

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

DANILO GOMES PIRES

**Processo de mistura não-linear por duas ondas utilizando luz
estruturada**

Maceió
Março de 2020

DANILO GOMES PIRES

Processo de mistura não-linear por duas ondas utilizando luz estruturada

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Maceió
Março de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

P667p Pires, Danilo Gomes.

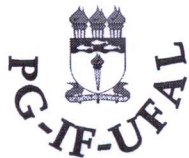
Processo de mistura não-linear por duas ondas utilizando luz estruturada /
Danilo Gomes Pires. – 2020.
74. : il.

Orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.
Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de
Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 59-65.
Apêndice: f. 67-74.

1. Ondas não-lineares. 2. Momentos angulares. 3. Feixes ópticos. I. Título.

CDU: 539.12...18



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

**“Processos de mistura não-linear por duas ondas utilizando luz
estruturada”**

por

Danilo Gomes Pires

A Banca Examinadora composta pelos professores Eduardo Jorge da Silva Fonseca (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Daniel Felinto Pires Barbosa, da Universidade Federal de Pernambuco, Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, Guilherme Martins Alves de Almeida, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

Maceió, 4 de março de 2020

Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Prof. Dr. Daniel Felinto Pires Barbosa

Prof. Dr. Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva

Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Agradecimentos

Gostaria de citar alguns nomes que foram importantes nesta jornada:

- Meus pais, Dorgival e Dalva, que me deram todo amor e suporte em todos os momentos;
- Minha esposa, Catarina, no qual aceitou compartilhar ao meu lado toda felicidade e amor ao longo de nossas vidas;
- Meus amigos de infância, que me trouxeram leveza e companheirismo nos momentos mais difíceis. São eles, em ordem alfabética: André, Ayron, Deninho, Ítalo e Renato;
- Meus amigos adquiridos na UFAL, que transformaram nosso ambiente de trabalho em um local alegre e divertido. Em ordem alfabética: Anderson, Henrique, Luan, Paulo e Zezo;
- Túlio, pelos incríveis momentos durante e após o nosso período sanduíche na Espanha, e Alessandro, que se tornou um grande amigo nos meus últimos dias em Duke e que com certeza iremos compartilhar mais cervejas nos próximos dias;
- Meu orientador, Eduardo, pelos ótimos conselhos dados durante toda a minha vida acadêmica;
- Integrantes do Grupo de Óptica e Nanoscopia, que deram excelente suporte ao longo da nossa rotina acadêmica;
- CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta Tese de Doutorado visa estudar o processo de mistura não-linear por duas ondas utilizando luz estruturada. Aqui, após apresentar uma base teórica necessária para o entendimento do trabalho, os resultados obtidos foram divididos em cinco etapas. Primeiro trataremos da mistura de feixes Laguerre-Gauss carregando momento angular orbital arbitrário e ordens radiais não-nulas, onde discutimos mais profundamente acerca da geração de novas ordens radiais. Seguindo com os resultados referentes à mistura de modos Laguerre-Gauss, iremos considerar também modos que carregam cargas topológicas fracionárias. Deriva-se analiticamente uma extensão da regra de seleção, levando à possibilidade de mostrar o nascimento de um vórtice e a criação de novas ordens radiais.

Partindo para os resultados referentes aos modos Hermite-Gauss, iniciaremos mostrando uma interessante propriedade da mistura não-linear destes modos: de forma contrária aos modos Laguerre-Gauss, aqui a superposição de modos no campo resultante sempre terá um modo dominante possuindo uma regra bem definida para seus índices. Através de uma análise teórica, juntamente com resultados experimentais, mostra-se como esse fenômeno ocorre. Utilizando essa propriedade da mistura de modos Hermite-Gauss, seguimos com uma possível aplicação deste processo não-linear. Consideramos o processo de mistura por duas ondas para realizar conversão de modos ópticos, onde é utilizado uma superposição de modos Hermite-Gauss como feixes iniciais. Através de resultados teóricos e experimentais mostraremos detalhadamente como realizar tal conversão, seguido com uma análise dos limites do método aqui apresentado.

A interação não-linear de feixes paraxiais com simetria elíptica, conhecidos como modos Ince-Gauss, também foi considerada. Aqui apresentamos uma abordagem teórica alternativa, baseada no método de função de Green, para estudar o processo de mistura por duas ondas. Com a análise de misturas não-lineares utilizando modos Ince-Gauss com paridade definida, obtemos a regra de seleção para essa família de feixes. Assim, o estudo fundamental de mistura por duas ondas utilizando feixes paraxiais como campos incidentes torna-se completa. Consideramos também a mistura de modos Ince-Gauss helicoidais, que carregam momento angular orbital. A transição entre as simetrias cilíndricas e retangulares ao controlarmos o parâmetro de excentricidade dos modos iniciais é estudada para os casos em que os modos iniciais possuem paridade definida e carregam momento angular orbital.

Palavras-chave: Mistura por duas ondas. Momento Angular Orbital. Feixes Paraxiais.

