informações mais detalhadas acerca do potencial, obtendo expoentes críticos e demonstrando de fato a possibilidade de existência dos mesmos *mobility edges* não apenas para este, mas para todos os outros potenciais "de lenta variação".

O trabalho de Sarma foi bastante frutífero. Novos desenvolvimentos foram realizados buscando melhorar a compreensão sobre que condições físicas são necessárias para a obtenção de estados estendidos em cadeias unidimensionais [64].

A aplicação direta da aperiodicidade em outros sistemas também trouxe expressivos resultados: a ref. [65] mostra, por exemplo, a existência de oscilações de Bloch de um elétron em uma rede unidimensional sujeita a um potencial aperiódico. Sob a ação de um campo elétrico uniforme e estático, tais oscilações permanecem moduladas, sendo sua frequência proporcional à largura da banda de energia na qual se encontram estados estendidos para o modelo aperiódico. Um trabalho semelhante foi desenvolvido mais tarde, destacando a dinâmica de um pacote de onda em uma rede bidimensional, também sujeita ao potencial aperiódico, em ambas as direções: $V_{\mathbf{m}} = V \cos(\pi\alpha m_x^{\nu_x}) \cos(\pi\alpha m_y^{\nu_y})$, com $m_{x,y}$ se referindo às posições x e y dos sítios na rede. Neste, resultados apontam, para além da existência de oscilações de Bloch em duas dimensões para o regime de estados estendidos, a possibilidade dos modos do centroide da distribuição variar por meio da escolha do ponto inicial da dinâmica. Medidas de condutância no regime de estados estendidos mostram ainda que a mesma escala com o tamanho da rede [66].

Pesquisas envolvendo o regime aperiódico também já se estenderam ao estudo de sistemas harmônicos [67, 68], transmissão de ondas em dielétricos [69] e cadeias ópticas bicromáticas [70]. A ref. [71] também traz resultados interessantes na dinâmica eletrônica sujeita à ação de potenciais aperiódicos.

Experimentalmente, resultados envolvendo a aperiodicidade também foram obtidos. Os avanços teóricos mais relevantes na área buscavam explicar o fenômeno à luz da aproximação *tight binding* não previam a existência de uma fase intermediária nos sistemas em estudo, se focando por padrão na existência e caracterização de *mobility edges* como função da energia do

sistema. A primeira comprovação da existência de uma fase intermediária, que separa estados completamente localizados de estados completamente estendidos foi realizada e documentada na ref. [72] utilizando uma rede bicromática quasiperiódica unidimensional, formada por redes ópticas de diferentes frequências para simular a aperiodicidade e uma nuvem de átomos para ocupar os determinados sítios. Como esperado, a aproximação *tight binding* mapeia o sistema no modelo teórico de Aubry-André. Em um experimento subsequente, pesquisadores observaram a existência do fenômeno de localização de muitos corpos também em redes bicromáticas quasiperiódicas [73].

Do ponto de vista da transferência de estado quânticos, pouco se fez para explorar as propriedades das distribuições de potencial com aperiodicidade. Nesse contexto, é interessante a visão da aperiodicidade como uma possível imperfeição do processo de fabricação [74]. No capítulo 3, veremos mais sobre a transferência de estados quânticos em meios aperiódicos.

1.5 SOBRE A TESE

Neste trabalho, trataremos duas das contribuições realizadas ao longo do período concernente ao programa de doutorado. O trabalho realizado se baseou na tentativa de expandir a compreensão acerca da transferência de estados quânticos por meio de cadeias de *spin*, utilizando os conceitos de desordem e aperiodicidade, com o objetivo final de facilitar a produção experimental (logo, industrial/comercial) de canais de estado sólido que possam fazer parte da construção de computadores quânticos funcionais e acessíveis ao público.

Em uma das etapas do processo, lançamos o nosso olhar sobre uma rede de *spin* 1/2 unidimensional, cujas energias locais seguem a série aperiódica de Sarma, vista em [37, 60] e explicitada na equação (12), com os termos de hopping permanecendo uniformes em toda a sua extensão. Tomamos como medida principal da eficiência da transferência de informação a fidelidade. Os resultados obtidos mostram que a aperiodicidade permite a alta eficácia da transferência do estado que contém a informação, que ocorre se utilizando da existência dos estados estendidos no centro e nas redondezas imediatas do centro da banda de energia. Além disso, é mostrada a equivalência de fidelidade com a cadeia inteiramente uniforme rotineiramente utilizada em estudos semelhantes.

Na outra contribuição, estudamos teoricamente a viabilidade da transferência de estados quânticos por meio de uma tira de grafeno. Representamos o grafeno como uma rede quasiunidimensional que consiste basicamente na ligação em cadeia entre os vários anéis benzenóides que o compõem. Tratamos os termos de acoplamento como aproximadamente uniformes, apresentando

uma flutuação estática de amplitude variável em torno de seu valor de energia. Por meio do cálculo da Fidelidade, observamos a existência de transferência de estados com alta qualidade. Adicionalmente, propusemos a explicação da sensibilidade do sistema a pequenos valores de desordem como uma característica de seu espectro energético.

Em ambas as contribuições, também tomamos atenção ao processo de emaranhamento presente entre os *spins* emissor e receptor da transferência de estados. Nos dois casos, é demonstrado que existe de fato o emaranhamento bipartite entre estes elementos, basicamente nos mesmos intervalos de energia para o qual existe também alta fidelidade no processo.

A tese tem a seguinte organização: Neste primeiro capítulo, procura-se dar uma visão geral acerca da computação quântica, a importância dos métodos de transferência de estados, maiores realizações e alguns obstáculos que impedem o seu desenvolvimento da área como um todo; para além disso, uma breve introdução histórica de sistemas desordenados, buscando clarificar a relação entre o estudo de sistemas desordenados e os atuais temas de computação quântica.

No Capítulo 2, se encontra todo o embasamento teórico utilizado para a realização de nossa pesquisa, focada no fenômeno da transferência de estados, corroborada por uma revisão da literatura que traz alguns procedimentos experimentais realizados com diferentes técnicas de transferência de estados.

O capítulo 3 traz em detalhes os resultados obtidos, em ordem de obtenção. Inicialmente, as descrições das cadeias, método utilizado, gráficos e explicações.

Por fim, chega-se a algumas considerações finais acerca dos trabalhos descritos e algumas perspectivas futuras para o desenvolvimento de novos trabalhos por parte do doutorando.

2 Transferência de Estados Quânticos

Independente do tipo de hardware a ser construído, seu funcionamento depende primordialmente da existência de canais de transferência de informação. No caso quântico, como já referido anteriormente (ver Cap.1), isso se agrava ainda mais - a natureza linear dos autoestados impedem procedimentos de clonagem de informação. Portanto, mesmo que a ideia de clonagem de estados persista [75] a existência de canais quânticos de informação requerem robustez, sendo resistente a falhas e interações com o exterior.

A primeira vez que o termo *Quantum State Transfer* foi utilizado, a intenção não foi pautar-se em nenhum processo no âmbito da Informação Quântica. Publicado em 1984 por Kirchoefer *et al.*, as descobertas indicavam a existência de resistência diferencial negativa à temperatura ambiente, em um dispositivo que levava este nome [76]. Um ano mais tarde, o termo *quantum state transfer device* foi novamente digna de nota em um trabalho que relatava pela primeira vez a amplificação de microondas utilizando tal dispositivo [77].

Existem atualmente diversos esforços no sentido de desenvolver e aprimorar os processos de transferência de estados quânticos ao redor do mundo. Redes quânticas por meio de satélites já são uma realidade presente a alguns anos [78], e embora a confecção computador quântico viável esbarre em dificuldades como a própria transferência de estados, os avanços obtidos já se demonstraram úteis no que tange a exemplificar a superioridade de desempenho em relação ao computador clássico.

Com o objetivo de fundamentar teoricamente a maior parte desta tese, nos restringiremos ao estudo da transferência de estados quânticos através de cadeias de *spin*. As cadeias de *spin* foram primeiramente referenciadas como um canal de transmissão de estados quânticos em 2003 por S.Bose [20], que acabou por definir o protocolo padrão para o caso. Em seguida, faz-se necessário trazer a tona os trabalhos de Christandl *et al.* [24], tratando de condições especiais para a cadeia visando a obtenção de transferência de estados com qualidade. Mais adiante, é interessante dar o destaque a um tipo especial de engenharia de acoplamento que tem bons resultados, proposto por Wójcik [26,27], concluindo o capítulo com alguns experimentos que utilizam cadeias de *spin* como meio transmissor.

2.1 PROTOCOLO BÁSICO: CADEIAS DE *SPIN* HOMOGÊNEAS

Vejamos aqui em mais detalhes o protocolo definido por Bose em [20], detalhando como ocorre a transferência em uma cadeia de *spins* homogênea.

Consideremos inicialmente um grafo arbitrário cujos vértices representam os *spins* e as arestas representam as suas interações. As interações entre os *spins* são do tipo ferromagneto de Heisenberg, de maneira que se existem N *spins*, podemos escrever o Hamiltoniano das interações como:

$$\mathcal{H} = - \left(\sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j + \sum_{i=1}^N B_i z_i \right), \quad (13)$$

onde $\vec{\sigma}^i = (\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i)$ representam as matrizes de Pauli, $J_{i,j}$ é o termo de interação entre os $\langle i, j \rangle$ vizinhos e B_i é a intensidade do campo magnético estático que se aplica localmente em cada *spin*. O protocolo para transferir o autoestado é sumarizado nos seguintes passos:

1. Inicialmente, se prepara a cadeia no estado total $|\mathbf{0}\rangle_c = |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |0\rangle_i \dots |0\rangle_N$;
2. Acoplam-se na cadeia os estados $|\psi\rangle_s = a|0\rangle + b|1\rangle$ que queremos transferir e $|0\rangle_r$ como o respectivo receptor. A cadeia inteira portanto passa a conter $N + 2$ elementos. Podemos escrever o estado geral da cadeia recorrendo à notação do espaço de Fock, em que $|\mathbf{i}\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |i\rangle_i \dots |0\rangle_N$ se refere ao *spin* na posição i no estado $|1\rangle$; nesse caso, o estado completo final $|\Psi(0)\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\Psi(0)\rangle = a|\mathbf{0}\rangle + b|\mathbf{s}\rangle; \quad (14)$$

3. A partir disso, basta permitir que $|\Psi\rangle$ da cadeia evolua no tempo, segundo a operação unitária:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle = e^{-iHt} (|\psi\rangle_s |\mathbf{0}\rangle_c |0\rangle_r); \quad (\hbar = 1). \quad (15)$$

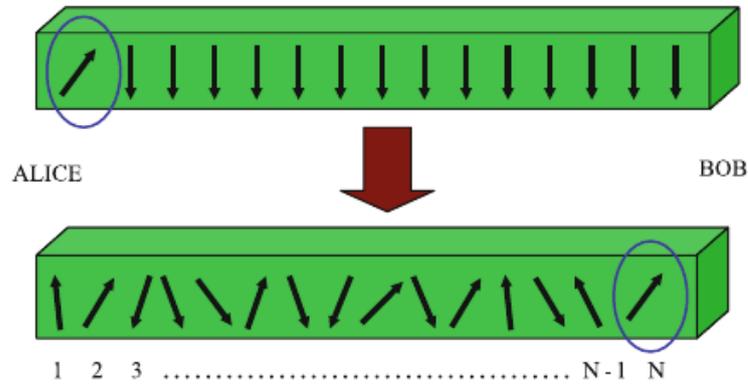
4. A partir da evolução temporal do sistema, o objetivo é recuperar o estado final num instante de tempo τ , em que a cadeia se encontrará no estado:

$$|\Psi(\tau)\rangle = |0\rangle_s |\mathbf{0}\rangle_c |\psi\rangle_r; \quad (16)$$

Ao longo da dinâmica, o estado da cadeia pode ser escrito como:

$$|\Psi(t)\rangle = a|\mathbf{0}\rangle + b \sum_{j=1}^{N+2} f_j |\mathbf{j}\rangle, \quad (17)$$

Figura 1 – Esquematização do protocolo básico de transferência de estados entre Alice e Bob.



FONTE: [79]

onde $f_j = \langle \mathbf{j} | e^{-i\mathcal{H}t} | \mathbf{s} \rangle$ é a amplitude de transição entre os *spins* s e j e os índices $j = 1, N + 2$ referem-se a s e r . A figura 1 ilustra graficamente a dinâmica do protocolo, em seus estados inicial e final, entre Alice (emissor) e Bob (receptor).

A eficiência da transmissão é obtida a partir do cálculo do valor médio da **fidelidade** sobre a esfera de Bloch,

$$\mathcal{F}(t_0) = \frac{1}{4\pi} \int \langle \psi | \rho_{out}(t_0) | \psi \rangle d\Omega = \frac{1}{2} + \frac{f_r}{3} \cos \varphi + \frac{|f_r|^2}{6}, \quad (18)$$

em que $\rho_{out}(t)$,

$$\rho_{out}(t) = P(t) |\psi_{out}(t)\rangle\langle\psi_{out}(t)| + (1 - P(t)) |0\rangle\langle 0|, \quad (19)$$

é obtido a partir do traço parcial dos *spins* $1, \dots, N + 1$ do operador geral $\rho(t)$ do estado total:

$$\rho_{out}(t) = \text{Tr}_{1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,N} \rho(t) = \text{Tr}_{1,2,\dots,r-1,r+1,\dots,N} |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|, \quad (20)$$

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(t)}} (a |0\rangle + b f_r(t) |1\rangle) \quad (21)$$

e

$$P(t) = a^2 + b^2 |f_r(t)|^2. \quad (22)$$

A fim de maximizar o valor médio da fidelidade na eq. (18), podemos escolher o campo magnético de modo a termos φ como um múltiplo de 2π . Adicionalmente, podemos garantir que o sistema se comportará de fato como um transmissor de informação, não gerando novos estados aleatórios provenientes da dinâmica temporal, dado que o subespaço das excitações se mantém

fixo no tempo [20, 80]. isso pode ser visto imediatamente a partir da relação de comutação:

$$\left[\mathcal{H}, \sum_{i=1}^{N+2} \sigma_z^i \right] = 0, \quad (23)$$

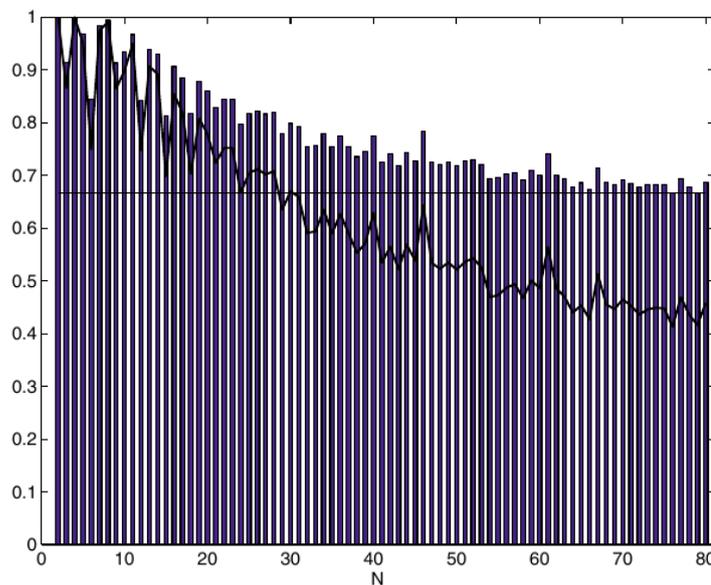
evidenciando a conservação da magnetização total ao longo da dinâmica.

Em seu trabalho, Bose também verificou a possibilidade de compartilhamento de correlações quânticas entre os *spins* da cadeia, em adição à transferência de informação. Caracterizou o emaranhamento ε como:

$$\varepsilon = |f_r(t)| \quad (24)$$

Obtendo resultados que apontavam para valores ótimos de fidelidade e concorrência, que decaíam com o tamanho da cadeia. A figura 1 esquematiza o processo de transferência entre a cadeia de spin, evidenciando os estados dos spins emissor e receptor. Os resultados obtidos por Bose podem ser vistos na figura 2.

Figura 2 – Fidelidade F (barras) e compartilhamento de emaranhamento ε (linha) para o protocolo de transferência de estados proposto por Bose, entre os *spins* 2 e 80, no intervalo de tempo $t \in [0, 4000J]$.



Fonte: [20]

De fato, a distribuição de emaranhamento ocorre neste tipo de fenômeno, sendo fortemente dependente dos autovalores e autovetores do grafo utilizado. Veremos um pouco mais sobre a distribuição de emaranhamento mais adiante, na seção 2.3.

2.2 LIMITES DA TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS EM CADEIAS HOMOGÊNEAS

A promissora ideia de transferência de estados ao longo de uma cadeia arbitrária de *spins* logo atraiu a atenção devido à sua aplicação como canal para transferência à curtas distâncias. Novas indagações sobre o tema surgiram. Dentre elas, talvez a de maior importância se refira ao tamanho máximo da cadeia de *spins* para o qual se obtenha a fidelidade unitária, isto é, a perfeita transmissão de qubits sem erros associados à natureza quântica do sistema. Inicialmente, vejamos como as cadeias lineares apresentam uma resposta relativamente simples, como pode ser visto em [80, 81].

Primeiramente, imaginemos um grafo G , com vértices $V(G)$ representando os qubits e arestas $E(G)$ que mostram se de fato os qubits estão acoplados ou não. Vamos caracterizá-lo pela sua matriz de adjacências A_{ij} , tal que:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in E(G); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (25)$$

Agora, supondo que os *spins* estão sujeitos inicialmente a uma interação de Heisenberg do tipo XY :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E(G)} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y), \quad (26)$$

teremos a condição de conservação de magnetização, semelhante ao que ocorre com a eq. (13) da seção 2.1, sendo também a dinâmica do sistema restrita ao subespaço das excitações em que todos os *spins* estão no estado fundamental exceto aquele que for preparado com o qubit para a transferência. Nestas condições, o Hamiltoniano do sistema é, para todos os efeitos, idêntico à matriz de adjacência do grafo que representa os *spins* e os acoplamentos (com termos de acoplamento $J = 1$). Se considerarmos portanto, que o grafo tem a forma de uma cadeia linear, Podemos obter suas autoenergias e seus autoestados da maneira usual, que valem respectivamente:

$$E_k = -2 \cos \left(\frac{\pi k}{N+1} \right) \quad (27)$$

e

$$|\tilde{k}\rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{i=1}^N \sin \left(\frac{\pi k n}{N+1} \right) |n\rangle. \quad (28)$$

para $k = 1, \dots, N$. A partir disso, podemos escrever a fidelidade $F(t)$ como:

$$F(t) = \langle N | e^{-iHt} | 1 \rangle = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{\pi k N}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{N+1}\right) e^{-iE_k t}. \quad (29)$$

Portanto, para $N = 2$ e $N = 3$, temos respectivamente as fidelidades $F(t) = -i \sin(t)$ e $F(t) = -(\sin(t/\sqrt{2}))^2$; logo, após um intervalo de tempo fixo ($t = \pi/2$ para $N = 2$ e $t = \pi/\sqrt{2}$ para $N = 3$), a fidelidade máxima é atingida. É possível demonstrar que a rede homogênea, não pode possuir valores de fidelidade unitários para $N > 3$ [81].