Abstract

In this thesis we study nonlinear two-wave mixing processes using structured light. Here, after presenting a theoretical basis, the results obtained are presented in five sections. First we consider the mixture of Laguerre-Gaussian beams carrying arbitrary orbital angular momentum and non-null radial orders, where a deeper discussion is realized concerning higher radial orders generation. Following with the results for Laguerre-Gaussian mode mixtures, we also consider vortices carrying fractional topological charges. An extension for the selection rule is analytically derived, where the birth of a vortex and creation of higher radial orders is observed.

Moving forward to the results referring to Hermite-Gaussian beams, we start by showing an interesting property exclusive to this set of modes: In opposition to Laguerre-Gaussian modes, here the resulting field always will have a dominant mode possessing a well-defined rule for its indices. Through theoretical analysis, together with experimental results, we show how this behaviour occurs. This property inherent to Hermite-Gaussian modes is used for a possible application of this nonlinear process. We perform an optical mode conversion, where a field superposition of Hermite-Gaussian modes is used as initial beams. Detailed theoretical and experimental results show how to realized such conversion, followed by an analysis for the limitations of the presented method.

The nonlinear interaction of elliptical paraxial beams, known as Ince-Gaussian modes, is also considered. Here we present an alternative theoretical approach, based in Green's function methods, to study two-wave mixing processes. By analyzing nonlinear mixtures using parity-defined Ince-Gaussian modes we obtain a selection rule for this beam family. At this point, we complete the fundamental study of two-wave mixing using paraxial beams as input fields. Mixtures of helical Ince-Gaussian modes, carrying arbitrary orbital angular momentum, are studied as well, followed by transitions between cylindrical and rectangular symmetries by controlling the excentricity parameter in the input modes.

Keywords: Two-wave mixing. Orbital Angular Momentum. Paraxial Beams.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 Singularidade de fase	2
1.2 Carga topológica	3
1.3 Momento angular da luz	3
2 Mistura não-linear por duas ondas	5
2.1 Equação paraxial da onda	5
2.1.1 Feixes Gaussianos	6
2.1.2 Feixes Hermite-Gauss	6
2.1.3 Feixes Laguerre-Gauss	7
2.1.4 Feixes Ince-Gauss	8
2.1.5 Fase de Gouy	8
2.1.6 Feixes paraxiais como bases ortonormais	10
2.2 Modulador espacial da luz	11
2.3 Equação da onda na matéria	12
2.4 Processos não-lineares de segunda ordem	13
2.5 Mistura de ondas com vórtices ópticos	16
2.6 Resumo do capítulo	19
3 Mistura de feixes Laguerre-Gauss	21
3.1 Aparato experimental	21
3.2 Mistura de feixes Laguerre-Gauss com ordens radiais não-nulas	22
3.3 Mistura de feixes Laguerre-Gauss com cargas topológicas fracionárias	26
3.4 Resumo do capítulo	29
4 Mistura de feixes Hermite-Gauss	31
4.1 Bases de estado adequado para protocolos de conversão de modos ópticos	31
4.2 Conversão de modos ópticos através de mistura de feixes Hermite-Gauss	35
4.2.1 Cálculo dos pesos para o processo de conversão de modos	36
4.2.2 Conversões para modos com paridade definida	38
4.2.3 Conversões para modos carregando MAO	41
4.2.4 Limitações do método	42
4.3 Resumo do capítulo	43

5	Mistura de feixes Ince-Gauss	45
5.1	Método de função de Green	45
5.2	Mistura de modos Ince-Gauss com paridade definida	47
5.3	Mistura de modos Ince-Gauss carregando MAO	49
5.4	Transição entre modos Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss	52
5.5	Resumo do capítulo	53
6	Conclusões	55
6.1	Considerações finais	55
6.2	Propostas de continuidade	56
6.3	Artigos publicados e submetidos pelo autor da tese	57
6.3.1	Artigos referentes à tese	57
6.3.2	Outros artigos	57
	Referências	58
A	Cálculo da integral de <i>overlap</i> para os modos Laguerre-Gauss	67
A.1	Ordens radiais iniciais nulas	68
A.2	Ordens radiais iniciais não-nulas	69
B	Cálculo da integral de <i>overlap</i> para os modos Hermite-Gauss	71
C	Teoria da lente convexa inclinada	73

Capítulo 1

Introdução

Sem dúvidas, a fotônica alcançou uma grande posição no cenário científica atual. Dentre as muitas aplicações que ela nos gerou, a melhora nos sistemas de comunicação [1] e na manipulação ótica [2] são as mais destacadas. Introduzidas no final do século XIX pelo físico e matemático James Clerk Maxwell, é notável no cotidiano de todos nós o que as equações que regem a luz produziram a nível tecnológico para nossa sociedade. Das lâmpadas que iluminam as ruas durante as noites até computadores portáteis que são utilizados tanto como ferramenta imprescindível de trabalho quanto para lazer e diversão, as Equações de Maxwell revolucionaram nossas vidas.

Em 1992, Allen et al. [3] apresentou à comunidade científica os feixes Laguerre-Gauss (LG), que carregam um momento angular orbital (MAO) bem definido. Tais feixes carregam uma fase azimutal $l\phi$, onde o índice l é conhecido como carga topológica. Uma volta completa ao redor do vórtice implica uma diferença de fase de $2\pi l$. Além de estudos fundamentais [4, 5], muitos trabalhos foram desenvolvidos com o intuito de estudar possíveis aplicações, como pinças óticas [6], acoplamento *spin*-órbita [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], imageamento [18], manipulação de átomos ultra-frios [19] e protocolos quânticos [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], por exemplo. Posteriormente, Berry considerou não apenas diferenças de fase inteiras para os vórtices óticos, mas também valores fracionários [37]. Foi mostrado que o nascimento de um vórtice no campo próximo se dá em valores meio-inteiros, enquanto no campo distante acontece em valores inteiros [38]. Experimentalmente, além da utilização de hologramas gerados computacionalmente, a geração de vórtices fracionários pode ser realizada através de metasuperfícies [39], metagrades [40] e cristais líquidos [41, 42].

Assim, a *luz espacialmente estruturada*, que pode ser definida como controle bi-dimensional dos modos transversais da luz, é uma das formas de codificar informação ou pode ser utilizada para pinças óticas e armadilhamento. O potencial de modos espaciais da luz de alta ordem, tais como os modos Hermite-Gauss (HG), LG e Ince-Gauss (IG), atraíram a atenção de muitos pesquisadores nos últimos anos. Esses modos constituem as três grandes famílias de soluções da equação paraxial da onda e são conhecidos por serem automodos transversos de ressonadores em cavidades óticas [43, 44]. De forma análoga aos modos LG, que são soluções da equação paraxial da onda em coordenadas cilíndricas, outras famílias de feixes são obtidas quando consideramos outros sistemas de coordenadas. Quando resolvidas em coordenadas retangulares, ou cartesianas, obtemos os feixes HG, que possuem distribuição de intensidade transversa formada por lobos de intensidade dispostos em uma grade retangular. Por outro lado, as soluções referentes às coordenadas elípticas são os modos IG. Descobertos por M. A. Bandres e J. C. Gutiérrez-Vega [45], esses modos são caracterizados por possuírem um parâmetro de excentrici-

cidade ϵ , no qual é possível transitar entre os modos LG e HG quando ϵ tende a zero ou infinito, respectivamente.

Através dos anos, feixes carregando MAO construíram uma base sólida para a interação luz-matéria. Particularmente, respostas oriundas de meios não-lineares são responsáveis por famosos processos como a geração de segundo harmônico [46], geração de soma e diferença de frequências [47], oscilações paramétricas óticas [48, 49, 50, 51], conversão espontânea paramétrica descendente [52], fluorescência paramétrica [53], mistura de ondas [54, 55] e mistura por quatro-ondas em meios atômicos [56, 57, 58]. Em particular, no trabalho aqui apresentado iremos tratar do processo não-linear de mistura por duas ondas utilizando como feixes iniciais modos LG, HG e IG. Para a realização experimental desse trabalho, introduziremos uma nova forma de trabalhar com aparatos que necessitam de um interferômetro.

Primeiramente, algumas definições importantes para o tema tratado nesta tese serão apresentadas ainda no Capítulo 1. No Capítulo 2 apresentaremos uma breve introdução teórica necessária para o entendimento dos resultados aqui presentes. Partindo das equações de Maxwell, mostraremos como acontece o processo não-linear de mistura de ondas utilizando vórtices óticos como feixes iniciais. Os resultados serão divididos em três capítulos, sendo o Capítulo 3 referente aos resultados envolvendo os feixes Laguerre-Gauss, o Capítulo 4 envolvendo os feixes Hermite-Gauss e o Capítulo 5 considerando modos Ince-Gauss. Referente aos feixes Laguerre-Gauss, mostraremos uma discussão mais aprofundada sobre a formação de novas ordens radiais ao considerar modos óticos carregando uma carga topológica arbitrária e ordens radiais não-nulas como campos iniciais. Ainda no mesmo capítulo será considerado a mistura não-linear de vórtices óticos carregando cargas topológicas fracionárias, tendo como objetivo mostrar como ocorre o nascimento de um vórtice e a criação de novas ordens radiais. Neste caso, deriva-se uma nova regra de seleção através da extensão da integral de *overlap* normalizada para o caso no qual os campos iniciais carregam cargas topológicas fracionárias. Partindo para os resultados referentes aos modos Hermite-Gauss, no Capítulo 4, apresentaremos uma propriedade interessante associada à mistura não-linear desses modos: de forma contrária ao caso envolvendo modos Laguerre-Gauss, aqui cria-se um modo dominante com uma regra bem definida para seus índices. Essa propriedade nos leva à uma possível aplicação, onde iremos tratar da mistura de uma superposição de modos como campos de entrada no cristal não-linear. Isso resultará em outra superposição no campo gerado para a qual, se os campos iniciais forem escolhidos corretamente, será possível a conversão de modos óticos. Dessa forma, podemos transformar modos Hermite-Gauss, que possuem simetria retangular, em modos Laguerre-Gauss ou Ince-Gauss, que possuem simetrias cilíndricas e elípticas, respectivamente. Por fim, no Capítulo 5, trataremos de misturas não-linear utilizando modos Ince-Gauss como campos iniciais. Aqui, realizamos a mistura de modos Ince-Gauss com paridade definida e carregando momento angular orbital. Dessa forma, conseguimos concluir o estudo fundamental de processos de mistura por duas ondas utilizando feixes paraxiais como modos iniciais. É apresentado também a transição entre modos com simetria cilíndrica (Laguerre-Gauss) e retangular (Hermite-Gauss) ao alterarmos o parâmetro de excentricidade dos feixes elípticos iniciais.