Entretanto, a possibilidade de transferência perfeita de qubits em cadeias de qualquer tamanho ainda pode ser demonstrada a partir da utilização de uma técnica bastante interessante. Se supormos agora que a mesma cadeia, de tamanho N , agora não contém apenas partículas de *spin* $1/2$, mas sim partículas fictícias de *spin* $(N-1)/2$, e modificarmos a interação para H_G ,

$$H_G = \sum_{n, n+1 \in E(G)}^N \frac{J_n}{2} [\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y], \quad (30)$$

a dinâmica do sistema ficará restrita ao mesmo subespaço que o caso da eq. (26), conservando portanto o número de excitações do sistema. Podemos também renomear os vetores da base de $|n\rangle$, $n = 1, \dots, N$ para $|m\rangle$, onde $m = -\frac{1}{2}(N-1) + n - 1$.

Na forma matricial, H_G poderá ser escrito como:

$$H_G = \begin{pmatrix} 0 & J_1 & 0 & \dots & 0 \\ J_1 & 0 & J_2 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & J_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & J_{N-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

forma essa que é idêntica à de um Hamiltoniano para uma partícula de *spin* $(N-1)/2$, $H = \lambda S_x$, onde S_x se refere ao operador de momento angular e λ é uma constante do problema. Os elementos da matriz são $J_n = (\lambda/2)\sqrt{n(N-n)}$. A dinâmica será descrita pelo operador:

$$U(t) = e^{-i\lambda S_x}. \quad (32)$$

A fidelidade valerá nessas condições:

$$F(t) = \langle N | U(t) | 1 \rangle \quad (33)$$

Adicionalmente, a referência [80] mostra que interações de Heisenberg do tipo XX, como o caso da eq. (13), podem ser reduzidas ao caso da eq. (33) caso seja aplicado um campo magnético de modo a balancear a energia local dos *spins*. Portanto, a fidelidade unitária pode ser obtida em cadeias de qualquer tamanho, com as condições de se controlar as interações interqubits e, a depender do caso, um campo magnético que varia espacialmente.

2.3 COMPARTILHAMENTO DE EMARANHAMENTO

Embora de maneira não explícita, as seções anteriores que tratam da transferência de estados mostra que a distribuição dos autovalores e a estrutura dos autovetores assumem um papel-chave nesse processo. A ideia aqui é, portanto, tornar isso mais claro.

Consideremos inicialmente uma cadeia de *spins* preparada de maneira semelhante ao que vimos na seção anterior - Uma rede linear contendo N *spins*, preparados no estado $|\psi\rangle_0 |0\rangle_{1,\dots,N}$, cujos *spins* interagem seguindo o Hamiltoniano já descrito em (13). A ideia é analisar a transferência do emaranhamento que existe, inicialmente entre os *spins* de número 0 e 1 dessa cadeia, mas que deve se estender até 0 e N . Para isso, podemos fazer uso da matriz densidade $\rho^{(01)}(t=0)$.

Reescrevendo a eq. (20) de maneira mais conveniente, a matriz densidade dos *spins* 0 e N , agora denominada $\rho^{(0N)}(t)$, é dada por

$$\rho^{(0N)}(t) = \text{Tr}_{2,\dots,N} \{ e^{iHt} (\rho^{(01)}(0) \otimes \Gamma(0)) e^{-iHt} \}, \quad (34)$$

onde $\Gamma(0)$ é a matriz densidade dos *spins* (2, ..., N). A simetria do Hamiltoniano, que fica restrito ao subespaço de excitação única, nos permite tratar a cadeia como um canal de atenuação de amplitude, de modo a ter sua dinâmica descrita como [82]:

$$\rho^{(0N)}(t) = \sum_{i=0,1} (\mathbb{I} \otimes M_i(t)) \rho^{(01)} (\mathbb{I} \otimes M_i(t)) \quad (35)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade de dimensão 2 e $M_0(t)$, $M_1(t)$ valem:

$$M_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_{N1}(t) \end{pmatrix}; \quad (36)$$

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 - |u_{N1}|^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

com $u_{N1} = \langle N | e^{-iHt} | 1 \rangle$ se referindo à amplitude de transição dos estados.

Podemos considerar a matriz densidade os *spins* 0,1 com a forma representada abaixo:

$$\rho^{(01)}(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}; \quad (38)$$

conhecida comumente como densidade em forma X. Essa forma específica da matriz densidade ficou conhecida pela sua rotineira ocorrência em estados bipartites emaranhados [83, 84]. Resolvida a eq. (35), A matriz resultante preserva sua forma; A concorrência $C(\rho^{(0N)}(t))$ nesse caso será dada então por $C(t) = 2max\{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\}$. Caso os *spins* estejam maximamente emaranhados, podemos escrever $C(\rho^{(0N)}(t)) = |u_{N1}|$.

A amplitude de transição é:

$$u_{N1}(t) = \langle N | e^{-iHt} | 1 \rangle = \sum_{k=1}^N U_{kN} U_{k1} e^{-i\omega_k t} \quad (39)$$

para U_{ki} sendo a i -ésima componente do autovetor do Hamiltoniano, ao passo que ω_k é o seu correspondente autovalor.

No caso da rede homogênea, o caráter não linear de ω_k e a presença de muitos termos no somatório leva a transmissão do emaranhamento quase sempre a divergir, embora sempre se consiga em algum grau emaranhar os *spins* 0 e N . É possível demonstrar que o emaranhamento nesses casos escalam com $N^{-\frac{1}{3}}$ em um tempo t^* que escala linearmente com N [20, 82].

Diversas estratégias são utilizadas para maximizar esse valor [26, 80, 85, 86]. Uma condição necessária para a obtenção da fidelidade unitária é a simetria espelhada, como já dito anteriormente. A cadeia que apresenta simetria em torno de seu centro nos permite escrever a igualdade:

$$U_{k1} = (-1)^k U_{kn}, \quad (40)$$

garantindo portanto que em algum instante de tempo específico t^* se obtenha amplitude unitária. Substituindo (40) em (39), vem:

$$u_{N1}(t) = \sum_{k=1}^N U_{k1}^2 e^{-i\phi_k(t)}; \quad (41)$$

Expressão essa que, no fim, é a soma de todos os modos do sistema, cada um com sua frequência específica $\phi_k(t) = k\pi - \omega_k t$. Logo, é muito difícil, a priori, que as fases entrem em sintonia a fim de permitir a transmissão de emaranhamento. Nos sistemas de simetria espelhada,

por exemplo, vale o que foi dito na sessão 2.2 - a diferença entre as auto energias precisam necessariamente ser valores racionais, o que não é possível para $N > 3$ no caso de uma cadeia homogênea [80, 81].

Uma das estratégias adotadas é a já referida engenharia de acoplamento, como visto na seção anterior. Manipulando as formas de interação entre os qubits, pode-se fazer com que os autovalores assumam um espectro linear, $\omega_k = \alpha k$ (α constante) [82]. Outra alternativa, na qual este trabalho se baseia, consiste em tentar garantir que apenas uns poucos modos do sistema contribuam significativamente com a soma - no caso ideal, apenas dois modos, correspondentes ao primeiro e último *spins*, de maneira que a oscilação do sistema se dá entre esses dois níveis [26]. A seção 2.4 abaixo traz a explicação desse processo de forma mais clara.

2.4 REGIME DE FRACO ACOPLAMENTO

A técnica chamada de fraco acoplamento foi vista pela primeira vez em [26], buscando contornar as limitações já referidas para a transferência de estados quânticos em cadeias de *spin* homogêneas. O método empregado consiste em utilizar a engenharia de acoplamento de maneira a gerar oscilações entre os *spins* inicial e final da cadeia. Visto que essa oscilação ocorre entre dois níveis diferentes, suas características são naturalmente calculadas seguindo o arcabouço teórico já conhecido como "oscilações de Rabi" na literatura padrão de cursos de mecânica Quântica [87, 88], motivo pelo qual a técnica também é conhecida como "comunicação do tipo Rabi".

Começemos a estudar em mais detalhes o protocolo de comunicação seguindo a ideia inicial comum - uma cadeia de N *spins*, que apresentam interações apenas com os vizinhos mais próximos. O Hamiltoniano desse sistema é descrito inicialmente como:

$$H_G = \sum_{(i,j)} J_{i,j} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) \quad (42)$$

Adicionalmente aqui, acopla-se às extremidades dessa cadeia os *spins* emissor (e) e receptor (r), com uma energia de acoplamento $g_{e,r}$ muito menor que aquelas na cadeia, além de energia local $\omega_{e,r}$. Esses *spins* contribuem para o Hamiltoniano com as parcelas:

Assim, o Hamiltoniano total $H = H_G + H_{er}$ nos fornece a dinâmica do sistema. Nosso objetivo é o mesmo visto na seção 2.1: transmitir ao longo desta cadeia um autoestado qualquer $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ na posição do emissor até o receptor, estando a cadeia inicialmente no estado fundamental de energia.

Devemos notar que, no estado fundamental, o estado da cadeia $|\Psi\rangle = |00\dots 0\rangle$ é um autovetor de H . Por isso, para transferir um estado de e a r , é suficiente apenas analisar a transmissão entre esses *spins*. O estudo do sistema pode se restringir ao espaço de Hilbert que contém apenas uma excitação, de maneira semelhante ao protocolo básico de transferência.

Considerando agora $\{E_k\}$ e $\{|E_k\rangle\}$ os respectivos conjuntos de autovalores e autovetores de H_G , temos [27]:

$$H = H_0 + V, \quad (43)$$

com

$$H_0 = \omega_e |e\rangle\langle e| + \omega_r |r\rangle\langle r| + \sum_k |E_k\rangle\langle E_k| \quad (44)$$

e

$$V = \varepsilon \sum_k g_e a_{ek} |e\rangle\langle E_k| + g_r a_{rk} |r\rangle\langle E_k| + H.c.. \quad (45)$$

A partir daqui, podemos separar o problema em dois casos diferentes, a depender dos autovalores do sistema: quando há ou não ressonância, isto é, se para algum valor de k a igualdade $E_k = \omega_{e,r}$ é satisfeita ou não. No escopo desta tese, nos limitaremos ao caso em que não há ressonância, ou seja, $E_k \neq \omega_{e,r} \forall k$. O caso remanescente pode ser visto em [27].

Agora, a obtenção do Hamiltoniano efetivo para o caso não ressonante segue uma aproximação por teoria de perturbações que nos permite a separação do espectro energético do Hamiltoniano [89]. Assim sendo, consideremos um operador $H' = e^{iS} H e^{-iS}$, com S sendo um operador hermitiano a ser definido logo. Assim, aplicando H' ao estado $e^{iS} |E_k\rangle$, vem:

$$H' e^{iS} |E_k\rangle = e^{iS} H e^{-iS} e^{iS} |E_k\rangle = E_k e^{iS} |E_k\rangle. \quad (46)$$

Se expandirmos e^{iS} e e^{-iS} em séries de potências, temos:

$$H' = H_0 + V + i[S, H_0] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, H_0]] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (47)$$

Agora, podemos escolher S como:

$$S = i\varepsilon \sum_k \frac{g_e a_{ek}}{E_k - \omega_e} |e\rangle\langle E_k| + \frac{g_r a_{rk}}{E_k - \omega_r} |r\rangle\langle E_k|, \quad (48)$$

com o objetivo de satisfazer a igualdade:

$$V + i[S, H_0] = 0. \quad (49)$$

Portanto, $H' = H'' + \mathcal{O}^3$ e

$$H'' = H_0 + i[S, V] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H_0]]. \quad (50)$$

Finalmente, obtém-se o Hamiltoniano efetivo H_{eff} a partir de H'' por meio de cálculo direto e de sua projeção em nas direções de $|e\rangle, |r\rangle$:

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} h_e & -J' \\ -J' & h_r \end{pmatrix} \quad (51)$$

com

$$h_\nu = \omega_\nu - \varepsilon^2 g_\nu^2 \sum_k \frac{|a_{\nu k}|^2}{E_k - \omega_\nu}, \quad \nu = e, r \quad (52)$$

e

$$J' = \frac{\varepsilon^2 g_e g_r}{2} \sum_k \frac{a_{ek} a_{rk}}{E_k - \omega_e} + \frac{a_{ek} a_{rk}}{E_k - \omega_r}. \quad (53)$$

Sob a ação desse Hamiltoniano efetivo, podemos escrever a amplitude de transição f_{N+2}^{eff} entre os *spins* 1 e $N + 2$ como:

$$f_{N+2}^{eff}(t) = \frac{2|J|}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (54)$$

para $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4J^2}$ e $\Delta = h_e - h_r$. Logo, podemos ver que a fidelidade, como mostra a eq. (18), pode chegar a ser unitária ou arbitrariamente próxima disso a depender do valor de Δ . A fidelidade atingirá o máximo quando $t = \tau = \frac{\pi}{\Omega}$. Podemos ver sua dependência da força de acoplamento mais claramente se tivermos $g_e = g_r = g$; assim, é fácil notar (sobretudo quando $\Delta = 0$) que $F(t) \rightarrow O(1/g^2)$.

É possível analisar a possibilidade de compartilhamento de emaranhamento a partir do necessário para a fidelidade atingir seu máximo. podemos representar a cadeia na forma $|1_e 0_r\rangle |0\rangle_c$, onde $|0\rangle_c$ se refere aos *spins* 1, ..., N já acoplados. Sem perda de generalidade, assumindo que $\Delta = 0$, obtemos a amplitude de transição como:

$$f_{N+2}^{eff}(t) = \sin\left(\frac{2Jt}{2}\right). \quad (55)$$

Se conseguimos de fato a transmissão $|0_e 1_r\rangle |0\rangle_c$ no instante de tempo τ , então em $\tau/2$, a amplitude de transição valerá conseqüentemente $f_{N+2} = 1/\sqrt{2}$. Nesse caso, a cadeia poderá ser representada no estado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1_e 0_r\rangle + |0_e 1_r\rangle) |0\rangle_c \quad (56)$$

ou seja, criando um estado maximamente emaranhado (estados de Bell).

2.5 EXPERIMENTOS ENVOLVENDO TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

Ainda que o trabalho seminal da utilização de cadeias de *spin* como elementos próprios tenha surgido em 2003, trabalhos anteriores já visavam a criação e manutenção de cadeias de *spin* para outros fins [30, 37, 44, 45]. Com o desenvolvimento de técnicas de controle de *spins* e a adoção do ponto de vista da informação e computação quântica, várias tecnologias já existentes antes passaram a ser utilizadas na esperança de criar/controlar os qubits a fim de realizar alguma computação. É o caso, por exemplo, das técnicas de ressonância magnética.

A ressonância magnética consiste na aplicação de campos magnéticos em partículas com *spin* 1/2 em direções perpendiculares, de maneira a fazer com que os *spins* adquiram uma dinâmica de *flip* (alternando entre os seus estados de energia) que se torna variável conforme desenvolve a precessão em torno do eixo de alinhamento do *spin* com o campo paralelo. Na condição de ressonância, a frequência de rotação é igual à de precessão, condição em que a chance de ocorrência de *flips* é particularmente grande [87].

Geralmente, a implementação de técnicas de ressonância magnética não envolve cadeias longas, sendo ligeiramente maior e permitindo um maior controle no caso da implementação da ressonância de estado sólido [85, 90].

Já no fim do século anterior, a ref. [91] traz evidências experimentais da propagação de mágnons em uma cadeia com $N = 8$ elementos de aminoácido por meio de ressonância magnética de estado líquido, controlando os parâmetros do Hamiltoniano que descreve a cadeia através de pulsos de radiofrequências específicas. Poucos anos depois, pesquisadores da IBM utilizaram 7 dos núcleos de uma molécula de C_4F_5Fe , sendo 2 de ^{13}C e o restante de ^{19}F para implementar experimentalmente o algoritmo de Shor de fatoração numérica com um fator $N = 15$. Os *spins*, em seu equilíbrio térmico adotado como estado inicial, se encontravam em um estado misto descrito por $\rho_0 = e^{-H_0/k_B T} / 2^7$, para $H_0 = -\sum_i \hbar \omega_i I_z$ com $\omega_i/2\pi$ sendo a frequência de transição entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e I_z o valor do momento angular de *spin*; o termo de acoplamento, já estimado na literatura anterior, oferecia condições de interação entre os *spins*

com energia calculada em termos também do operador de momento angular do *spin*. Com base na concepção de um circuito quântico que implementaria o algoritmo, os pesquisadores combinaram uma série de aproximadamente 300 pulsos em frequências de rádio intercaladas com períodos de evolução livre do Hamiltoniano do sistema a fim de simular a aplicação de portas lógicas em etapas específicas do circuito. Apesar da presença de decoerência como fonte de erros, o feito foi bem sucedido, conseguindo realizar a fatoração para os casos considerados [92].

As interações do tipo XY vistas na seção 2.2 também chegaram a ser implementadas experimentalmente por ressonância magnética em meios líquidos. A ref. [93] mostra, para uma cadeia de $N = 3$ qubits, como a transferência de estados pode ser realizada *simulando* a interação XY entre os *spins* da cadeia como visto em [80] quando, na verdade, se realizam operações em um único *spin* e interações na direção z com um formalismo algébrico semelhante ao de momento angular. Neste trabalho, os autores utilizaram uma molécula de tricloroetileno, sendo a cadeia formada por dois átomos de carbono ^{13}C e um de hidrogênio 1H , rotulados de maneira a explicitar suas interações. Fazendo a definição conveniente de operadores comutativos entre si $A = (\sigma_x^1 \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \sigma_y^3)/2$ e $B = (\sigma_y^1 \sigma_y^2 + \sigma_x^2 \sigma_x^3)/2$, o autor obtém relações de equivalência entre as aplicações dos operadores de evolução $U_\lambda(t) = e^{-iJt\lambda}$, $\lambda = A, B$ à cadeia com os pulsos de radiofrequência apropriados. Em destaque, fica a aplicação do fator $e^{-i(\pi/8)\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3}$, que em termos dos pulsos se torna:

$$e^{-i(\pi/8)\sigma_z^1 \sigma_z^2 \sigma_z^3} = \left[-\frac{\pi}{2}\right]_x^2 - [-\pi]_y^2 - \left[\frac{7}{2J_{12}}\right] - \left[\frac{\pi}{2}\right]_y^2 - \left[\frac{1}{4J_{23}}\right] - \left[\frac{\pi}{2}\right]_y^2 - \left[\frac{7}{2J_{12}}\right] - \left[\frac{\pi}{2}\right]_x^2.$$

Em que os termos J_{ij} representam as energias de acoplamento. Experimentalmente, os autores demonstraram a transferência de estados com sucesso, embora o tempo necessário para a transferência fosse aproximadamente igual ao tempo de decoerência, tornando esta a principal fonte de erros. O sucesso da transferência, medido pela fidelidade, varia entre 29% e 34%.

Além da os qubits de spin, manipulados por ressonância magnética no exemplo anterior, outro tipo aplicável de qubit muito utilizado é o qubit supercondutor. Ao longo principalmente das últimas décadas, alguns tipos de qubits supercondutores surgiram. Dentre eles, podemos citar o *transmon* como grande destaque na área, por apresentar uma boa possibilidade de reprodução graças aos avanços nas técnicas industriais de litografia de feixes de fótons e elétrons, enquanto apresenta resistência muito maior à ruídos em comparação com os pares de Cooper, seu antecessor [94].

Sem dúvida alguma, o maior feito de informação quântica utilizando qubits supercondutores foi atingido em 2019, com o já citado processador *Sycamore* da Google. O *Sycamore*,

contendo uma cadeia retangular de 54 qubits, apresentou a capacidade de fazer tarefas mais complexas que transferência de estados e compartilhamento de emaranhamento a fim de simular os circuitos quânticos aleatórios propostos [5].