1.1 Singularidade de fase

Quando não podemos definir um valor numérico à uma grandeza, podemos dizer que esta grandeza é *singular*. Como um exemplo prático, podemos citar a hora ao redor do globo terrestre. É possível definirmos exatamente a hora nas diversas cidades ao redor do mundo, porém o mesmo não ocorre nos pólos norte e sul. Nestes pontos a hora é indefinida, assumindo todos os valores possíveis. Trazendo essa definição para o contexto da presente tese, temos como grandezas de

interesse os campos vetoriais elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e indução magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$, onde $\vec{r} = (x, y, z)$. Mostraremos como mais detalhes no Capítulo 2 que tais campos satisfazem as equações de Maxwell. Através da natureza vetorial dos campos apresentados, surge as singularidades de polarização [59, 60, 61, 62]. Já que não trataremos desse tipo de singularidade, não entraremos em maiores detalhes. Por outro lado, ao realizarmos a aproximação escalar, podemos representar o campo eletromagnético como um campo complexo escalar $U(\vec{r}, t)$. Dessa forma, definimos que a fase de um campo escalar complexo U em um ponto $\vec{r} = (x, y, z)$ é singular se $\Re[U(\vec{r}, t)] = 0$ e $\Im[U(\vec{r}, t)] = 0$ [63, 64]. Suponha que em um certo ponto o campo U assume um valor $a + ib = \rho \exp(i\theta)$, onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan(b/a)$ são chamados de módulo e fase, respectivamente. Se neste ponto o campo é singular, obtemos uma amplitude nula e uma fase indefinida $\theta = \arctan(0/0)$. Quando analisamos a propagação de um ponto singular em um campo eletromagnético se propagando ao longo do eixo z , torna-se uma linha singular cuja fase acumula por 2π ao longo da singularidade.

1.2 Carga topológica

Vamos considerar agora um ponto ao longo dessa linha singular e assumir um sentido de um caminho fechado em torno dessa linha onde a mudança de fase total é 2π . Utilizando a regra da mão direita associamos um sentido à singularidade, que aqui chamamos de *sentido de circulação*. Em um plano bidimensional perpendicular ao eixo de propagação z , tais singularidades de fase são pontos e podemos associar um índice topológico definido pela integral de fase:

$$l = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta, \quad (1.1)$$

onde o sentido de integração ao redor da singularidade é definido como positivo se realizado de forma anti-horária. Chamamos este índice de *carga topológica*, que em geral é retratada matematicamente pelas letras l, m, s .

As linhas singulares que se formam ao longo da propagação no eixo z são, em geral, estruturalmente estáveis e genéricas. Ou seja, elas são imunes à perturbações e, para os casos genéricos, a fase acumula por 2π ao redor da singularidade. Por outro lado, para casos não-genéricos, a fase acumula por valores maiores que 2π em torno do ponto singular. Para exemplificar esse caso, vamos considerar um vórtice óptico carregando um valor de carga topológica $l = 2$. Baseado no que foi apresentado anteriormente, isso quer dizer que sua fase acumula em 4π ao redor da singularidade. Se inserirmos uma perturbação no nosso sistema, que do ponto de vista experimental pode ser uma onda plana ou um feixe Gaussiano com amplitudes muito menores do que o do vórtice anteriormente considerado, o ponto singular com carga topológica $l = 2$ será decomposto em dois pontos singulares possuindo carga topológica $l = 1$ cada. Assim, o ponto singular sem perturbações carregando $l = 2$ pode ser classificado como um caso não-genérico, enquanto as duas singularidades com $l = 1$ são consideradas como casos genéricos.

1.3 Momento angular da luz

Através do trabalho pioneiro de Allen et al. [3], os autores associaram o momento angular orbital da luz com a fase espacial de um vórtice óptico. Utilizando a família de soluções da equação paraxial da onda em coordenadas cilíndricas, chamados modos Laguerre-Gauss, foi mostrado que tais feixes possuem momento angular orbital. Os modos Laguerre-Gauss serão

apresentados no Capítulo 2, juntamente com as outras famílias de soluções da equação paraxial da onda.

Ao assumir um vetor potencial linearmente polarizado, os autores calcularam as expressões para os campos elétrico e magnético e para a *densidade de momento angular*, expressa por $\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$, onde $\vec{p} = \vec{S}/c^2$ é a densidade de momento linear. Aqui, \vec{S} é o vetor de Poynting. Assim, a razão entre o fluxo de momento angular $J_z = \int j_z da$ e a energia $E = \int u da$, com u sendo a densidade de energia, é:

$$\frac{J_z}{E} = \frac{l}{\omega}, \quad (1.2)$$

enquanto a razão entre J_z e o fluxo de momento linear P_z é dada por:

$$\frac{J_z}{P_z} = \frac{l}{k}. \quad (1.3)$$

O índice l presente nas Equações 1.2 e 1.3 é a carga topológica e, por ser um número inteiro variando de $-\infty$ até $+\infty$, possui um número de graus de liberdade maior do que o seu estado de polarização que assume apenas valores $+1$ e -1 , por exemplo. Ainda é possível obter as mesmas expressões pelo ponto de vista da mecânica quântica, já que um fóton se propagando na direção z possui um momento angular igual a $m\hbar$, energia $\hbar\omega$ e momento linear $\hbar k$.