Do ponto de vista da transferência de estados exclusivamente, podemos citar a referência [95], que demonstra a transferência de estados em uma cadeia com $N = 4$ transmons. Em seu experimento, o sistema pode ser descrito pelo Hamiltoniano:

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\omega_j}{2} \sigma_j^z + \sum_{j=1}^{N-1} g_j (\sigma_{j-1}^+ + \sigma_{j-1}^-) (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) \quad (\hbar = 1)$$

em que ω_j são as frequências de oscilação dos qubits e g_j se refere ao termo de acoplamento entre eles. a fim de simular o acoplamento presente em sistemas XY , a frequência dos qubits além do primeiro é sintonizada parametricamente por meio do fluxo magnético gerado por uma corrente alternada, sendo modulada seguindo:

$$\omega_j = \omega_{0j} + \epsilon_j \sin(\nu t + \phi_j), \quad (57)$$

sendo ω_{0j} a frequência média de funcionamento do qubit j e ϵ_j, ν_j e ϕ_j se referem à amplitude, frequência e fase da modulação. Em uma situação de ressonância, temos $\Delta_j = \omega_j - \omega_{j-1}$, e a aplicação de uma transformação de rotação no Hamiltoniano nos permite obter a expressão para o modelo efetivo:

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} g'_j \sigma_j^+ \sigma_{j-1}^- + Hc \quad (58)$$

com g'_j sendo a força efetiva de acoplamento, dado em termos das funções de Bessel:

$$g'_j = \begin{cases} e^{i(\phi_1 + \pi/2)}, & j = 1; \\ J_0(\alpha_{j-1}) e^{-i(\phi_1 - \pi/2)}, & \text{para } j \text{ par}; \\ J_0(\alpha_{j-1}) e^{i(\phi_1 + \pi/2)}, & \text{para } j \text{ ímpar e } \neq 1 \end{cases} \quad (59)$$

Para a execução do experimento, os qubits foram submetidos à uma temperatura criogênica de 10mK. Executadas as medidas, foi atingido o valor notável de fidelidade de 99.2%, em um tempo de transmissão de 84 ns.

Merece também o destaque os estudos de transferência de estados quânticos entre redes ópticas. A transferência de estados utilizando esta técnica atrai bastante atenção pela utilização do aparato tecnológico já existente - O estado quântico, que é emitido das cavidades por fótons, utilizam fibras ópticas para se propagar e o fazem praticamente sem sofrer decoerência. O uso

de fibras também é interessante do ponto de vista da confecção de redes quânticas reais, considerando que as fibras já tem sua aplicabilidade em praticamente todas as redes computacionais atuais. Um exemplo experimental da transferência de estados quânticos envolvendo este método está na ref. [96], que obteve o valor de fidelidade de 84% ao transmitir o estado quântico de átomos de rubídio por meio de fótons a uma distância de 21m.

Por fim, outra técnica que atraiu bastante atenção nos últimos anos trata da utilização do teorema quântico adiabático, que afirma que a evolução do sistema pode ser descrita pela aproximação adiabática caso os termos de perturbação de primeira ordem do Hamiltoniano que governa o sistema pode ser desconsiderado [97]. Isso pode ser atingido fazendo com que o Hamiltoniano evolua lentamente com o tempo [98]. A ref. [19] mostra experimentalmente a transferência de estados em uma cadeia de *spins* em pontos quânticos com $N = 4$ elementos, sujeitos a um Hamiltoniano dependente do tempo:

$$H(t) = \sum_{i=1}^3 J_i(t) \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} + \sum_{i=1}^4 B_i \sigma_i^z, \quad (60)$$

com $\sigma_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ sendo o operador de *spin* da partícula e B_i a intensidade do campo magnético aplicado ao sítio i . Os elementos são colocados inicialmente em um estado de Bell $S = 1/\sqrt{2}(|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle)$ nos dois primeiros sítios da cadeia, enquanto os dois últimos se encontram nos estados $|T^0\rangle = |\uparrow_3\downarrow_4\rangle + |\downarrow_3\uparrow_4\rangle$, $|T^+\rangle = |\uparrow_3\uparrow_4\rangle$ ou $|T^0\rangle = |\downarrow_3\downarrow_4\rangle$. A transferência é completa quando, medidos os *spins*, o estado inicialmente no sítio 3 se encontra no sítio 1, enquanto o emaranhamento compartilhado pelas partículas nos sítios 1 e 2 agora é compartilhado entre as partículas dos sítios 2 e 3. [19] ainda destaca a possibilidade de se aplicar este efeito em cascata realizando um novo 'passo' na transferência de estados, atualizando os termos de acoplamento conforme a necessidade: no primeiro passo, $[J_1, J_2, J_3] = J_{max}[1 - t/T, t/T, 0]$; no segundo, $[J_1, J_2, J_3] = J_{max}[0, 1 - t/T, t/T]$, em que t se refere ao instante de tempo e T o tempo total da transferência. Ao fim deste segundo processo, teremos o estado que antes se encontrava no sítio 4 agora no sítio 2, ao passo que o emaranhamento antes existente entre as partículas 2 e 3 agora é compartilhado entre os elementos 3 e 4. Como resultado, uma fidelidade maior que 95% é obtida, abrindo a possibilidade de computação também com pontos quânticos de semicondutores.

3 Resultados

3.1 TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS EM CADEIAS APERIÓDICAS

Ao longo da leitura do capítulo anterior vimos o protocolo básico da transferência de estados proposto inicialmente, bem como algumas condições para o seu funcionamento eficaz. Para além disso, é vista também a possibilidade da utilização de cadeias de *spin* para compartilhamento de emaranhamento quântico, sua facilitação com base na manipulação do espectro de autoenergias da cadeia. Toda a teoria foi embasada com diferentes realizações experimentais de transferência de estados, utilizando diversos sistemas de dois níveis como qubits, atingindo diferentes níveis de sucesso. Ainda, foi mostrado que a transferência de estados pode ocorrer caso as partículas da extremidade apresentem uma energia interna muito menor que os termos de acoplamento da cadeia. Com base nisso, podemos iniciar este capítulo mostrando uma das contribuições desenvolvidas ao longo do período de doutorado.

Como brevemente referido (seção 1.2), a presença de desordem de qualquer natureza em canais prejudica de modo geral a transferência de estados. Embora esse fato possa ser contornado eventualmente [99], a redução ao Hamiltoniano efetivo em regime de fraco acoplamento nos permite ignorar ao menos parcialmente os efeitos da desordem apresentando, portanto, uma grande robustez a estes defeitos. Notavelmente, podemos citar as refs. [100, 101], cuja transferência foi obtida em sistemas que apresentavam diferentes desordens. Uma característica crucial para a eficácia do método, entretanto, é que a tal desordem presente no canal permita a existência de estados deslocalizados. Portanto, a ideia de permeou o desenvolvimento do estudo foi avaliar a qualidade de um canal que pudesse ser desenvolvido fisicamente e estivesse sujeito a defeitos topológicos de natureza similar. Analisemos em mais detalhes o desenvolvimento deste estudo.

Consideremos inicialmente uma cadeia isotrópica de *spin* 1/2 contendo $N + 2$ elementos, sujeitos à ação do Hamiltoniano do tipo XY :

$$H = \sum_{i=1}^{N+2} \frac{\epsilon_i}{2} (1 - \sigma_i^z) + \sum_{i=2}^{N+1} \frac{J_i}{2} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) \quad (61)$$

Nesse caso, ϵ_i representa o campo magnético local aplicado aos *spins* da cadeia, e J_i se refere ao termo de acoplamento entre eles. Podemos explicitar aqui que $J_i = 1$, para $i \neq 1, N + 1$; $J_1 = J_{N+1} = g \ll J$. Além disso, $\epsilon_1 = \epsilon_{N+2} = W$, sendo W um dos parâmetros do sistema.

Com exceção destes termos, o protocolo é fiel ao que foi explicitado na seção 2.1: inicialmente, temos a cadeia preparada de modo a termos todos os sítios no estado fundamental com exceção do elemento 1, que contém o qubit a ser transferido. Escrito no modo mais geral,

temos no primeiro sítio o estado $|\phi\rangle_1 = a|0\rangle + |1\rangle$. O sistema evolui seguindo a sua dinâmica natural como visto na eq. (15), partindo do estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\phi\rangle_1 |0\rangle_c |0\rangle_{N+2}$, com $|0\rangle_c = |0\rangle_2 |0\rangle_3 \dots |0\rangle_{N+1}$. O Hamiltoniano (61) satisfaz a igualdade $[H, \sum_i \sigma_i^z] = 0$, fazendo com que sistema fique restrito ao subespaço com apenas uma excitação.

O objetivo final é, num instante de tempo τ recuperar o sistema no estado $|\Psi(\tau)\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_c |\phi\rangle_{N+2}$, de modo a obter a maior fidelidade possível à mensagem. O estado do sistema em função do tempo e o valor de fidelidade média sobre a esfera de Bloch são calculados de acordo com as eqs. (17) - (22). Na base computacional, o Hamiltoniano é dado por:

$$H = H_c + W(|1\rangle\langle 1| + |N+2\rangle\langle N+2|) + g(|1\rangle\langle 2| + |N+1\rangle\langle N+2|) + H.c., \quad (62)$$

com $H_c = \sum_{j=1}^{N+1} \epsilon_j |j\rangle\langle j| + J \sum_{j=2}^{N+1} |j\rangle\langle j+1| + H.c.$ representando os termos da cadeia. O fraco acoplamento nos permite escrever o Hamiltoniano Efetivo seguindo a eq. (51), ou seja,

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} h_e & -J' \\ -J' & h_r \end{pmatrix} \quad (51)$$

que dessa vez assumem os valores:

$$h_\nu = W - g^2 \sum_k \frac{|a_{\nu k}|^2}{E_k - \omega_\nu}, \quad \nu = e, r \quad (63)$$

e conseqüentemente, para J' :

$$J' = g^2 \sum_k \left(\frac{a_{ek} a_{rk}^*}{E_k - W} \right). \quad (64)$$

em que teremos $e = 1$ e $r = N + 2$. A amplitude de transição entre os níveis é dada pela eq. (54):

$$f_{N+2}^{eff}(t) = \frac{2|J|}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (54)$$

com $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4J'^2}$ e $\Delta = h_e - h_r$.

Dito anteriormente, o protocolo de transferência baseado nas oscilações de Rabi entre esses estados é também útil na produção de estados de Bell (eq. (56)). Diferentemente do protocolo básico da seção 2.1 entretanto, a medida de emaranhamento utilizada é a *Concorrência* [102], expressa por:

$$C(t) = 2|f_1(t)f_{N+2}(t)|, \quad (65)$$

A concorrência explicitada aqui visa obter uma medida do grau de emaranhamento gerado entre os estados nas extremidades da cadeia. O leitor atento pode perceber que a eq. (65) nada mais é do que o resultado obtido na seção 2.3, respeitada a condição do valor máximo entre zero e um estado misto maximamente emaranhado. Se nos atentarmos ao fato de que:

$$f_1(t) = \sqrt{1 - f_{N+2}^2(t)}, \quad (66)$$

Podemos substituir (64) e (66) em (65) para obter:

$$C(t) = \frac{4|J'|}{\Omega^2} \sqrt{\Delta^2 + 4J'^2 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)} \left| \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right|. \quad (67)$$

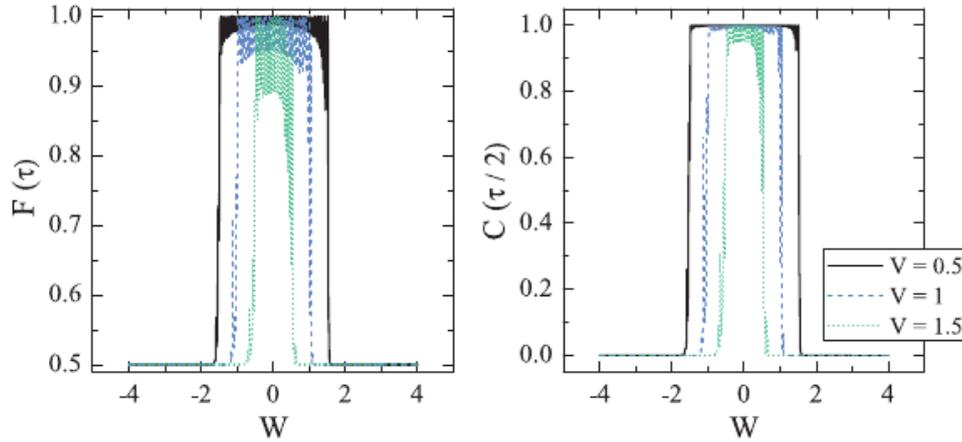
O campo magnético local dos sítios no interior da cadeia seguem uma série aperiódica [37, 60] que tem a forma:

$$\epsilon_j = V \cos(2\pi\alpha j^\nu), \quad (68)$$

para $j = 2, 3, \dots, N + 1$ e $V > 0$, $\nu > 0$ e α sendo os parâmetros responsáveis por caracterizar inteiramente as propriedades de localização do canal: para α racional e ν inteiro, o sistema remete ao potencial de Bloch periódico. Um valor irracional de α e $\nu = 1$ leva ao modelo inicialmente proposto por Harper, ao passo que $\nu \geq 2$, o sistema se torna estatisticamente igual ao modelo aleatório proposto por Anderson [30, 63]. Mantendo α irracional, $\nu < 1$ e $V < 2J$, as condições do espectro de energias do canal permitem a obtenção de um regime de estados estendidos que é limitado por dois limites de mobilidade ocorrendo em $E_c = \pm(2J - V)$.

Essa propriedade específica nos permite de fato a obtenção de transmissão com alta qualidade, desde que os elementos envolvidos nessa transmissão se encontrem na região de existência de estados estendidos. Nessas condições, $a_{e,k}$ e $a_{r,k}$ das eqs. (63) e (64) se encontram com uma distribuição praticamente uniforme ao longo do espectro da cadeia, garantindo portanto que $|\Delta| \ll |J'|$ e conseqüentemente obtendo $F(\tau) \approx 1$ e $C(\tau/2) \approx 1$. Isso pode ser visto diretamente nos resultados apresentados na figura 3, que traz os valores de fidelidade e concorrência no tempo ótimo de transferência e emaranhamento, respectivamente, para diversos valores de V , segundo a teoria da perturbação (eqs. (54) e (66)). Verifica-se a existência de uma dada região do espectro em que temos altos valores de fidelidade e concorrência coincidente com os valores de $E_c = \pm(2J - V)$.

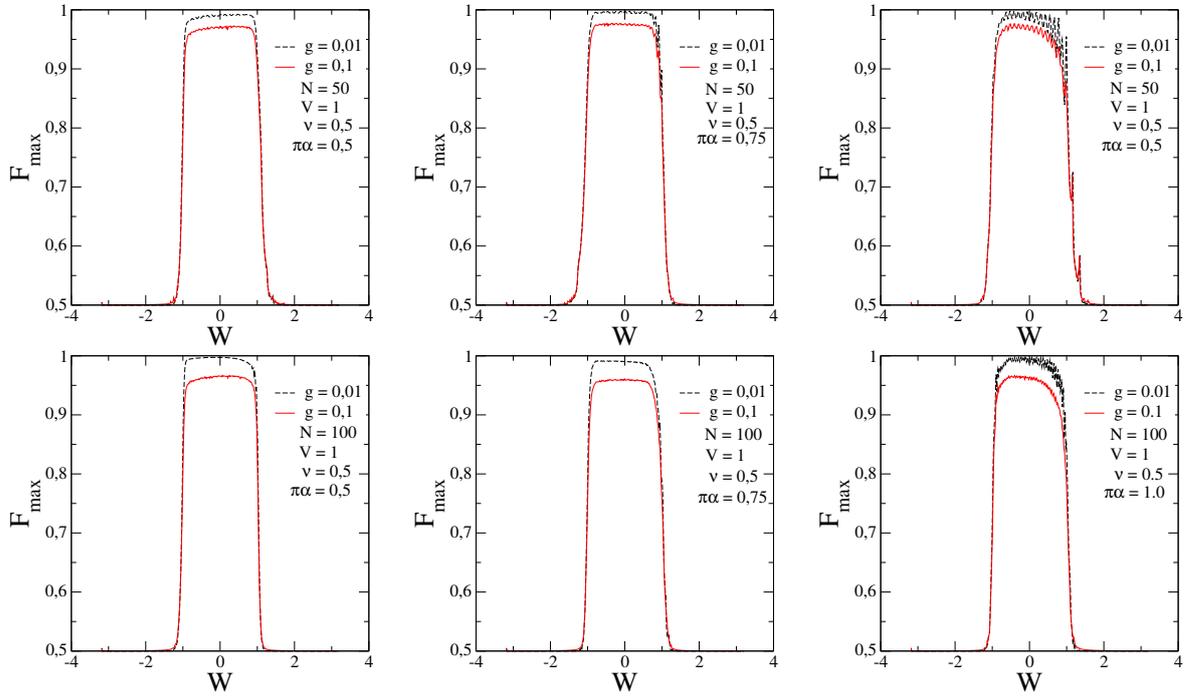
Figura 3 – Máxima Fidelidade Média $F(\tau)$ e Concorrência Média $C(\tau/2)$ como função da energia local W , calculada no tempo ótimo $\tau = \pi/\Omega$. Parâmetros: $N, \nu, \pi\alpha = 100, 0.5, 0.5$ e $V/J = 0.5, 1, 1.5$.



Fonte: Autor.

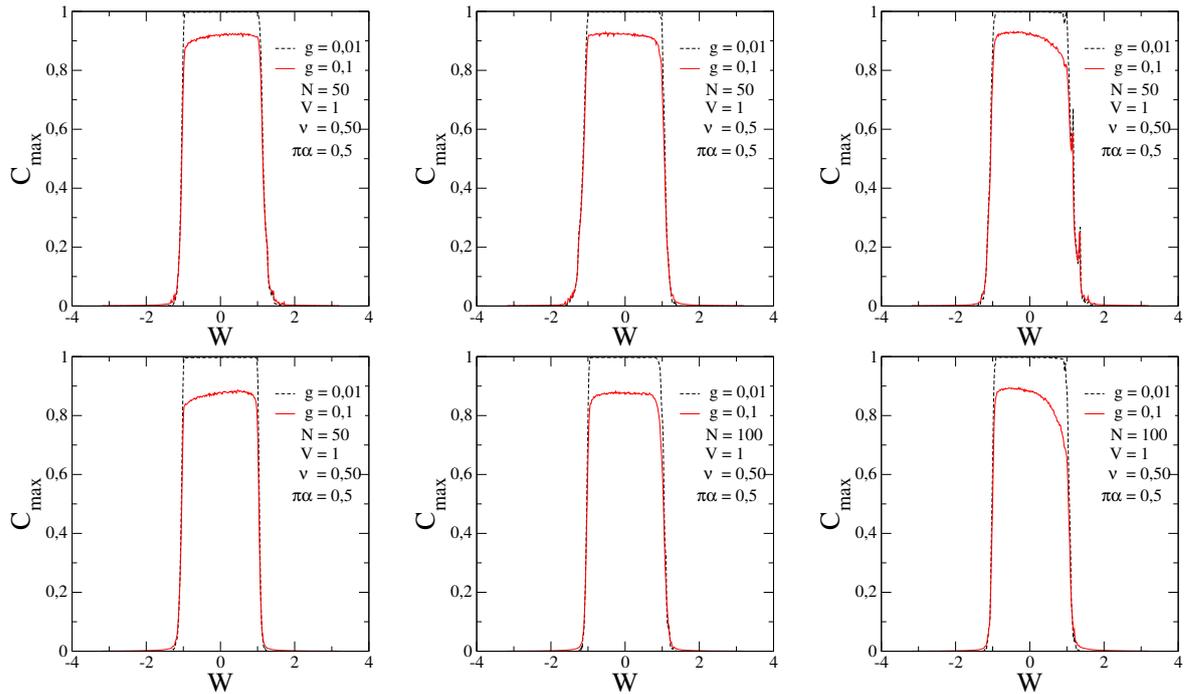
As figuras 4 e 5, obtidas por meio de diagonalização direta do Hamiltoniano inteiro, trazem os valores de fidelidade e concorrência máximas, F_{max} e C_{max} , como função do parâmetro W , para vários valores de α , com V fixo ($V = 1J$) e $N = 50, 100$. A variabilidade dos parâmetros, embora possa vir a garantir maior compreensão acerca do fenômeno, levou à escolha de considerar os valores máximos não sobre o instante de tempo ótimo da transferência, mas em uma grande janela de tempo. De imediato, percebe-se a que as grandezas retratadas estão de acordo com o predito pela teoria de perturbação, para um valor suficientemente pequeno da força de acoplamento g . É importante destacar a transferência e o emaranhamento mais prejudicados nos casos em que $N = 100$; é conveniente diminuir o valor do acoplamento com a cadeia a fim de evitar possíveis contribuições de outros modos próximos à W no subespaço formado pelo emissor e receptor do canal. Adicionalmente, é de se notar que nos casos retratados, α não influencia o comportamento da transferência enquanto mantido irracional.