Capítulo 2

Mistura não-linear por duas ondas

Neste capítulo apresentamos a base teórica para o entendimento dos resultados desta tese, que serão discutidos nos Capítulos 3, 4 e 5. Partindo das equações de Maxwell, tratamos de algumas soluções da equação paraxial da onda importantes para o trabalho aqui apresentado. Em seguida, também partindo das equações de Maxwell, deriva-se a equação da onda na matéria. Uma discussão sobre processos não-lineares de segunda ordem é apresentada, visando a mistura de ondas com vórtices ópticos.

2.1 Equação paraxial da onda

Todos os fenômenos eletromagnéticos são regidos pelas Equações de Maxwell onde, considerando um meio isotrópico e uniforme, sem cargas e correntes livres, podemos escrevê-las para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e o vetor indução magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ no sistema internacional de unidades (S.I.) como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Para desacoplar o sistema de equações diferenciais acima em relação às variáveis $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ basta calcular o rotacional da equação 2.2 ou 2.4 que, utilizando-se das Equações 2.1 e 2.3, resulta em:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

onde aqui ∇^2 é o operador Laplaciano, que é definido como sendo o divergente do gradiente de um campo.

Soluções que descrevem um feixe monocromático se propagando na direção z podem ser obtidas utilizando o *ansatz*:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i(kz - \omega t)} \hat{n}, \quad (2.7)$$

onde \hat{n} corresponde ao vetor polarização, $\psi(\vec{r})$ é a amplitude da onda e $(kz - \omega t)$ é a fase, com $k = \omega/c$ sendo o módulo do vetor de onda. Ao utilizar a expressão 2.7 na Equação 2.5, obtemos:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + 2ik\hat{z} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.8)$$

A aproximação paraxial consiste em assumir que o envelope espacial do campo varia lentamente ao longo de sua propagação. Este argumento condiz com o comportamento físico de feixes, pois o efeito de difração faz com que o perfil transversal do campo seja alterado de forma lenta quando o mesmo está se propagando no espaço livre. Portanto, devido à diferença entre a taxa de variação da amplitude do campo nos eixos longitudinais e transversos, podemos inferir que:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|, 2k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|. \quad (2.9)$$

Assim, fazendo uso da aproximação paraxial, a Equação 2.8 é então reduzida a:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

no qual ∇_{\perp}^2 representa o operador Laplaciano atuando nas coordenadas transversais ao eixo de propagação \hat{z} . A Equação 2.10 é conhecida como *equação paraxial da onda*, admitindo uma grande variedade de soluções [65]. Visando atender os propósitos desta tese, iremos apresentar apenas quatro delas: feixes Gaussianos, Hermite-Gauss, Laguerre-Gauss e Ince-Gauss.

2.1.1 Feixes Gaussianos

Os feixes Gaussianos consistem em soluções da equação paraxial da onda (Equação 2.10) mais simples, cujo campo é dado por:

$$\psi_0(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - i\Psi_G(z) \right]}, \quad (2.11)$$

onde $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z_R^2/z^2}$ é o diâmetro do feixe, $R(z) = z(1 + z_R^2/z^2)$ é o raio de curvatura do feixe e $\Psi_G(z) = \arctan(z/z_R)$ representa a fase de Gouy para feixes Gaussianos. Aqui, w_0 representa a cintura do feixe, *i.e.*, o diâmetro mínimo do feixe, z_R é o comprimento de Rayleigh, que está associado à distância em que a área do feixe é dobrado, e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a coordenada radial. A distribuição de intensidade para feixes Gaussianos pode ser vista nas Figuras 2.1 e 2.2, representados como modos fundamentais das famílias de feixes que compõem as soluções da equação paraxial da onda apresentada na Equação 2.10.

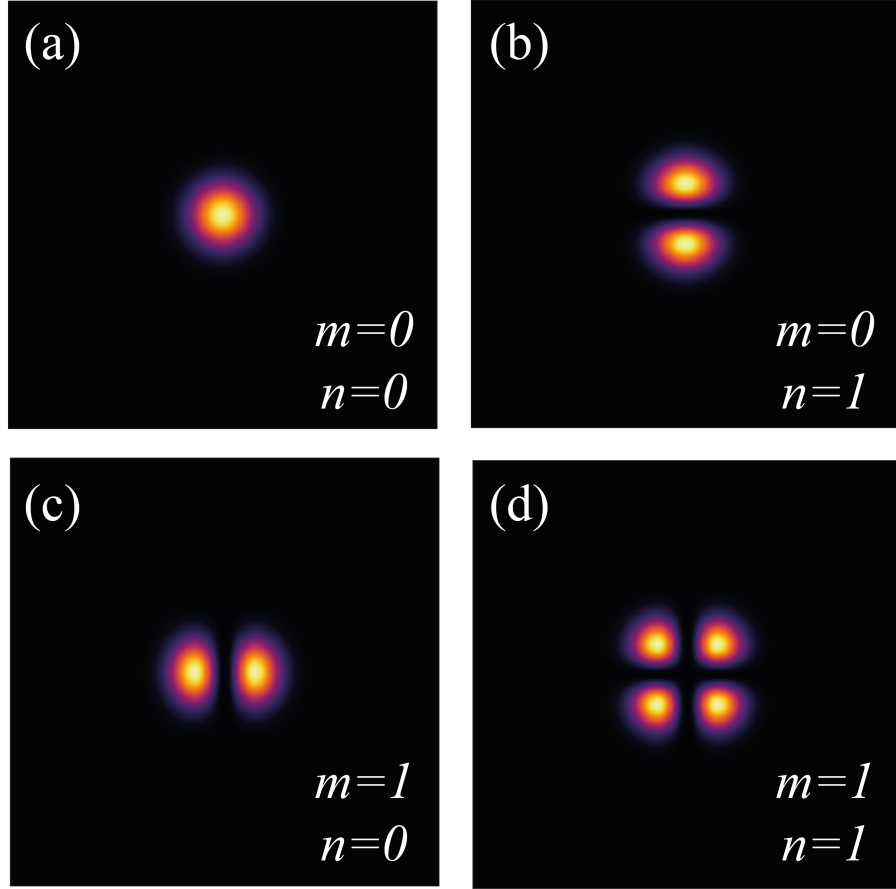
2.1.2 Feixes Hermite-Gauss

Outro conjunto de soluções são os feixes Hermite-Gauss (HG), que são obtidos quando a Equação 2.10 é resolvida em coordenadas cartesianas. Tais modos são expressos por:

$$\psi_{m,n}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_{m,n}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{i \left[k \frac{x^2+y^2}{2R(z)} - \Psi_{HG}(z) \right]}. \quad (2.12)$$

Na equação acima, $N_{m,n}$ é uma constante de normalização e $\Psi_{HG} = (m + n + 1) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy para feixes Hermite-Gauss, enquanto $w(z)$ e $R(z)$ já foram definidos anteriormente. A ordem do modo é dada pela soma $m + n$, e para ordem zero o feixe é reduzido ao modo Gaussiano. Algumas distribuições de intensidade para diferentes índices m e n podem ser vistas na Figura 2.1.

Figura 2.1: Distribuições de intensidade para os modos (a)HG₀₀, (b)HG₀₁, (c)HG₁₀ e (d)HG₁₁.

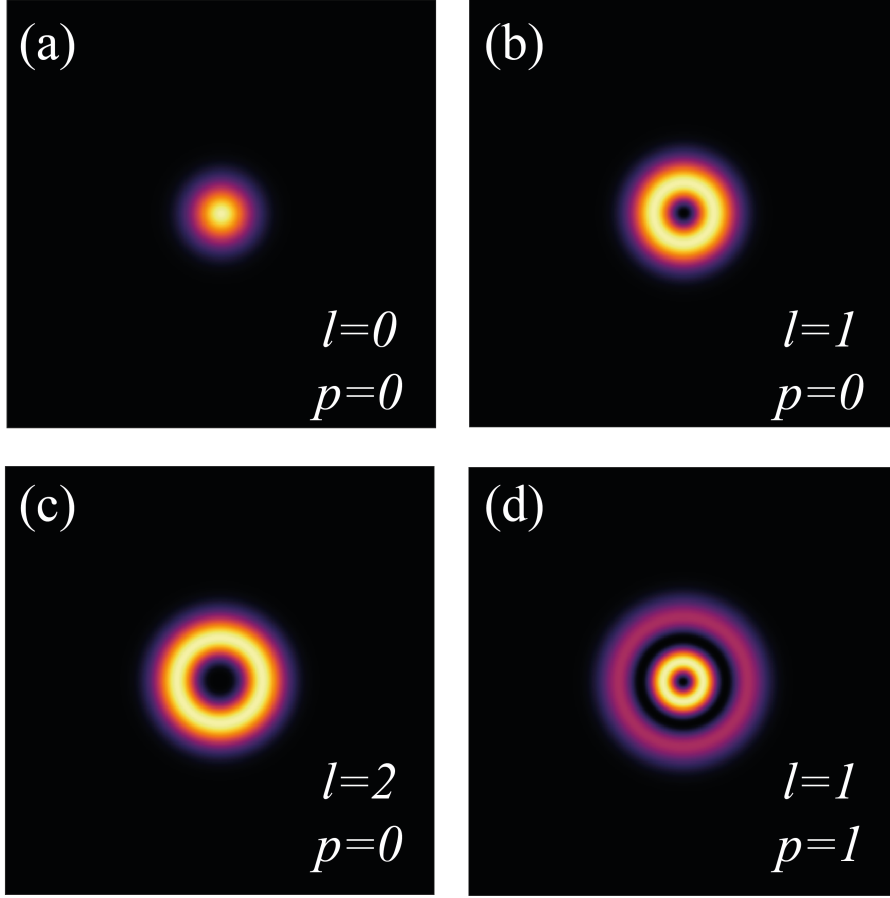


2.1.3 Feixes Laguerre-Gauss

Quando a equação paraxial da onda é resolvida em coordenadas cilíndricas, o conjunto de soluções obtidos correspondem aos feixes Laguerre-Gauss (LG). Conhecidos por terem um padrão de intensidade anelar, seus modos podem ser escritos como:

$$\psi_{pl}(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{p,l}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r^2}{w^2(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - \Psi_{LG}(z) + l\theta \right]}. \quad (2.13)$$