Figura 4 – Fidelidade máxima F_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ versus energia local W para $N = 50, 100$ (linhas), $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ (colunas). Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).



Fonte: Autor.

Figura 5 – Concorrência máxima C_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ versus energia local W para $N = 50, 100$ (linhas), $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ (colunas). Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).

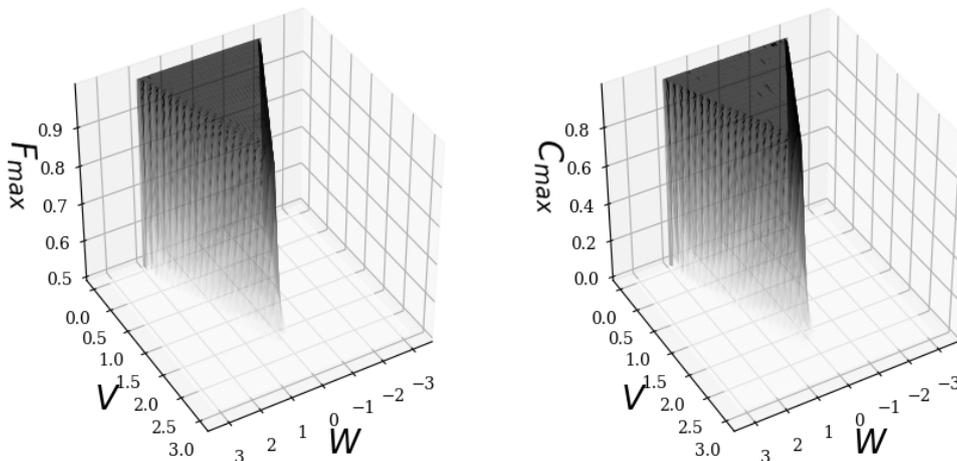


Fonte: Autor.

As figuras 3 - 5, reúnem o principal resultado a ser comunicado - é possível, portanto, realizar a transferência e o emaranhamento bipartite de estados com alto grau de confiabilidade em um canal com $N + 2$ elementos constituintes que apresente aperiodicidade, uma vez que a energia local dos *spins* 1 e $N + 2$, emissor e receptor, esteja próxima ao centro da banda de energias. Mais especificamente, isso é válido para $W \in [-2J + V, 2J - V]$.

Buscando ter outro ponto de vista acerca da influência de V e W sobre a dinâmica de transferência, foi retratada a variação de F_{max} e C_{max} em função desses dois parâmetros, obtida também via diagonalização direta do Hamiltoniano, para $\nu = \pi\alpha = 0.5$ e $g = 0.01J$, na figura 6. Como no caso das figuras anteriores, não há transferência para $|W| > |E_c|$. Além disso, dado que a largura da banda de alta fidelidade é teoricamente dada por $2|E_c|$, é de se esperar que tal largura seja reduzida linearmente com o aumento de V até que não haja transferências para $V > 2J$, o que é também confirmado.

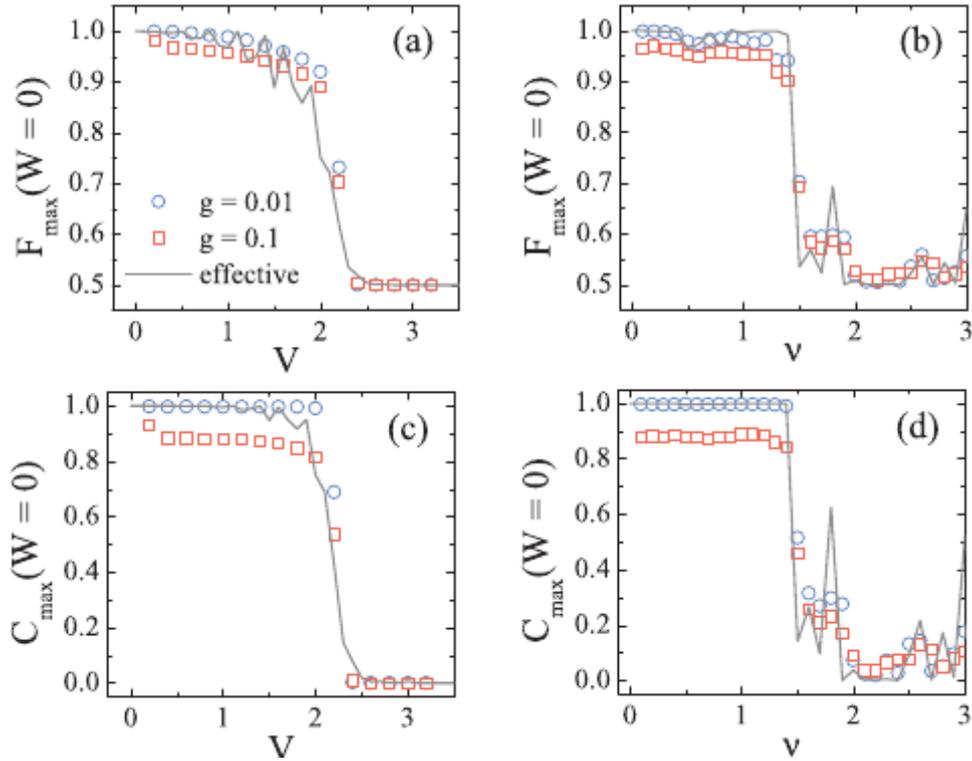
Figura 6 – Fidelidade e Concorrência máximas F_{max} , C_{max} no intervalo de tempo $tJ \in [0, 10^5]$ versus energia local W e amplitude de aperiodicidade V para $N = 50$, $\nu = 0.5$ e $\pi\alpha = 0.5$ e $g = 0.01$. Resultados obtidos via diagonalização Direta do Hamiltoniano (62).



Fonte: Autor.

Agora, fixando $W = 0$, podemos observar o papel de V e ν na transferência de estados utilizando-os como parâmetros de F_{max} e C_{max} . A figura 7 adiante mostra graficamente os resultados obtidos tanto pela teoria de perturbação quanto pela diagonalização direta do Hamiltoniano. Por diagonalização, foram incluídos os resultados para $g = 0.1J$ e $g = 0.01J$. Novamente, é interessante notar a conformidade com [37, 60], em que $V > 2J$ todos os estados são localizados. Ao contrário do esperado, porém, é visto que a transferência continua ocorrendo para valores de ν ligeiramente maiores que 1. Isso é justificável mediante a verificação de diferentes métodos

Figura 7 – Fidelidade e Concorrência máximas F_{max}, C_{max} para $W = 0$ como função de V (a,c) e de ν (b,d), com $g = 0.01J$ (círculos) e $g = 0.1J$ (quadrados), $N = 100$ e $\pi\alpha = 0.1$. Os resultados foram obtidos por meio da diagonalização direta do Hamiltoniano (62), no intervalo de tempo $[0, 10^5]$. A linha acinzentada corresponde aos resultados obtidos por meio da descrição efetiva via perturbação de segunda ordem, $F(\tau)$ e $C(\tau/2)$



Fonte: Autor.

para se obter o real valor crítico de ν para transição localização-deslocalização.

É interessante ressaltar por fim que, a transferência de estados por meio do fraco acoplamento com a cadeia, embora apresente robustez à desordem e defeitos de canal, tem sua desvantagem a velocidade de transmissão. Conforme o tempo escala seguindo $\tau \sim g^{-2}$ e as oscilações de Rabi ocorrem apenas para valores pequenos de g , é de se esperar que o sistema leve um longo tempo τ para atingir seu valor de fidelidade próximo da unidade. A fim de verificar se a relação tempo-fidelidade torna a cadeia aperiódica viável, foi realizada a comparação entre a própria e uma cadeia homogênea, com energias de acoplamento e energias locais uniformes. A escolha da cadeia homogênea se deu pela demonstração de sua performance superior a qualquer outro protocolo de transferência de estados quânticos que opere pelo mesmo intervalo de tempo [48]. Para um canal homogêneo, temos $\Delta = 0$, $J' = g^2/J$ e por consequência, $\tau = \pi J/2g^2$. O valor de fidelidade escala com $F = 1 - O(g^2N)$, o que demanda $g \ll 1/\sqrt{N}$ [27].

Para a realização da comparação entre os canais, é útil definir a variável $\tilde{\Omega}$, tal que:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega J}{g^2}, \quad (69)$$

o que nos leva a obter $\tau = \pi J/g^2\tilde{\Omega}$. Fazendo agora

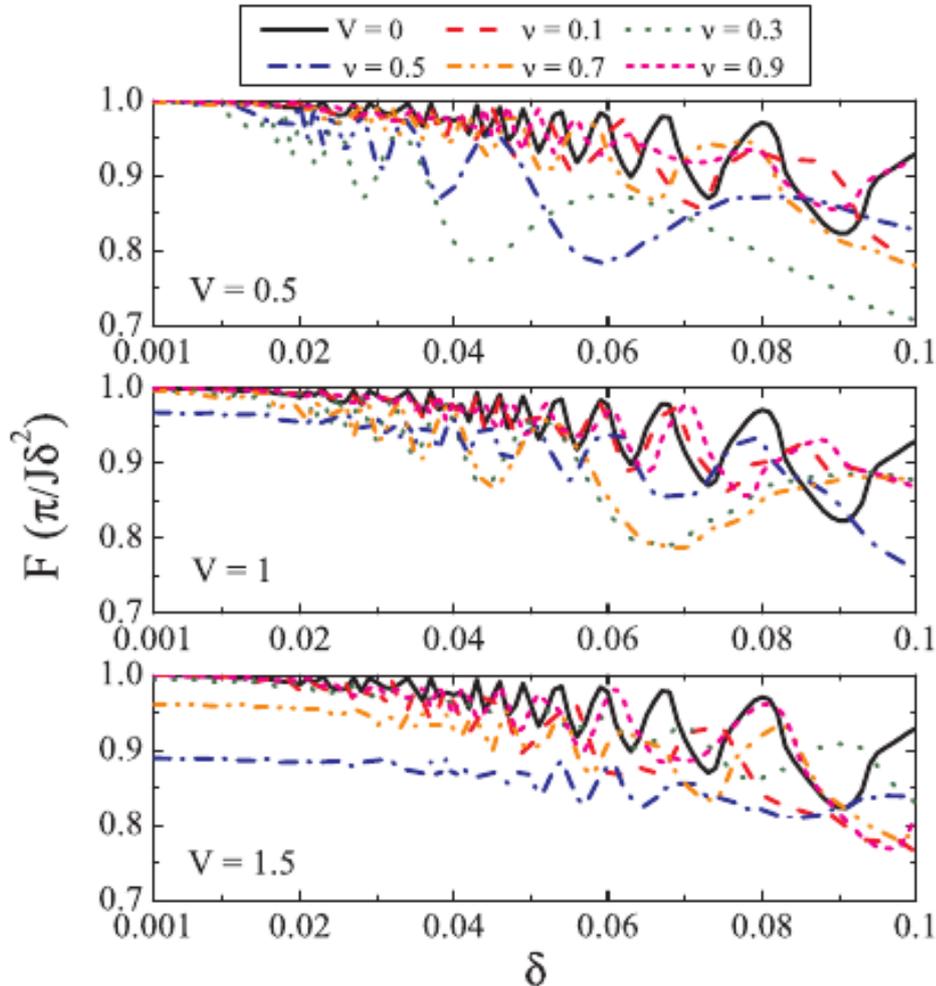
$$g = \frac{\delta J}{\sqrt{\tilde{\Omega}}}, \quad (70)$$

obtemos o tempo de transferência independente τ ,

$$\tau = \frac{\pi}{J\delta^2}, \quad (71)$$

que pode então ser utilizado para a comparação.

Figura 8 – Máxima fidelidade média $F(\tau)$, obtida por diagonalização direta do Hamiltoniano (62), para $\tau = \pi/J\delta^2$, como função do parâmetro δ . São representados vários valores de ν para $V = 0.5, 1, 1.5$, em comparação com o caso uniforme ($V = 0$). Nas simulações, $g = \delta J/\sqrt{\tilde{\Omega}}$, $N = 100$, $\pi\alpha = 0.1$ e $W = 0$.



Fonte: Autor.

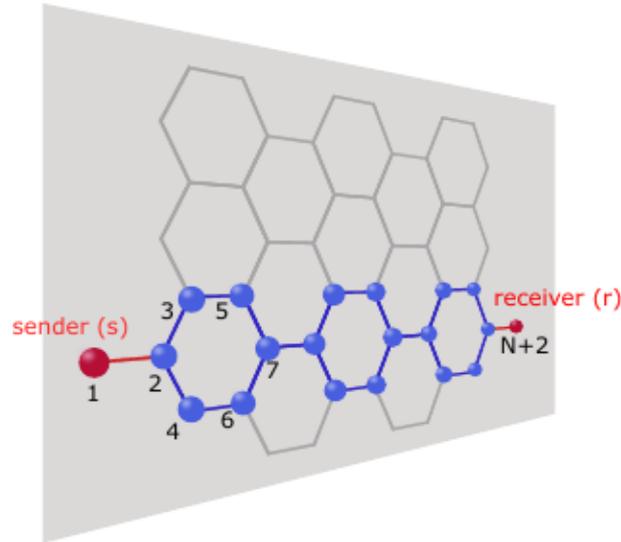
Na figura 8 estão retratadas as fidelidades no instante de tempo τ para diversos valores de ν . Em cada um dos gráficos, vemos as simulações para os valores de V , em comparação com o caso homogêneo ($V = 0$, linha sólida). Por ela, é possível perceber o comportamento do canal aperiódico que, apesar de exibir simetria, tem efeito comparável ao canal homogêneo, embora para alguns valores de ν (e principalmente, quanto maior o V), existe a saturação em $F < 1$ mesmo para $\delta \rightarrow 0$, que pode ser explicada pela existência de valores de Δ residuais que não são desprezáveis. Naturalmente, o valor de F decai com o aumento de δ , adquirindo um padrão oscilatório conforme os modos do canal passam a interagir em conjunto com o subespaço formado pelo emissor e receptor.

3.2 TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS EM CADEIAS DE GRAFENO

Obtidos os resultados com relacionados à cadeia aperiódica (ver seção 3.1 e a ref. [74]), buscou-se dar algum passo além, utilizando o mesmo protocolo de QST entre *spins*. A utilização de estruturas quasiunidimensionais naturais surgiu como ideia comum para os estudos, uma vez que não há a necessidade do uso extensivo de tecnologia para a sua fabricação. Nesse contexto, se destaca a utilização do grafeno como um material que apresenta relativa adoção no campo da informação quântica, tanto para a realização de algoritmos [55] quanto do ponto de vista da engenharia, sendo empregado tanto para produção de qubits diretamente [52] quanto para a construção de estruturas que de fato abrigarão o qubit [103].

Com isso em mente, os resultados aqui descritos se referem à simulação realizada de uma transferência de estados entre duas partículas ligadas às extremidades de uma cadeia formada pelo corte de uma camada de grafeno, como mostra a figura 9.

Figura 9 – Esquemática da cadeia utilizada e da regra de indexação dos sítios. As ligações em vermelho simbolizam a diferença de grandeza entre os acoplamentos do emissor/receptor e os sítios do restante da rede.



estática que segue a forma:

$$J_{i,j} = J(1 + \xi_{i,j}), \quad (75)$$

em que $\xi_{i,j}$ é um número escolhido aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme no intervalo $[-b, b]$, onde o valor b denota a amplitude de desordem. Também definimos para os propósitos da simulação que $J \equiv 1$.

Os resultados foram obtidos via diagonalização direta do Hamiltoniano do sistema. Buscou-se, assim como no caso anterior, manter o registro da amplitude de transição $f_{N+2}(t) = |\langle N+2 | e^{-iHt} | 1 \rangle|$ e o seu valor de concorrência $C(t) = 2f_1(t)f_{N+2}(t)$ em relação ao tempo. Dado que a desordem leva o sistema a ter valores ótimos diferentes em instantes diferentes, buscou-se obter o máximo valor médio para uma longa janela temporal $[0, 6 \times 10^5]$. Além disso, para cada resultado foram realizadas médias sobre 50 conjuntos de valores diferentes para $\xi_{i,j}$, utilizando como padrão $g = 10^{-2}J, 10^{-1}J$. Adicionalmente, o valor de N é escolhido de modo a se obter a formação completa dos anéis, tal que uma cadeia com N sítios será formada por $N/6$ anéis.

Inicialmente, o protocolo foi realizado na ausência completa de desordem, mantendo $b = 0$. A figura 11 mostra, portanto, os valores máximos de fidelidade e concorrência como função da energia local das extremidades w , para diferentes valores de N e g . Observando a figura, nota-se que o protocolo ocorre para uma grande banda de energias, especialmente para menores valores de g , como já esperado. Além disso, o aumento de N prejudica a qualidade da transferência para $g = 0.1J$ uma vez que, como no caso aperiódico, o aumento de N traz consigo uma maior quantidade de modos que vem a popular o subespaço formado pelos *spins* emissor/receptor. Para estes casos, é necessário reduzir g mantendo o sistema o mais não-ressonante possível.

Figura 10 – Fidelidade máxima F_{Max} e concorrência máxima C_{Max} versus energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$ na ausência de desordem ($b = 0$).

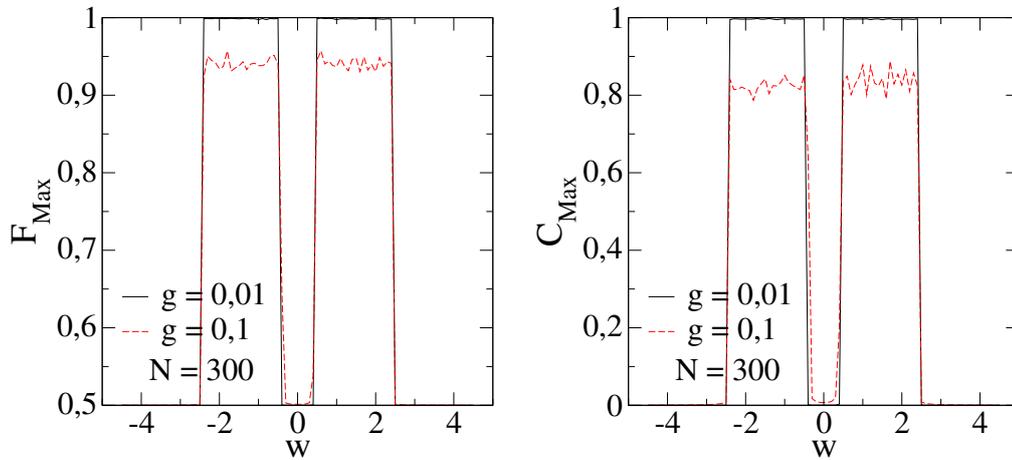
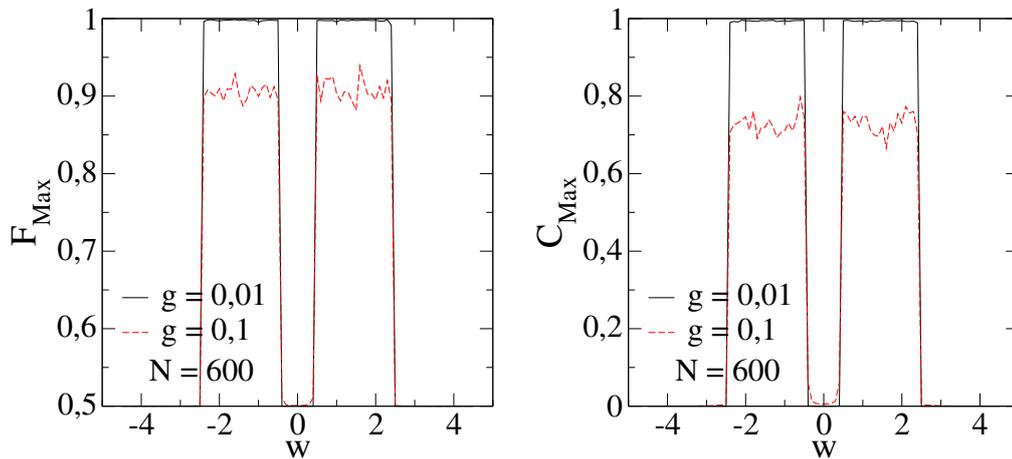


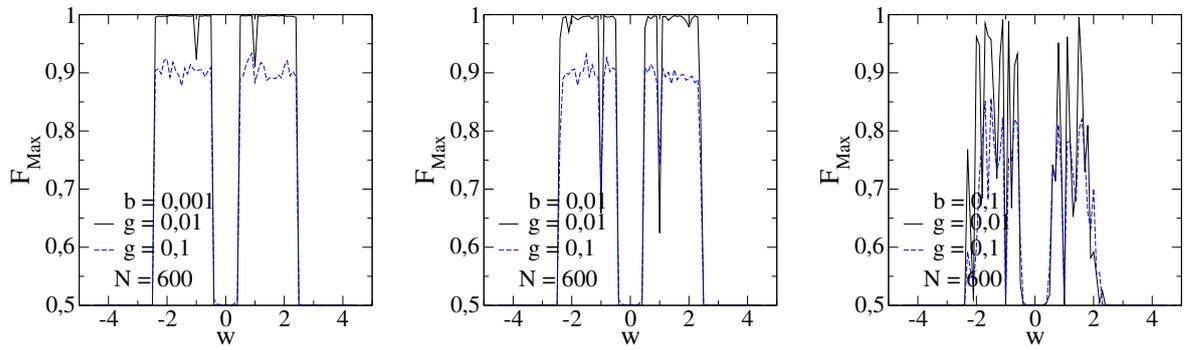
Figura 11 – Fidelidade máxima F_{Max} e concorrência máxima C_{Max} versus energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 300$ na ausência de desordem ($b = 0$).



Fonte: Autor.

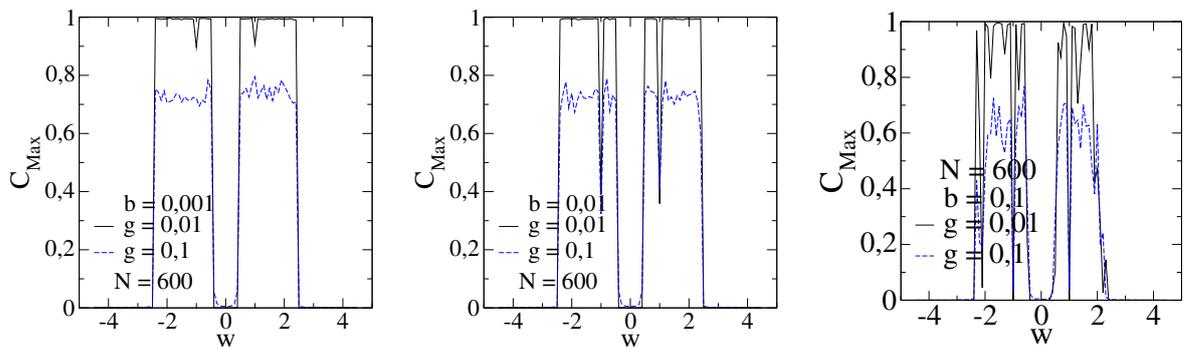
Resta então verificar a variação na dinâmica para $b \neq 0$. as figuras 12 e 13 trazem os valores máximos de F_{Max} e C_{Max} respectivamente para diferentes valores de amplitude de desordem, $b = 10^{-3}J, 10^{-2}J, 10^{-1}J$, com $g = 10^{-2}J, 10^{-1}J$ e $N = 600$. É fácil ver que a dinâmica muda dramaticamente, estando seriamente comprometida para $b = 10^{-1}J$ e para $w = \pm J$ nos outros casos. A figura 14 traz em mais detalhes esse decaimento. Nela, estão graficamente representadas as médias de F_{Max} e C_{Max} como funções da amplitude de desordem, para uma gama de desordens, com energias locais médias aos arredores de $w = J$ e $w = 1.35J$, para comparação. Uma explicação plausível para a física por trás desse fenômeno pode ser encontrada por meio da estrutura espectral do canal.

Figura 12 – Fidelidade máxima F_{Max} versus energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e 0.1 com amplitudes de desordem $b = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$.



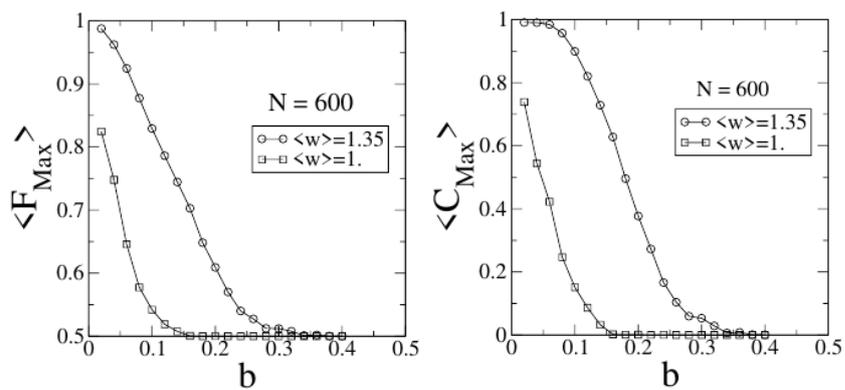
Fonte: Autor.

Figura 13 – Concorrência máxima C_{Max} versus energia local dos sítios emissor e receptor w , para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e 0.1 com amplitudes de desordem $b = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$.



Fonte: Autor.

Figura 14 – Valores médios de F_{Max} e C_{Max} como função da amplitude de desordem b para $N = 600$, $g/J = 0.01$ e $w = J, w = 1.35J$. Médias realizadas sobre 50 conjuntos de dados.



Fonte: Autor.

É possível demonstrar que, na ausência de desordem, o canal de grafeno pode ser aproximado por uma cadeia linear efetiva, com termos de hopping alternados. Essa aproximação é realizada seguindo o processo de dizimação padrão nos sítios constituintes dos anéis. Podemos exemplificar o procedimento fazendo a dizimação dos sítios do primeiro anel representado na figura 9. Sendo v_i autofunção no sítio i , com autovalor correspondente E . O conjunto de equações proveniente do Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned}
Ev_2 &= gv_1 + Jv_3 + Jv_4; \\
Ev_3 &= Jv_2 + Jv_5; \\
Ev_4 &= Jv_2 + Jv_6; \\
Ev_5 &= Jv_3 + Jv_7; \\
Ev_6 &= Jv_4 + Jv_7; \\
Ev_7 &= Jv_5 + Jv_6 + gv_8;
\end{aligned} \tag{76}$$

Podemos eliminar os termos v_3, v_4, v_5 e v_6 , a partir de (76) se percebermos que:

$$v_i = \frac{EJ}{(E^2 - J^2)}v_2 + \frac{J^2}{(E^2 - J^2)}v_7, \tag{77}$$

para $i = 3, 4$ e

$$v_j = \frac{EJ}{(E^2 - J^2)}v_7 + \frac{J^2}{(E^2 - J^2)}v_2, \tag{78}$$

para $j = 5, 6$. Eliminadas as variáveis, o sistema se reduz portanto a:

$$\begin{aligned}
Ev_2 &= gv_1 + E_{eff}v_2 + J_{eff}v_7 \\
Ev_7 &= gv_8 + E_{eff}v_7 + J_{eff}v_2,
\end{aligned} \tag{79}$$

onde $E_{eff} = 2EJ^2/(E^2 - J^2)$ e $J_{eff} = 2J^3/(E^2 - J^2)$. Fazendo esse processo para todos os anéis da tira, o canal de grafeno é aproximado analiticamente por uma cadeia linear, com os termos de acoplamento valendo alternadamente J_{eff} e J . Nessas condições, a relação de dispersão é dada por:

$$E = E_{eff} \pm \sqrt{J^2 + J_{eff}^2 + 2JJ_{eff} \cos(k)}, \tag{80}$$

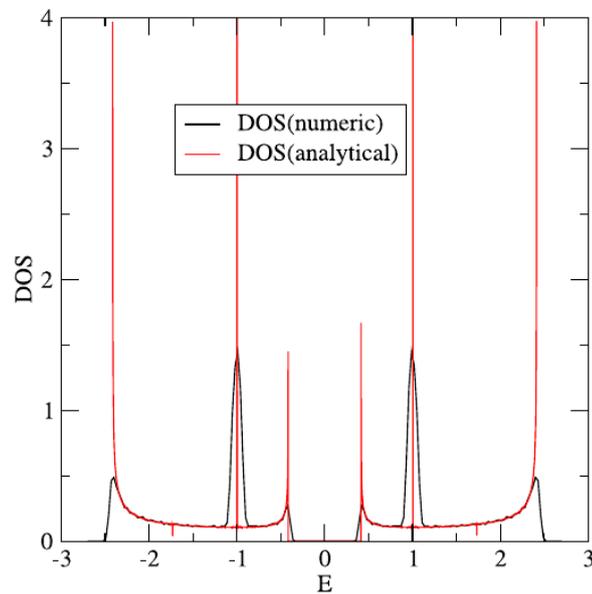
onde se assume que os autoestados relacionados a um número de onda k típico, cujas amplitudes não desaparecem no caso da cadeia efetiva. O canal real, entretanto, também permite que essas amplitudes sejam nulas: por exemplo, considerando novamente apenas o primeiro anel da figura 9, em $E = J$, obtemos o autoestado $|E = J\rangle = 1/2[(|3\rangle + |5\rangle) - |4\rangle + |6\rangle]$, enquanto para

$E = -J$, existe o autoestado $|E = J\rangle = 1/2[-|3\rangle - |5\rangle - |4\rangle - |6\rangle]$; Portanto, há uma forte degenerescência no sistema, com um estado por célula contribuindo em cada nível. A densidade de estados para a cadeia de grafeno pura será:

$$DOS(E) = \left[\frac{1}{\pi} \left| \frac{dk}{dE} \right| + \delta(E + J) + \delta(E - J) \right] \frac{1}{6} \quad (81)$$

Onde $k(E)$ pode ser obtido a partir de (80), com as degenerescências em k já tomadas em conta.

Figura 15 – Comparação entre a densidade de estados obtida numericamente e seu valor efetivo (eq. (81), em vermelho) para $N = 600$ e $b = 0.1J$



Fonte: Autor.

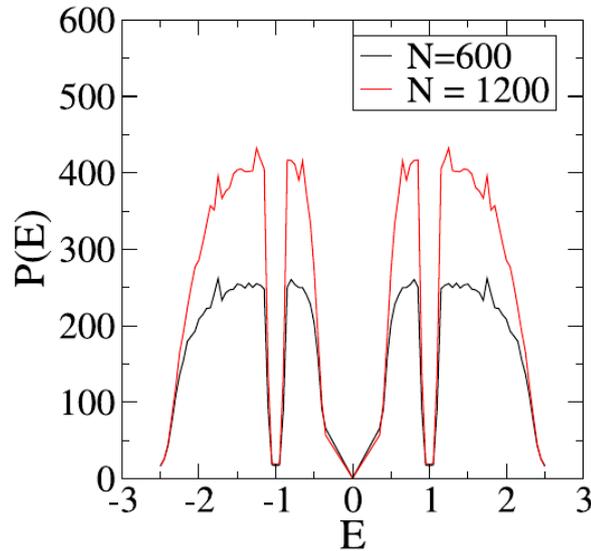
Na figura 15, estão representadas tanto a densidade de energia obtida via diagonalização direta quanto a obtida analiticamente na eq. (81), para $N = 600$ e, no caso numérico, $b = 0.1$. Conforme a simetria do sistema é quebrada pela desordem, as singularidades obtidas numericamente se tornam 'macias', assumindo um valor finito. Isso pode ser visto pelo desenvolvimento de caudas nas bandas de energia e pela mudança das singularidades em forma de delta por picos de largura finita. Picos estes que, por sua vez existem devido à degenerescência de modos localizados dentro dos anéis de grafeno, com sua largura sendo proporcional à amplitude de desordem. É de se notar também que as bandas de energia permitidas à cadeia correspondem à banda de energias para as quais ocorrem emaranhamento e transferência de estados entre o emissor e o receptor.

Outra grandeza de interesse utilizada para caracterizar as propriedades espectrais do canal é conhecida como Razão de Participação. Ela é capaz de nos fornecer uma medida de como as amplitudes de onda diferem significativamente de zero para uma faixa de energia. É expressa como:

$$P(E_k) = \frac{\sum_i |a_{i,k}|^2}{\sum_i |a_{i,k}|^4}, \quad (82)$$

sendo igual ao número de sítios N quando o canal em estudo for cristalino. Em nosso caso, portanto, a razão de participação mostrará a quantidade de sítios em significativa sobreposição com o modo k .

Figura 16 – Valores de participação para $N = 600, 1200$ e $b = 0.1J$



Fonte: Autor.

Na figura 16, estão representadas as razões de participação para $N = 600, 1200$, com amplitude de desordem $b = 0.1$. Para autoestados reminiscentes da cadeia efetiva alternada, a razão de participação permanece grande, da ordem do tamanho da cadeia. Tal comportamento é importante para a execução exitosa do protocolo [48]. Nota-se, ainda, o valor próximo de zero em $E = \pm J$, caracterizando modos fortemente localizados em apenas alguns anéis da cadeia. Isso é capaz de explicar a sensibilidade do protocolo à desordem, conforme os *spins* emissores e receptores são sintonizados nestes níveis.

4 Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Ao longo desta tese, identificou-se o processo de transferência de estados quânticos como uma das tarefas de maior importância para o desenvolvimento da área da Computação quântica, ao mesmo tempo em que esta figura como um grande gargalo para o avanço da tecnologia. A presença de defeitos em cadeias, sejam eles originários por falhas ou por serem inerentes ao processo de construção, acabam por modificar prejudicialmente a dinâmica de transferência, impondo uma dificuldade adicional no desenvolvimento de dispositivos de estado sólido. Das diferentes técnicas propostas de transferência, a transferência por meio de oscilações de Rabi aparenta possuir robustez à defeitos, geralmente possuindo altos valores de fidelidade para a transferência de estados.

Contribuindo para a produção de conhecimento na área, investigamos o processo de transferência de estados quânticos em uma cadeia unidimensional cujos sítios sofrem a ação de campos magnéticos locais que seguem uma série aperiódica. Os campos magnéticos podem induzir um regime de localização ou deslocalização a depender dos parâmetros utilizados. A transferência de estados com grande fidelidade é possível, desde que se sintonizem as energias dos *spins* emissor e receptor com valores próximos do centro da banda de energia, cuja existência de estados estendidos é permitida. O protocolo de comunicação utilizado também apresenta a vantagem de produzir estados maximamente emaranhados entre o emissor e receptor. Por último, é comprovado que a cadeia unidimensional apresenta uma eficácia semelhante ao modelo uniforme, o que pode ser visto ao se analisar o *tradeoff* entre velocidade e qualidade de transferência em comparação de ambas as cadeias.

No segundo estudo, investigamos a possibilidade do uso de uma cadeia simples de como canal para executar a transferência de estados quânticos. Os termos de hopping presentes na ligação entre os sítios da rede são do tipo estático desordenados; para cada realização de protocolo, os termos adotam um valor diferente no intervalo simétrico $[J(1 - b), J(1 + b)]$. Utilizando novamente o regime de fraco acoplamento, verifica-se que a performance do canal é satisfatória, com valores de fidelidade próximos da unidade. A flutuação nas interações entre os *spins* mudam dramaticamente o cenário, reduzindo a fidelidade aos valores mínimos para um pequeno incremento na amplitude de flutuação. O processo de dizimação padrão foi utilizado para aproximar a cadeia utilizada para uma cadeia efetiva unidimensional, com termos de hopping alternados, facilitando assim a obtenção da relação de dispersão e da densidade de estados. As descontinuidades observadas no modelo ideal e atenuadas com a adição de desordem no sistema

representam regiões de energia com estados localizados, contribuindo fortemente para um valor de dessintonia entre os *spins* emissores e receptores, prejudicando assim a transferência de estados. Convém enfatizar a quantidade de spins utilizados na cadeia, bem maior que o padrão da literatura [20, 48].

Em ambos os casos, espera-se que as contribuições auxiliem no desenvolvimento de dispositivos próprios para a comunicação, sobretudo entre diferentes componentes de um mesmo computador quântico.

A procura pelo desenvolvimento/aperfeiçoamento desse tipo de tecnologia é perene, até mesmo no caso dos computadores convencionais. É a principal perspectiva continuar os estudos sobre transferência de estados nos diversos tipos de rede e protocolos existentes. Novas simulações de outros formatos de grafeno figuram como próximos trabalhos imediatos.

Outro ramo fértil de computação quântica bastante em evidência trata do estudo de caminhadas quânticas discretas. A possibilidade da aplicação de diferentes tipos de operadores de decisão e passo permitem a simulação de uma vasta gama de fenômenos observáveis [104–106] que podem ainda não ter sido descobertos. Além disso, é visto que todos os cálculos realizáveis por um computador quântico podem ser simulados em uma caminhada quântica em um grafo criado especificamente para atender a necessidade [107]. É uma perspectiva próxima a realização e a divulgação de trabalhos na área. Atualmente, pesquisas envolvendo o conceito de aperiodicidade e caminhadas quânticas se encontra já em análise por parte dos pares realizadores no grupo de pesquisa.