Aqui, a constante de normalização é dada por $M_{p,l}$ e a fase de Gouy para feixes LG por $\Psi_{LG}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan(z/z_R)$. Note que este modo carrega uma fase azimutal $l\theta$, onde o índice l é conhecido como carga topológica. Isso cria uma frente de onda helicoidal, cuja direção de rotação é determinada pelo sinal de l . Outra importante característica do parâmetro l é a determinação da quantidade de momento angular orbital (MAO) que o feixe carrega. Por outro lado, o índice p controla a quantidade de anéis externos que o feixe contém. Esse índice é de extrema importância para o presente trabalho e será mais explorado na Seção 3. A ordem do feixe LG é dada pela soma $2p + |l|$ e, assim como os modos HG, seu modo fundamental $p = l = 0$ é reduzido ao feixe Gaussiano. Alguns perfis de intensidade podem ser vistos na Figura 2.2, onde diferentes valores de p e l são considerados. Após serem apresentados por Allen *et. al.* em 1992 [3], os feixes LG foram vastamente estudados. Algumas aplicações importantes podem ser citadas, como sua utilização em pinças ópticas [66, 67, 6], transmissão de informação [68, 69] e protocolos quânticos [20, 23], por exemplo.

Figura 2.2: Distribuições de intensidade para os modos (a)LG₀₀, (b)LG₀₁, (c)LG₀₂ e (d)LG₁₁.

2.1.4 Feixes Ince-Gauss

Finalmente, os feixes Ince-Gauss (IG) são obtidos ao solucionar a equação paraxial da onda em coordenadas elípticas. Seus modos podem ser expressos por:

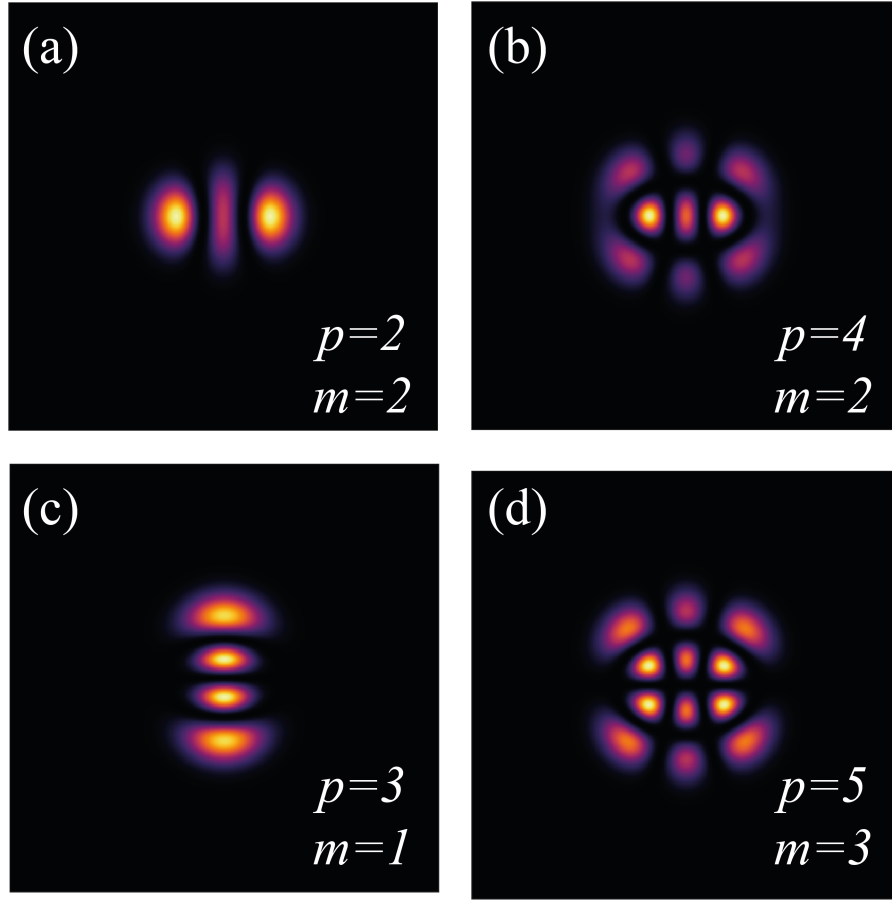
$$\psi_{p,m}^e(\xi, \eta, \epsilon) = \frac{C w_0}{w(z)} C_p^m(i\xi, \epsilon) C_p^m(\eta, \epsilon) e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i\left[\frac{kr^2}{2R(z)} - \Psi_{IG}(z)\right]}, \quad (2.14)$$