Por fim, cabe destacar um desenvolvimento que parece ser de crucial importância não só para a Computação Quântica ou a Física em si, mas para as Ciências em geral. A popularização de métodos de Ciência de Dados, algoritmos de *machine learning* e inteligência artificial como um todo trouxeram consigo uma mudança de paradigma na produção científica em geral. Voltado para a área desta tese como um exemplo, a ref. [108] trata da otimização do processo de QST por meio da utilização de técnicas de aprendizado com reforço. Portanto, justifica-se o esforço para o conhecimento desses métodos, que podem visivelmente se traduzir em um enorme benefício para a academia num futuro muito próximo.

REFERÊNCIAS

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: AAPT, 2002.
- 2 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 6-7, p. 467–488, 1982. ISSN 00207748.
- 3 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. **Theoretical Computer Science**, Elsevier B.V., v. 560, n. P1, p. 7–11, 2014. ISSN 03043975. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025>>.
- 4 SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: IEEE. **Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science**. [S.l.], 1994. p. 124–134.
- 5 ARUTE, F. et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. **Nature**, Springer US, v. 574, n. 7779, p. 505–510, 2019. ISSN 14764687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>>.
- 6 PEDNAULT, E. et al. Leveraging Secondary Storage to Simulate Deep 54-qubit Sycamore Circuits. p. 1–39, 2019. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1910.09534>>.
- 7 KIMBLE, H. J. The quantum internet. **Nature**, v. 453, n. 7198, p. 1023–1030, 2008. ISSN 14764687.
- 8 PRESKILL, J. Plug-in quantum software. **Nature**, v. 402, n. 6760, p. 357–358, 1999. ISSN 00280836.
- 9 CHAO, R.; REICHARDT, B. W. Fault-tolerant quantum computation with few qubits. **npj Quantum Information**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 1, p. 1–8, 2018.
- 10 OSBORNE, I. S. **Fault-tolerant quantum coding**. [S.l.]: American Association for the Advancement of Science, 2018.
- 11 SCHOELKOPF, R. J.; GIRVIN, S. M. Wiring up quantum systems. **Nature**, v. 451, n. 7179, p. 664–669, 2008. ISSN 14764687.
- 12 STEFFEN, M. Superconducting Qubits Are Getting Serious. **Physics**, v. 4, p. 103, dec 2011. ISSN 1943-2879. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.4.103>>.
- 13 PAIK, H. et al. Observation of high coherence in josephson junction qubits measured in a three-dimensional circuit qed architecture. **Physical Review Letters**, APS, v. 107, n. 24, p. 240501, 2011.
- 14 REISERER, A. et al. A quantum gate between a flying optical photon and a single trapped atom. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 508, n. 7495, p. 237–240, 2014.
- 15 MATSUKEVICH, D.; KUZMICH, A. Quantum state transfer between matter and light. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 306, n. 5696, p. 663–666, 2004.
- 16 CIRAC, J. I. et al. Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 16, p. 3221–3224, 1997. ISSN 10797114.

- 17 SILLANPÄÄ, M. A. et al. Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 449, n. 7161, p. 438–442, 2007.
- 18 HE, Y. et al. Quantum state transfer from a single photon to a distant quantum-dot electron spin. **Physical Review Letters**, APS, v. 119, n. 6, p. 060501, 2017.
- 19 KANDEL, Y. P. et al. Adiabatic quantum state transfer in a semiconductor quantum-dot spin chain. **arXiv preprint arXiv:2007.03869**, 2020.
- 20 BOSE, S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 20, p. 1–4, 2003. ISSN 10797114.
- 21 WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 299, n. 5886, p. 802, 1982.
- 22 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **Physical Review Letters**, v. 70, n. 13, p. 1895–1899, 1993. ISSN 00319007.
- 23 APOLLARO, T. J. et al. Many-qubit quantum state transfer via spin chains. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 2015, n. T165, 2015. ISSN 02811847.
- 24 CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 18, p. 1–4, 2004. ISSN 00319007.
- 25 BANCHI, L. et al. Long quantum channels for high-quality entanglement transfer. **New Journal of Physics**, v. 13, p. 0–20, 2011. ISSN 13672630.
- 26 WÓJCIK, A. et al. Unmodulated spin chains as universal quantum wires. **Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics**, v. 72, n. 3, p. 3–5, 2005. ISSN 10502947.
- 27 WÓJCIK, A. et al. Multiuser quantum communication networks. **Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics**, v. 75, n. 2, p. 1–5, 2007. ISSN 10502947.
- 28 APOLLARO, T. J. et al. 99%-Fidelity Ballistic Quantum-State Transfer Through Long Uniform Channels. **Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics**, v. 85, n. 5, p. 1–11, 2012. ISSN 10502947.
- 29 LAGENDIJK, A. et al. Fifty years of Anderson localization. **Physics Today**, v. 62, n. 8, p. 24–29, 2009. ISSN 00319228.
- 30 ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. **Physical Review**, v. 109, n. 5, p. 1492–1505, 1958. ISSN 0031899X.
- 31 ABRAHAMAS, E. et al. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. **Physical Review Letters**, v. 42, n. 10, p. 673–676, 1979. ISSN 00319007.
- 32 MOTT, S. N. Metal-insulator transitions. **Physics Today**, v. 31, n. 11, p. 42–47, 1978. ISSN 19450699.
- 33 THOULESS, D. J. Electrons in disordered systems and the theory of localization. **Physics Reports**, v. 13, n. 3, p. 93–142, 1974. ISSN 03701573.

- 34 THEODOROU, G.; COHEN, M. H. Extended states in a one-dimensional system with off-diagonal disorder. **Physical Review B**, v. 13, n. 10, p. 4597–4601, 1976. ISSN 01631829.
- 35 FLEISHMAN, L.; LICCIARDELLO, D. C. Fluctuations and localization in one dimension. **Journal of Physics C: Solid State Physics**, v. 10, n. 6, p. 33–35, 1977. ISSN 00223719.
- 36 FLORES, J. C. Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder. **Journal of Physics: Condensed Matter**, v. 1, n. 44, p. 8471–8479, 1989. ISSN 09538984.
- 37 Das Sarma, S. et al. Localization, mobility edges, and metal-insulator transition in a class of one-dimensional slowly varying deterministic potentials. **Physical Review B**, v. 41, n. 9, p. 5544–5565, 1990. ISSN 01631829.
- 38 DUNLAP, D. H. et al. Absence of localization in a random-dimer model. **Physical Review Letters**, APS, v. 65, n. 1, p. 88, 1990.
- 39 WU, H.-L.; PHILLIPS, P. Polyaniline is a random-dimer model: A new transport mechanism for conducting polymers. **Physical review letters**, APS, v. 66, n. 10, p. 1366, 1991.
- 40 SIGRIST, M. et al. Superconductivity in a quasi-one-dimensional spin liquid. **Physical Review B**, APS, v. 49, n. 17, p. 12058, 1994.
- 41 KANEMITSU, Y. et al. Optical properties of quasi-one-dimensional thiophene-based oligomers. **Physical Review B**, APS, v. 50, n. 4, p. 2301, 1994.
- 42 KERTESZ, M.; HUGHBANKS, T. R. Low bandgap ladder polymers. **Synthetic Metals**, Elsevier, v. 69, n. 1-3, p. 699–700, 1995.
- 43 SEDRAKYAN, T. Localization-delocalization transition in a presence of correlated disorder: The random dimer model. **Physical Review B**, APS, v. 69, n. 8, p. 085109, 2004.
- 44 De Moura, F. A.; LYRA, M. L. Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 17, p. 3735–3738, 1998. ISSN 10797114.
- 45 De Moura, F. A.; LYRA, M. L. Correlation-induced metal-insulator transition in the one-dimensional Anderson model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 266, n. 1-4, p. 465–470, 1999. ISSN 03784371.
- 46 MOURA, F. A. B. F. de et al. Delocalization in harmonic chains with long-range correlated random masses. **Physical Review B**, APS, v. 68, n. 1, p. 012202, 2003.
- 47 MOURA, F. de et al. Delocalization and spin-wave dynamics in ferromagnetic chains with long-range correlated random exchange. **Physical Review B**, APS, v. 66, n. 1, p. 014418, 2002.
- 48 ALMEIDA, G. M. et al. Quantum-state transfer through long-range correlated disordered channels. **Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics**, Elsevier B.V., v. 382, n. 20, p. 1335–1340, 2018. ISSN 03759601. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.03.028>>.
- 49 TIKHONENKO, F. et al. Weak localization in graphene flakes. **Physical review letters**, APS, v. 100, n. 5, p. 056802, 2008.
- 50 FAL'KO, V. Quantum information on chicken wire. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 3, n. 3, p. 151–152, 2007.

- 51 KHVESHCENKO, D. Electron localization properties in graphene. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 3, p. 036802, 2006.
- 52 PEDERSEN, T. G. et al. Graphene antidot lattices: designed defects and spin qubits. **Physical Review Letters**, APS, v. 100, n. 13, p. 136804, 2008.
- 53 BOCKRATH, M. Unprecedented charge state control in graphene quantum dots. **Nano letters**, ACS Publications, v. 20, n. 5, p. 2937–2938, 2020.
- 54 WU, G.; LUE, N.-Y. Graphene-based qubits in quantum communications. **Physical Review B**, APS, v. 86, n. 4, p. 045456, 2012.
- 55 FOULGER, I. et al. Quantum walks and quantum search on graphene lattices. **Physical Review A**, APS, v. 91, n. 6, p. 062323, 2015.
- 56 CALAFELL, I. A. et al. Quantum computing with graphene plasmons. **npj Quantum Information**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 1–7, 2019.
- 57 APROJANZ, J. et al. Ballistic tracks in graphene nanoribbons. **Nature communications**, Nature Publishing Group, v. 9, n. 1, p. 1–6, 2018.
- 58 AUBRY, S.; ANDRÉ, G. Analyticity breaking and anderson localization in incommensurate lattices. **Ann. Israel Phys. Soc**, v. 3, n. 133, p. 18, 1980.
- 59 GREMPPEL, D. et al. Localization in an incommensurate potential: An exactly solvable model. **Physical Review Letters**, APS, v. 49, n. 11, p. 833, 1982.
- 60 SARMA, S. H. S. D.; XIE, X. C. Mobility Edge in a Model One-Dimensional Potential S. v. 66, n. 14, p. 2144–2147, 1991.
- 61 GRINIASTY, M.; FISHMAN, S. Localization by pseudorandom potentials in one dimension. **Physical review letters**, APS, v. 60, n. 13, p. 1334, 1988.
- 62 THOULESS, D. Localization by a potential with slowly varying period. **Physical review letters**, APS, v. 61, n. 18, p. 2141, 1988.
- 63 HARPER, P. G. Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field. **Proceedings of the Physical Society. Section A**, v. 68, n. 10, p. 874–878, 1955. ISSN 03701298.
- 64 SIL, S. et al. Extended states in one-dimensional lattices: application to the quasiperiodic copper-mean chain. **Physical Review B**, APS, v. 48, n. 6, p. 4192, 1993.
- 65 MOURA, F. D. et al. Bloch oscillations in an aperiodic one-dimensional potential. **Physical Review B**, APS, v. 71, n. 10, p. 104303, 2005.
- 66 MOURA, F. de et al. Bias driven coherent carrier dynamics in a two-dimensional aperiodic potential. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 372, n. 44, p. 6694–6700, 2008.
- 67 MOURA, F. D. et al. Vibrational modes in aperiodic one-dimensional harmonic chains. **Physical Review B**, APS, v. 73, n. 21, p. 212302, 2006.
- 68 MOURA, F. D. Vibrational modes in a two-dimensional aperiodic harmonic lattice. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 22, n. 43, p. 435401, 2010.

- 69 NASCIMENTO, E. et al. Suppressed transmission in aperiodically modulated multilayered dielectric structures. **Photonics and nanostructures-fundamentals and applications**, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 101–107, 2009.
- 70 LI, X. et al. Mobility edges in one-dimensional bichromatic incommensurate potentials. **Physical Review B**, APS, v. 96, n. 8, p. 085119, 2017.
- 71 DUTRA, R. F. et al. Electronic dynamics in 2d aperiodic systems under effect of electric field. **physica status solidi (b)**, Wiley Online Library, v. 257, n. 8, p. 1900782, 2020.
- 72 LÜSCHEN, H. P. et al. Single-particle mobility edge in a one-dimensional quasiperiodic optical lattice. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 16, p. 160404, 2018.
- 73 KOHLERT, T. et al. Observation of many-body localization in a one-dimensional system with a single-particle mobility edge. **Physical review letters**, APS, v. 122, n. 17, p. 170403, 2019.
- 74 MESSIAS, D. et al. Rabi-like quantum communication in an aperiodic. p. 1–12, 2019.
- 75 FAN, H.; DANG, G.-F. **Universal quantum cloning of single qubits**. [S.l.], 2006.
- 76 KIRCHOEFER, S. et al. Negative differential resistance at 300 k in a superlattice quantum state transfer device. **Applied physics letters**, American Institute of Physics, v. 44, n. 11, p. 1054–1056, 1984.
- 77 POND, J. et al. Microwave amplification to 2.5 ghz in a quantum state transfer device. **Applied physics letters**, American Institute of Physics, v. 47, n. 11, p. 1175–1177, 1985.
- 78 YIN, J. et al. Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers. **Science**, v. 356, n. 6343, p. 1140–1144, 2017. ISSN 10959203.
- 79 NIKOLOPOULOS, G. M. et al. **Quantum state transfer and network engineering**. [S.l.]: Springer, 2014.
- 80 CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. **Physical review letters**, APS, v. 92, n. 18, p. 187902, 2004.
- 81 CHRISTANDL, M. et al. Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks. **Physical Review A**, APS, v. 71, n. 3, p. 032312, 2005.
- 82 APOLLARO, T. J. et al. Transport of quantum correlations across a spin chain. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 27, n. 01n03, p. 1345035, 2013.
- 83 ALI, M. et al. Quantum discord for two-qubit x states. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 4, p. 042105, 2010.
- 84 YU, T.; EBERLY, J. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed " x " states. **arXiv preprint quant-ph/0503089**, 2005.
- 85 ZWICK, A. E. **Quantum State Transfer in Spin Chains**. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- 86 LYAKHOV, A.; BRUDER, C. Use of dynamical coupling for improved quantum state transfer. **Physical Review B**, APS, v. 74, n. 23, p. 235303, 2006.

- 87 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- 88 GRIFFITHS, D. J. Introduction to quantum mechanics. **2nd, Pearson, Chapter2. The time-independent schrodinger equation**, p. 90–91, 2005.
- 89 REFAEL, G.; FISHER, D. S. Energy correlations in random transverse field Ising spin chains. **Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics**, v. 70, n. 6, p. 1–19, 2004. ISSN 01631829.
- 90 CAPPELLARO, P. et al. Coherence and control of quantum registers based on electronic spin in a nuclear spin bath. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 21, p. 210502, 2009.
- 91 MÁDI, Z. et al. Time-resolved observation of spin waves in a linear chain of nuclear spins. **Chemical physics letters**, Elsevier, v. 268, n. 3-4, p. 300–305, 1997.
- 92 VANDERSYPEN, L. M. et al. Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 414, n. 6866, p. 883–887, 2001.
- 93 ZHANG, J. et al. Simulation of heisenberg x y interactions and realization of a perfect state transfer in spin chains using liquid nuclear magnetic resonance. **Physical Review A**, APS, v. 72, n. 1, p. 012331, 2005.
- 94 KOCH, J. et al. Introducing the transmon: a new superconducting qubit from optimizing the cooper pair box. **arXiv**, p. cond–mat, 2007.
- 95 LI, X. et al. Perfect quantum state transfer in a superconducting qubit chain with parametrically tunable couplings. **Physical Review Applied**, APS, v. 10, n. 5, p. 054009, 2018.
- 96 RITTER, S. et al. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 484, n. 7393, p. 195–200, 2012.
- 97 SANTOS, A. C. dos; SARANDY, M. S. Atalhos para adiabaticidade e aplicacoes em computacao qu[^]antica. **arXiv preprint arXiv:1603.05071**, 2016.
- 98 ECKERT, K. et al. Efficient quantum state transfer in spin chains via adiabatic passage. **New journal of physics**, IOP Publishing, v. 9, n. 5, p. 155, 2007.
- 99 ALMEIDA, G. et al. Localization properties and high-fidelity state transfer in hopping models with correlated disorder. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 398, p. 180–189, 2018.
- 100 ALMEIDA, G. M. et al. Robust entanglement transfer through a disordered qubit ladder. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 383, n. 27, p. 125847, 2019.
- 101 ALMEIDA, G. M. et al. Transmission of quantum states through disordered channels with dimerized defects. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 18, n. 11, p. 1–12, 2019.
- 102 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Physical Review Letters**, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- 103 GUO, G.-P. et al. Quantum computation with graphene nanoribbon. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 12, p. 123005, 2009.

- 104 MOLFETTA, G. D. et al. Elephant quantum walk. **Physical Review A**, APS, v. 97, n. 6, p. 062112, 2018.
- 105 BUARQUE, A.; DIAS, W. Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement. **Physical Review E**, APS, v. 100, n. 3, p. 032106, 2019.
- 106 MENDES, C. et al. Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder. **Physical Review E**, APS, v. 99, n. 2, p. 022117, 2019.
- 107 CHILDS, A. M. Universal computation by quantum walk. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 18, p. 180501, 2009.
- 108 ZHANG, X.-M. et al. Automatic spin-chain learning to explore the quantum speed limit. **Physical Review A**, APS, v. 97, n. 5, p. 052333, 2018.

ANEXO A – Artigos Publicados



Research articles

Rabi-like quantum communication in an aperiodic spin-1/2 chain

D. Messias, C.V.C. Mendes, G.M.A. Almeida, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura*

Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL 57072-970, Brazil



ARTICLE INFO

Keywords:

Aperiodic Sarma potential
Entanglement
Extended states

ABSTRACT

We study a quantum-state transfer protocol across a 1D XY spin-1/2 channel featuring on-site magnetic field distribution following the aperiodic Sarma potential. The scheme is based upon weakly connecting the sender and receiver to the channel at each end. Our results show that such aperiodicity allows for high-fidelity performance as a band of extended states near the band center is created and the outer parts of the system are properly tuned with it. We also evaluate the generation of bipartite entanglement shared among the communicating parties.

1. Introduction

Transmitting quantum states (e.g. a qubit) and generating entanglement at arbitrary distances are essential tasks in quantum networks and distributed quantum information processing [1,2]. In this context, the idea of pre-engineered quantum spin chains as put forward by Bose in [3] is based on having minimal control over the system during realization of the protocol so as to avoid decoherence and other forms of noise. The key point is to set the network, its coupling patterns, and local magnetic fields in advance, and then let it evolve following its own Hamiltonian dynamics (for reviews, cf. [4,5]). Proper initialization of the system and precise knowledge over the dynamics timescale are also necessary and that is where one of the major drawbacks comes about.

Static (e.g. fabrication errors) and/or dynamic fluctuations of the system parameters may compromise our ability to predict when and where the quantum state will be at a certain location [6]. Disorder, for instance, may promote Anderson localization thereby affecting the performance of the communication protocol [7,8]. While this happens to be true for one- and twodimensional models with on-site *uncorrelated* disorder (for any disorder strength), correlated fluctuations can break this rule for they are capable of sustaining extended states in some parts of the spectrum [9]. For instance, it was shown long time ago that long-range-correlated disorder induces a metal–insulator transition with sharp mobility edges [10,11]. This was confirmed by experiments performed on waveguides [12,13]. Quite recently, a single-particle mobility edge has also been reported [14] on a 1D quasiperiodic optical lattice thereby setting the ground for further, more demanding physical implementations.

Overall, although most of the coupling schemes for quantum-state

transfer (QST) protocols may hold against small amounts of disorder [15–23], a particular one has been shown to be relatively robust against it. Weak-coupling models [24,25] happen to hide those imperfections away as the sender and receiver are perturbatively connected to the channel. The communicating parties effectively get in touch via the few channel modes they are mostly tuned with. One particular scenario is the generation of a reduced two-level (or Rabi-like) dynamics, up to second-order perturbation theory, between the sender and receiver with renormalized coupling and on-site energies [25]. Such a class of systems has also been addressed in the context of, e.g., entanglement generation [15,26,27] and routing protocols [28].

Recent works have shown that various types of correlated disorder allows for performance of Rabi-like QST with high fidelities [6,29]. One of the crucial requirements for the channel is that it features a band of extended states so as to induce an effective two-level resonance within the perturbation framework [30]. Therefore, the search for models displaying coexistence between localized and delocalized states is paramount. In this work we are to unveil the capability of a XY spin channel featuring an on-site magnetic field distribution following the aperiodic slowly varying series introduced by Das Sarma et al. in [31,32]. This is a special class of deterministic one-dimensional potentials that exhibit mobility edges separating localized and extended states. Several works have been devoted to study the electronic transport properties in such aperiodic potential [33–43], including the onset of Bloch oscillations under the action of a uniform external field [35], topological states, and phase transitions [42,43]. Further, quantum information measures have been shown to be able to capture the localization-delocalization transition in these systems [36–39]. However, the actual capability of entanglement generation and QST protocols through channels with engineered slowly varying aperiodic modulation

* Corresponding author.

E-mail address: fidelis@fis.ufal.br (F.A.B.F. de Moura).<https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2020.166730>

Received 5 November 2019; Received in revised form 28 February 2020; Accepted 9 March 2020

Available online 12 March 2020

0304-8853/ © 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

of an external field are still open issues.

Considering the above, here we investigate the performance of the standard QST scheme [3] as well as of end-to-end entanglement generation in the weak-coupling model [24,25]. We find that the channel aperiodicity allows for high-quality performances for a wide range of parameters, with a speed-fidelity tradeoff comparable to the uniform case which is known to be optimal [30]. We relate such figure of merit with the known localization-delocalization properties of the model. Moreover, due to the finiteness of the channel, we report a regime where even though localization would set about in the thermodynamic limit, QST still succeeds with good fidelity.

2. Hamiltonian model

The system we consider here is a 1D isotropic spin-1/2 chain featuring exchange interactions of the XY-type among its $N + 2$ spins, as described by the Hamiltonian ($\hbar = 1$)

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N+2} \frac{\epsilon_i}{2} (\hat{1} - \hat{\sigma}_i^z) + \sum_{i=1}^{N+1} \frac{J_i}{2} (\hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x + \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^y), \quad (1)$$

where $\hat{\sigma}_i^{x,y,z}$ are the Pauli spin operators for a spin residing at the i -th site, ϵ_i is the local magnetic field strength, and J_i is the spin exchange coupling strength, henceforth taken to be $J_1 = J_{N+1} = g$ and $J_i = J \equiv 1$ else, with $g \ll J$. That is to say the outer spins are weakly connected to a spin channel with uniform couplings. We also set $\epsilon_1 = \epsilon_{N+2} = W$.

The protocol goes as follows [3]. Suppose the first spin (sender) is prepared in an arbitrary state $|\phi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ — with $|0\rangle$ ($|1\rangle$) denoting spin down (up) — with the remaining ones in the ferromagnetic ground state, what makes the initial state of the whole system $|\Psi(0)\rangle = |\phi\rangle_1 |\mathbf{0}\rangle_{\text{channel}} |0\rangle_{N+2}$, where $|\mathbf{0}\rangle_{\text{channel}} = |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_{N+1}$. We then let it evolve through its natural Hamiltonian dynamics so that at time t we have $|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi(0)\rangle$. It is immediate to see that only the ket featuring a single excitation (spin up) will actually contribute to propagation along the chain as the isotropic XY (or just XX) Hamiltonian preserves the number of excitations. Thus the dynamics is restricted to the subspace spanned by $|i\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |1\rangle_i \cdots |0\rangle_{N+2}$, denoting a single spin flipped at the i -th site.

At some specific time τ , the ultimate goal is to find $|\Psi(\tau)\rangle = |0\rangle_1 |\mathbf{0}\rangle_{\text{channel}} |\phi\rangle_{N+2}$ (up to a global phase) in order to get the fidelity $F_\phi = \langle \phi | \rho_{N+2} | \phi \rangle$ as high as possible, with $\rho_{N+2} = \text{Tr}_{1,\dots,N+1} |\Psi(\tau)\rangle \langle \Psi(\tau)|$. A proper function to measure the performance of the protocol can be obtained from averaging over every possible input combination (a, b), that is over the Bloch sphere. It results in the so-called averaged fidelity [3]

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{f_{N+2}(t)}{3} \cos \vartheta + \frac{f_{N+2}(t)^2}{6}, \quad (2)$$

where $f_j(t) = |\langle j | e^{-iHt} | 1 \rangle|$ is the absolute value of the transition amplitude and its associated phase ϑ can generally be ignored by a convenient choice of the local magnetic fields (we set $\cos \vartheta = 1$ hereafter). Note that outcomes of Eq. (2) are within $[0.5, 1]$, only being maximum when $f_{N+2}(t) = 1$.

At this point it is better to rewrite the system Hamiltonian as

$$H = H_{\text{channel}} + W(|1\rangle\langle 1| + |N+2\rangle\langle N+2|) + g(|1\rangle\langle 2| + |N+1\rangle\langle N+2|) + \text{H. c.}, \quad (3)$$

on basis $\{|i\rangle\}$, with $H_{\text{channel}} = \sum_{j=2}^{N+1} \epsilon_j |j\rangle\langle j| + J \sum_{j=2}^N |j\rangle\langle j+1| + \text{H. c.}$. By coupling the outer (communicating) spins very weakly ($g \ll J$) to the channel we expect them to be energetically detached from the rest of the chain thereby generating their own subspace and behaving like an effective two-level system. As a matter of fact, using second-order perturbation theory in g , we can obtain [25]

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} h_L & J_{\text{eff}} \\ J_{\text{eff}} & h_R \end{pmatrix}, \quad (4)$$

with

$$h_\nu = W - g^2 \sum_k \frac{|a_{\nu,k}|^2}{\lambda_k - W}, \quad (5)$$

$$J_{\text{eff}} = -g^2 \sum_k \left(\frac{a_{L,k} a_{R,k}^*}{\lambda_k - W} \right), \quad (6)$$

where $\nu \in \{L, R\}$, $a_{L,k} \equiv \langle 2 | \lambda_k \rangle$, $a_{R,k} \equiv \langle N+1 | \lambda_k \rangle$, with $|\lambda_k\rangle$ and λ_k being, respectively, the eigenstates and eigenvalues of H_{channel} .

Once the conditions for generating the above effective two-level system are set — that is $W \neq \lambda_k \forall k$ and $g \ll J$ — we still need to be sure whether or not it allows for full, resonant end-to-end Rabi oscillations. Straightforward diagonalization of Hamiltonian (4) yields

$$f_{N+2}^{(\text{eff})}(t) = \frac{2|J_{\text{eff}}|}{\Omega} \left| \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right|, \quad (7)$$

where $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + 4J_{\text{eff}}^2}$, with $\Delta = h_L - h_R$. The transition amplitude then reaches its maximum at times $t = \tau = n\pi/\Omega$ for odd n and yields to unit fidelity only when $\Delta = 0$, leading to $\tau = n\pi/2|J_{\text{eff}}|$. Note that the transfer time τ is $O(g^{-2})$. It is also relevant to highlight that at half of the QST time, one can obtain a Bell-type entangled state [24]:

$$|1\rangle_1 |0\rangle_{N+2} |\mathbf{0}\rangle_{\text{channel}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |0\rangle_{N+2} - |0\rangle_1 |1\rangle_{N+2}) |\mathbf{0}\rangle_{\text{channel}}. \quad (8)$$

For this reason, here we are also interested in evaluating the concurrence [44] between the sender and receiver spins which, in the computational basis, is expressed as

$$C(t) = 2f_1(t)f_{N+2}(t), \quad (9)$$

which goes from 0 (no entanglement) to 1 (maximum entanglement). Using the expressions obtained via perturbation theory, we get

$$C(t) = \frac{4|J_{\text{eff}}|^2}{\Omega^2} \sqrt{\Delta^2 + 4J_{\text{eff}}^2 \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)} \left| \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right|. \quad (10)$$

If $\Delta = 0$ then $C(t) = |\sin(\Omega t)|$ and maximum entanglement can be recorded at times $t = n\pi/2$ ($n = 1, 3, \dots$), as expected.

In the case of asymmetries within the channel, such as in the presence of an aperiodic magnetic-field distribution, one should expect $\Delta \neq 0$. In other words, these fluctuations become single-site defects in the effective two-level description [Eq. (4)]. Still, the protocol is bound to work if we somehow guarantee $|\Delta| \ll |J_{\text{eff}}|$ at least. It has been shown that such condition holds even in the presence of disorder as long as it is of special kinds [6].

Here, we set the local magnetic fields within the channel to follow an aperiodic series of the form [31,32]

$$\epsilon_j = V \cos(2\pi\alpha j^\nu), \quad (11)$$

($j = 2, 3, \dots, N+1$) where $V > 0$, $\nu > 0$, and α ultimately set the localization properties of the system. If α is rational and ν an integer, one gets a periodic Bloch potential. For an irrational value of α with $\nu = 1$, Harper's equation is obtained whereas for $\nu \geq 2$ it becomes statistically equivalent to the random Anderson model. Keeping α irrational, for $0 < \nu < 1$ and $V < 2J$, there is a phase of extended states near the band center, bounded by two mobility edges located at $E_c = \pm(2J - V)$, separating them from localized states. All states are found to be localized whenever $V > 2J$ or $1 < \nu < 2$, although the Lyapunov exponent approaches zero slowly at the band center for the latter [31,32].

3. Results

Those ubiquitous channel properties allow us to perform high-fidelity QST as long as we tune the frequency of the outer spins, W , to the band center to make use of the available extended states. An inspection in Eqs. (5) and (6) tells us that, if $a_{L,k}$ and $a_{R,k}$ are well distributed throughout the spectrum — mostly in the vicinity of W given each term

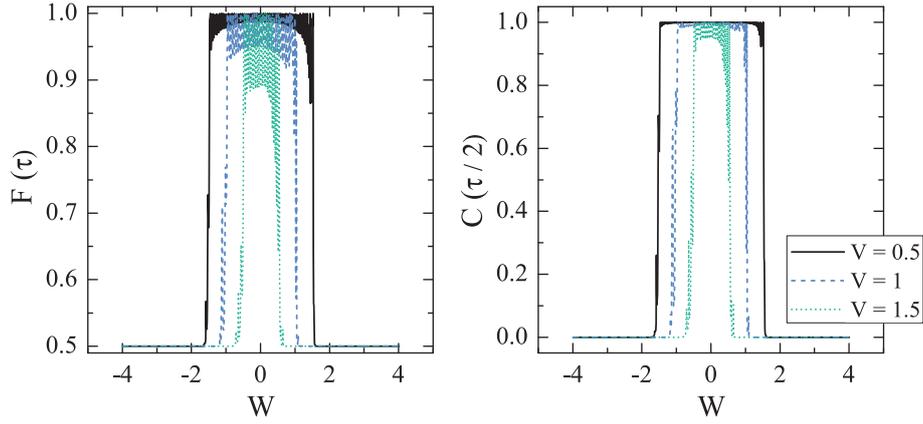


Fig. 1. Averaged fidelity $F(\tau)$ and concurrence $C(\tau/2)$, evaluated for $\tau = \pi/\Omega$, obtained via second-order perturbation theory. We set $N = 100$, $\nu = 0.5$, $\pi\alpha = 0.5$, and $V/J = 0.5, 1, 1.5$. Plots indicate that channel modes within $[-2J + V, 2J - V]$ indeed feature an extended character (given $\nu < 1$).

in the sum $\sim(\lambda_k - W)^{-1}$ — meaning that the sum runs over extended states, it is very likely that $|\Delta| \ll |J_{\text{eff}}|$, yielding $F(\tau) \approx 1$ and $C(\tau/2) \approx 1$.

To see that, in Fig. 1 we plot the fidelity and concurrence against W using the results obtained via perturbation theory, Eqs. (7) and (10). In order to properly compare those to exact diagonalization of the full Hamiltonian [Eq. (1)] and as we set a diverse parameter configurations throughout our analysis, we choose to track the maximum fidelity F_{max} and maximum concurrence C_{max} recorded over a wide time window. For now, that will do the job in telling us whether or not the aperiodic channel we consider fulfills the requirements for performing Rabi-like communication protocols. Results are displayed in Figs. 2 and 3 for various α values and fixed $V = 1J$. We readily see that it goes as predicted by perturbation theory (Fig. 1) for small enough g for it

ultimately prevents the excitation to populate the channel during realization of the protocol. Note that larger channels demands smaller g as more modes spanned around W may cause further mixing with the sender/receiver subspace. A significant performance loss is seen in Figs. 2 and 3 for $g = 0.1J$ upon going from $N = 50$ to $N = 100$. Another detail is that, overall, α does not bring any significant difference as long as it is kept irrational.

Those figures embody our most representative results for the QST and entanglement generation protocols. They reveal that when W is set around the center of the band, faithful quantum communication between spins 1 and $N + 2$ is made possible, as told out by the nearly unit QST fidelity and the high degree of bipartite entanglement shared between the ends of the chain. This is valid for $W \in [-2J + V, 2J - V]$

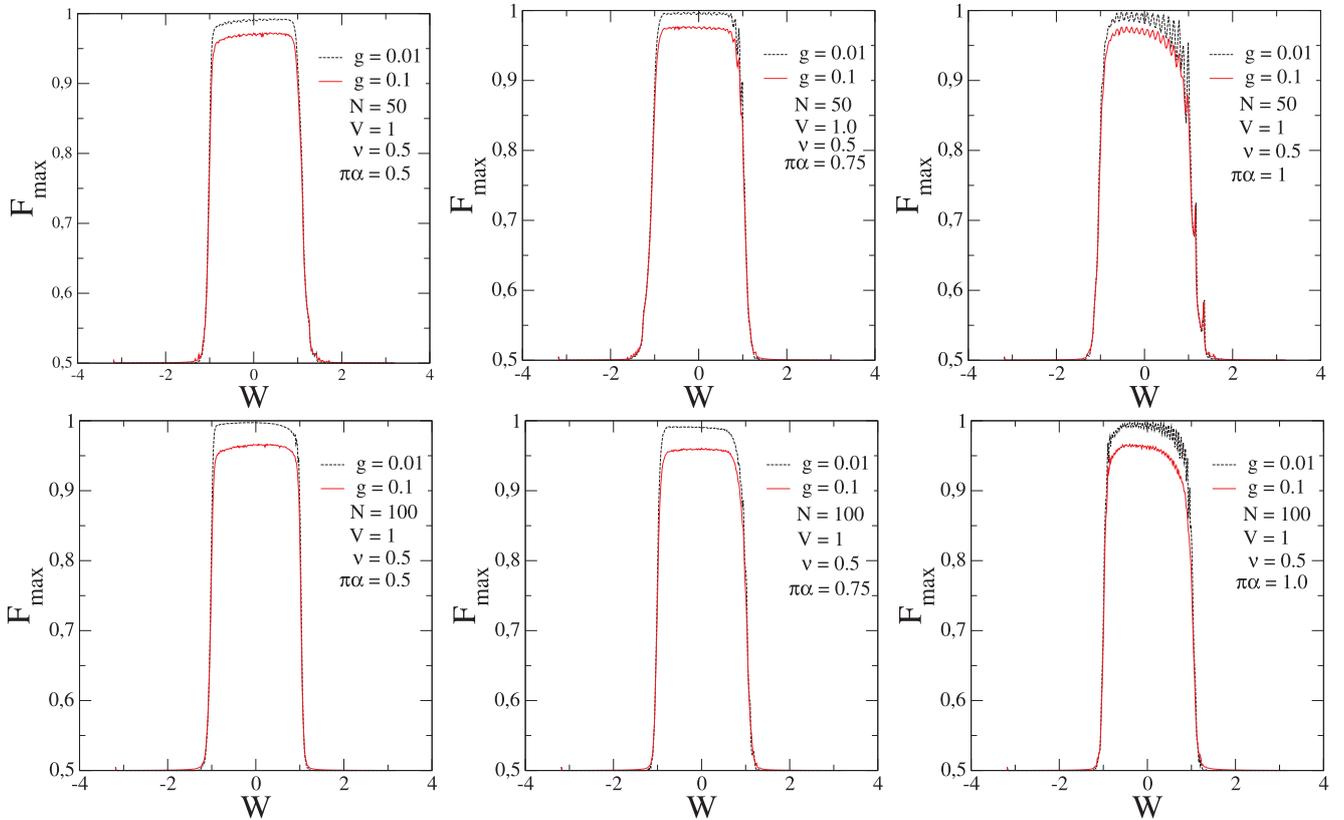


Fig. 2. Maximum fidelity $F_{\text{max}} = \max\{F(t)\}$ over $t \in [0, 10^5]$ versus W for $N = 50, 100$, $g/J = 0.1, 0.01$, $V/J = 1$, $\nu = 0.5$, and $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ obtained from exact numerical diagonalization of the full Hamiltonian, Eq. (1). Plots show that high-fidelity QST occurs within the band of extended states as predicted for the aperiodic channel, i.e. within $[-2J + V, 2J - V]$.

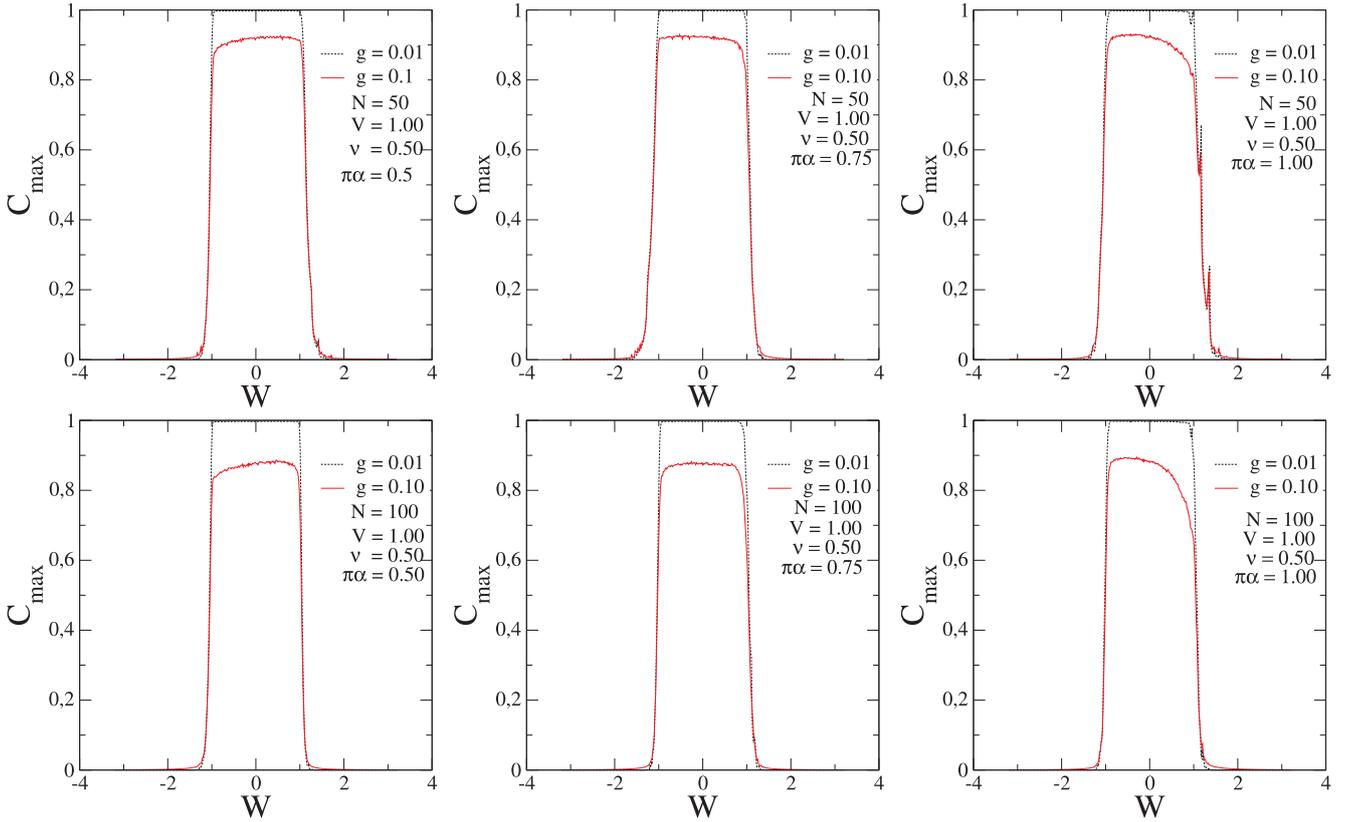


Fig. 3. Maximum concurrence $C_{\max} = \max\{C(t)\}$ over $t \in [0, 10^5]$ versus W for $N = 50, 100$, $g/J = 0.1, 0.01$, $V/J = 1$, $\nu = 0.5$, and $\pi\alpha = 0.5, 0.75, 1$ obtained from exact numerical diagonalization of the full Hamiltonian, Eq. (1). For $-1J < W < 1J$ the sender (spin 1) and receiver (spin $N + 2$) share nearly-maximum entanglement thereby corroborating with the results seen in Fig. 2.

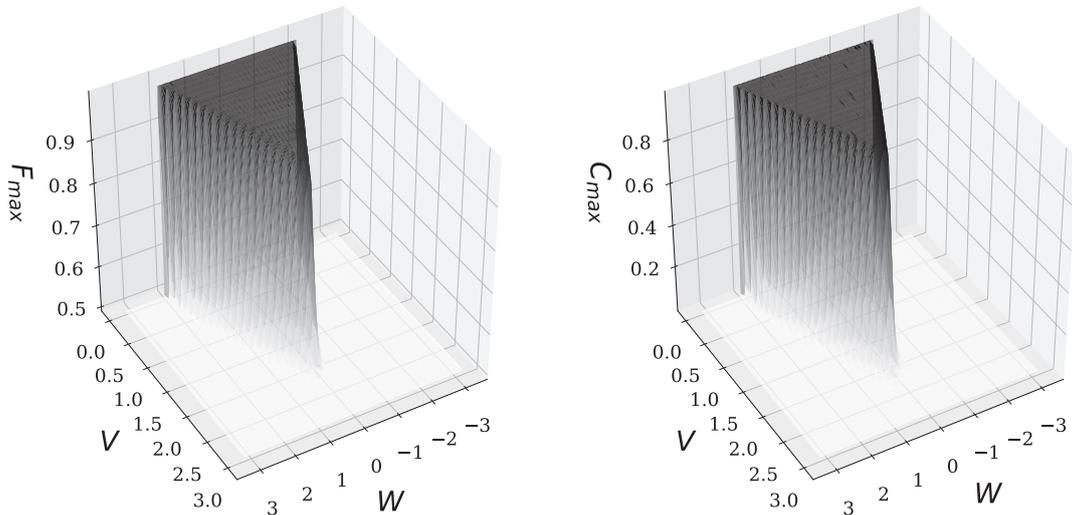


Fig. 4. F_{\max} and C_{\max} over $t \in [0, 10^5]$ versus W and V for $N = 100$, $\nu = 0.5$, $g = 0.01J$, and $\pi\alpha = 0.5$, obtained via exact numerical diagonalization of Hamiltonian (1).

which is the energy range containing delocalized states for $\nu < 1$ [31,32]. Fig. 1 indeed shows that the width of the region in which best-quality performances are obtained gets narrower upon increasing V . To provide with another point of view, in Fig. 4 we evaluate both figures of merit versus W and V for $\nu = 0.5$ and $g = 0.01J$ via full exact numerical diagonalization and confirm that such width decreases linearly.

Now, we fix both F_{\max} and C_{\max} to $W = 0$ and focus on the role of V and ν [cf. Eq. (11)] on the performances in Fig. 5, therein also comparing results obtained via perturbation theory and exact numerical diagonalization of the full spin Hamiltonian. We spot an interesting behavior surrounding $V \approx 2J$ above which QST and entanglement

generation begin to fade [see Fig. 5(a) and (c)]. This is again in agreement with the localization properties of the aperiodic potential as for $V > 2J$ all eigenstates within the channel are localized [31,32]. In Fig. 5(b) and (d) we see that $\nu \gg 1$ rules out the possibility of carrying out faithful quantum communication, a expected feature since $\nu > 1$ yields localization throughout the whole spectrum [31,32].

Curiously though, for ν slightly greater than 1 we can still observe relatively good performances. We emphasize that the critical point $\nu = 1$ for the localization-delocalization transition in aperiodic models was obtained in several works using distinct methods (see e.g. Refs. [31,32,45,46]) and it is known that the localization length around the

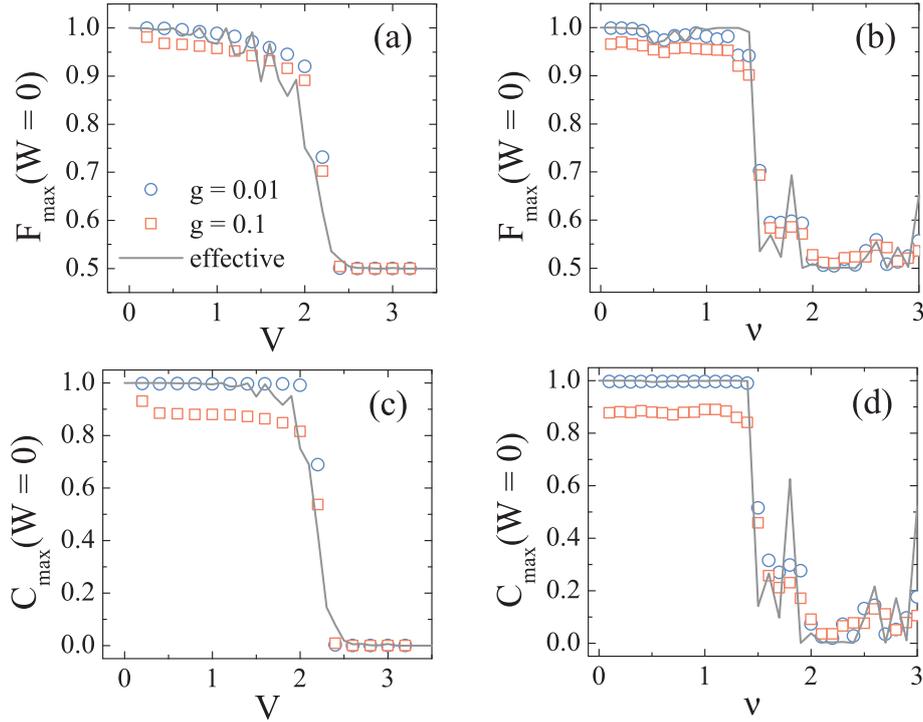


Fig. 5. Maximum fidelity F_{\max} and concurrence C_{\max} for fixed $W = 0$ (a,c) versus V for fixed $\nu = 0.5$ and (b,d) versus ν for $V = 1J$. In all plots, $N = 100$ and $\pi\alpha = 0.1$ and we display results obtained from exact numerical diagonalization of the full Hamiltonian, [Eq. (1)] for $g = 0.01J$ (blue circles) and $g = 0.1J$ (red squares), recorded over $tJ \in [0, 10^5]$, alongside the effective description via second-order perturbation theory (solid gray lines), that is $F_{\max} \equiv F(\tau)$ and $C_{\max} \equiv C(\tau/2)$, with $\tau = \pi/\Omega$, as evaluated from Eqs. (7) and (10).

band center ($W = 0$) is large, covering about 10^3 – 10^4 sites. Therefore, for $\nu \approx 1$ and given that we are dealing with small channels ($N = 10^2$) the localization length is in general larger than N , what promotes relatively good outcomes for F_{\max} and C_{\max} .

So far we have been investigating the performance of the protocols in a broad time window. In practice, though, one must know in advance how long it takes, with reasonable precision, to transmit a quantum state from one point to another or when entanglement will be established between two nodes of a quantum network in order to carry on with the computation (either measuring the state or routing it to somewhere else).

A major issue with weak-coupling models is that the transfer time scales as $\tau \sim g^{-2}$ and so, as the very onset of Rabi-like dynamics requires g to be rather small, one should expect long times to get a nearly unit fidelity. It was proved in Ref. [30] that channels with uniform coupling strengths provide with the optimal speed-fidelity tradeoff given the onsite energies are also on the same level ($\epsilon_i = \epsilon$). This means that the homogeneous channel outperforms in terms of fidelity when comparing with any other coupling scheme, both operating with the same QST time. The homogeneous channel features $\Delta = 0$, $J_{\text{eff}} = -g^2/J$ and then $\tau = \pi J/2g^2$ while the fidelity of the transfer scales as $F = 1 - O(g^2N)$, what demands $g \ll 1/\sqrt{N}$ [24]. In general, one may reduce the transfer time with cost of compromising fidelity.

We now use the homogeneous channel as a reference and see about the speed-fidelity tradeoff against the aperiodic channel for various parameters. Let us first define $\tilde{\Omega} = \Omega J/g^2$, rendering $\tau = \pi J/g^2\tilde{\Omega}$. Setting $g = \delta J/\sqrt{\tilde{\Omega}}$ for every channel, the expected transfer time becomes $\tau = \pi/J\delta^2$. Having placed a configuration-independent τ , we are now in position to evaluate the corresponding fidelities. Results are shown in Fig. 6 and we readily see that, despite the asymmetry of the channel, the aperiodic sequence of magnetic fields throughout the chain holds a performance comparable to that of the homogeneous channel ($V = 0$; solid lines), albeit for some values of ν and especially for higher V , for it is seen that the fidelity saturates to values < 1 even as $\delta \rightarrow 0$, meaning

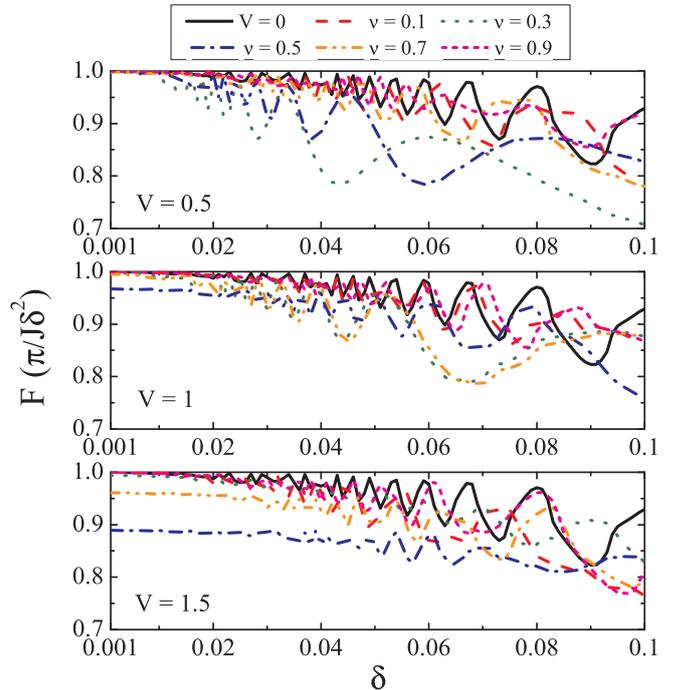


Fig. 6. Input-averaged fidelity $F(\tau)$ evaluated at $\tau = \pi/J\delta^2$ versus δ for several channel configurations including $V = 0$ (homogeneous channel). Curves are obtained via exact numerical diagonalization of the full Hamiltonian [Eq. (1)] with $g = \delta J/\sqrt{\tilde{\Omega}}$, $\pi\alpha = 0.1$, $W = 0$, and $N = 100$. In most cases the speed-fidelity tradeoff for the channel featuring the Sarma aperiodic sequence resembles that of the homogeneous channel (solid lines), with the fidelity scaling as $F \approx 1 - O(\delta^2)$.

that there is significant residual Δ . Such instabilities can also be seen in Fig. 5(a) and (b). Of course, the fidelities inevitably decay upon increasing δ and the characteristic oscillatory pattern is due to fact that the channel modes are taking part in the dynamics as higher-order interactions among the sender, receiver, and channel are setting up (the Rabi-like, two-level approximation becomes less reliable) [24,25,30]. Better fidelity outcomes, though, can still be obtained in the vicinity of the prescribed time τ .

4. Conclusions

We studied a QST protocol through a spin channel featuring an aperiodic distribution of local magnetic fields, what is able to induce a localization-delocalization transition when the parameters are suitable. By weakly attaching two more spins to act as sender and receiver at each end of the channel we showed that it is still possible for them to communicate with great fidelity as long as their energies match with the center of the channel band, wherein extended states are available. We also found that the channel features speed-fidelity tradeoff comparable to its fully homogeneous counterpart [30]. What is more, the same protocol can be used for creating end-to-end bipartite entanglement.

In general, weak-coupling models are versatile for they are also useful in a variety of quantum information processing tasks. They can be used, for instance, for spanning decoherence-free subspaces [47]. Different models and topologies have also been addressed for the sake of generating long-distance entanglement [48,49,26] with some experiments being carried out along (see, e.g. [50]). Further extensions of this work may follow in that direction, possibly in view of state-of-the-art technology [14].

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgments

This work was supported by CNPq, CAPES, and FINEP, CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FAPEAL.

References

- [1] J.I. Cirac, P. Zoller, H.J. Kimble, H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3221.
- [2] H.J. Kimble, *Nature* 453 (2008) 1023.
- [3] S. Bose, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 207901.
- [4] T.J.G. Apollaro, S. Lorenzo, F. Plastina, *Int. J. Mod. Phys. B* 27 (2013) 1345035.
- [5] G.M. Nikolopoulos, I. Jex (Eds.), *Quantum State Transfer and Network Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [6] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Lett. A* 382 (2018) 1335.
- [7] C.K. Burrell, J. Eisert, T.J. Osborne, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 052319.
- [8] J. Allcock, N. Linden, *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009) 110501.
- [9] F. Izrailev, A. Krokhin, N. Makarov, *Phys. Rep.* 512 (2012) 125–254.
- [10] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3735–3738.
- [11] F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4062–4065.
- [12] U. Kuhl, F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, H.-J. Stöckmann, *Appl. Phys. Lett.* 77 (2000) 633–635.
- [13] U. Kuhl, F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 126402.
- [14] H.P. Lüschen, S. Scherg, T. Kohlert, M. Schreiber, P. Bordia, X. Li, S. Das Sarma, I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* 120 (2018) 160404.
- [15] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, T.J.G. Apollaro, M.L. Lyra, *Phys. Rev. A* 96 (2017) 032315.
- [16] G. De Chiara, D. Rossini, S. Montangero, R. Fazio, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 012323.
- [17] D. Burgarth, S. Bose, *New Journal of Physics* 7 (2005) 135.
- [18] D.I. Tsomokos, M.J. Hartmann, S.F. Huelga, M.B. Plenio, *New J. Phys.* 9 (2007) 79.
- [19] D. Petrosyan, G.M. Nikolopoulos, P. Lambropoulos, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 042307.
- [20] N.Y. Yao, L. Jiang, A.V. Gorshkov, Z.-X. Gong, A. Zhai, L.-M. Duan, M.D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 040505.
- [21] A. Zwick, G.A. Álvarez, J. Stolze, O. Osenda, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 022311.
- [22] S. Ashhab, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 062305.
- [23] A. Kay, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 042320.
- [24] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 034303.
- [25] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 022330.
- [26] S.M. Giampaolo, F. Illuminati, *New J. Phys.* 12 (2010) 025019.
- [27] M.P. Estarellas, I. D'Amico, T.P. Spiller, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 042335.
- [28] S. Paganelli, S. Lorenzo, T.J.G. Apollaro, F. Plastina, G.L. Giorgi, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 062309.
- [29] G.M.A. Almeida, C.V.C. Mendes, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura, *Ann. Phys.* 398 (2018) 180.
- [30] G.M.A. Almeida, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 012334.
- [31] S. Das Sarma, S. He, X.C. Xie, *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 2144–2147.
- [32] S. Das Sarma, S. He, X.C. Xie, *Phys. Rev. B* 41 (1990) 5544–5565.
- [33] R. Farchioni, G. Grosso, G.P. Parravicini, *Phys. Rev. B* 47 (1993) 2394.
- [34] H. Cruz, S. Das Sarma, *J. Physique I* 3 (1993) 1515.
- [35] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, F.D. Dominguez-Adame, V.A. Malyshev, *Phys. Rev. B* 71 (2005) 104303.
- [36] L. Gong, P. Tong, *Phys. Rev. B* 76 (2007) 085121.
- [37] L.Y. Gong, H. Zhu, S.M. Zhao, W.W. Cheng, Y.B. Sheng, *Phys. Lett. A* 376 (2012) 3026.
- [38] L.Y. Gong, L. Wei, S.M. Zhao, W.W. Cheng, *Phys. Rev. E* 86 (2012) 061122.
- [39] W.W. Cheng, L.Y. Gong, C.J. Shan, Y.B. Sheng, S.M. Zhao, *Eur. Phys. J. D* 67 (2013) 121.
- [40] E. Lazo, *Eur. Phys. J. D* 71 (2017) 1.
- [41] T. Liu, X.L. Gao, S.H. Chen, H. Guo, *Phys. Lett. A* 381 (2017) 3683.
- [42] T. Liu, Y.-Y. Yan, H. Guo, *Phys. Rev. B* 96 (2017) 174207.
- [43] T. Liu, H. Guo, *Phys. Lett. A* 382 (2018) 3287.
- [44] W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 2245–2248.
- [45] F.A.B.F. de Moura, *J. Phys.: Cond. Mat.* 22 (2010) 435401.
- [46] F.A.B.F. de Moura, *J. Mod. Phys. C* 22 (2011) 63.
- [47] W. Qin, C. Wang, X. Zhang, *Phys. Rev. A* 91 (2015) 042303.
- [48] L. Campos Venuti, S.M. Giampaolo, F. Illuminati, P. Zanardi, *Phys. Rev. A* 76 (2007) 052328.
- [49] S.M. Giampaolo, F. Illuminati, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 050301.
- [50] S. Sahlng, G. Remenyi, C. Paulsen, P. Monceau, V. Saligrama, C. Marin, A. Revcolevschi, L.P. Regnault, S. Raymond, J.E. Lorenzo, *Nature Phys.* 11 (2015) 255.