onde $C_{p,m}$ é uma constante de normalização, $\Psi_{IG}(z) = (p+1) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy para feixes Ince-Gauss e $C_p^m(\cdot, \epsilon)$ corresponde aos polinômios de Ince par de ordem p , grau m e excentricidade ϵ . Aqui, as coordenadas radiais e angulares elípticas são dadas por $\xi \in [0, \infty)$ e $\eta \in [0, 2\pi)$, respectivamente. Para obter o modo IG ímpar $\psi_{p,m}^o$, basta substituir o polinômio de Ince par $C_p^m(\cdot, \epsilon)$ pelo ímpar, dado por $S_p^m(\cdot, \epsilon)$ e alterar a constante de normalização por C pela ímpar S . Aqui, podemos definir a paridade de uma função da seguinte forma: uma função de valores reais $f(x)$ é par se $f(x) = f(-x)$ e ímpar se $f(x) = -f(-x)$. A Figura 2.3 mostra algumas distribuições de intensidade para feixes IG par e ímpar com diferentes índices p , m e excentricidade $\epsilon = 3$. É importante resaltar que quando a excentricidade ϵ tende a zero, os feixes IG convergem para modos LG com paridade definida, enquanto quando ϵ tende ao infinito, convergem para modos HG [45].

2.1.5 Fase de Gouy

Ao apresentarmos as três grandes famílias de soluções da equação paraxial da onda, nota-se que existe uma quantidade comum à todas elas: a fase de Gouy. Essa variação de fase se dá ao

Figura 2.3: Distribuições de intensidade para os modos (a) IG_{22}^e , (b) IG_{42}^e , (c) IG_{31}^o e (d) IG_{53}^o com excentricidade $\epsilon = 3$.



longo da propagação e pode ser expressa por $\Psi = (N + 1) \arctan(z/z_R)$, onde N é a ordem do modo associado. O intuito dessa subseção é apresentar uma interpretação física para esta anomalia de fase [70, 71, 72, 73, 74, 75].

Vamos então considerar uma onda monocromática com frequência ω e número de onda $k = \omega/c$ se propagando ao longo do eixo z . Para o caso de uma ondas plana, o momento, que é proporcional à k , está posicionado no eixo z e não tem componentes transversais. Assim, o espalhamento do momento transversal é nulo e, pelo princípio da incerteza ($\Delta x \Delta k_x \geq const.$), o espalhamento da posição transversal é infinito. Por outro lado, feixes finitos possuem espalhamento no momento transversal pois são formados por um espectro angular de ondas planas obtidas via transformada de Fourier. Portanto, para esse caso, o número de onda pode ser escrito como:

$$k = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (2.15)$$

onde k_i é a componente do vetor de onda ao longo da componente $i = x, y, z$. Devido ao espalhamento finito nas componentes do vetor de onda, vamos trabalhar com médias ou valores esperados definidos por:

$$\langle \xi \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi |f(\xi)|^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^2 d\xi}, \quad (2.16)$$

no qual $f(\xi)$ é a distribuição da variável ξ . Pela Equação 2.15 podemos definir uma constante

de propagação efetiva para um feixe finito como:

$$\bar{k}_z \equiv \frac{\langle k_z^2 \rangle}{k} = k - \frac{\langle k_x^2 \rangle}{k} - \frac{\langle k_y^2 \rangle}{k}. \quad (2.17)$$

A constante de propagação efetiva definida na Equação 2.17 está associada com a fase de propagação total $\Psi(z)$ através de $\bar{k}_z \equiv \partial\Psi(z)/\partial z$ [76]. O primeiro termo refere-se à fase kz de uma onda plana infinita se propagando ao longo do eixo z . Por sua vez, os últimos dois termos geram a fase de Gouy, dada por:

$$\Psi(z) = -\frac{1}{k} \int^z (\langle k_x^2 \rangle + \langle k_y^2 \rangle) dz. \quad (2.18)$$

Dessa forma, a fase de Gouy é o valor esperado da variação de fase longitudinal devido ao espalhamento de momento transversal.

2.1.6 Feixes paraxiais como bases ortonormais

Vale ressaltar que os modos HG, LG e IG apresentados anteriormente são ortonormais e formam famílias completas para expansão de um campo óptico arbitrário. Dessa forma, em qualquer plano z , podemos expressar um modo em termo dos outros. As expansões para os modos $LG \Leftrightarrow HG$ são dadas por [77, 78]:

$$LG_{pl}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} HG_{mn}(x, y); \quad (2.19)$$

$$HG_{mn}(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{pl} LG_{pl}(r, \theta); \quad (2.20)$$

onde os coeficientes das expansões acima são dadas por:

$$B_{mn} = \bar{B}_{pl} = i^m b \left(\frac{N+l}{2}, \frac{N-l}{2}, m \right) \quad (2.21)$$

se $2p + |l| = m + n$ e zero caso contrário, onde a barra representa tomar o complexo conjugado e os coeficientes $b(n', m', m)$ são definidos como:

$$b(n', m', m) = \sqrt{\frac{(n' + m' - m)! m!}{2^{n'+m'} n'! m'!}} \frac{1}{m!} \frac{d^{m'}}{dt^{m'}} \left[(1-t)^{n'} (1+t)^{m'} \right] \Bigg|_{t=0}. \quad (2.22)$$

Para uma expansão entre os modos $IG \Leftrightarrow LG$, obtemos as expressões [45]:

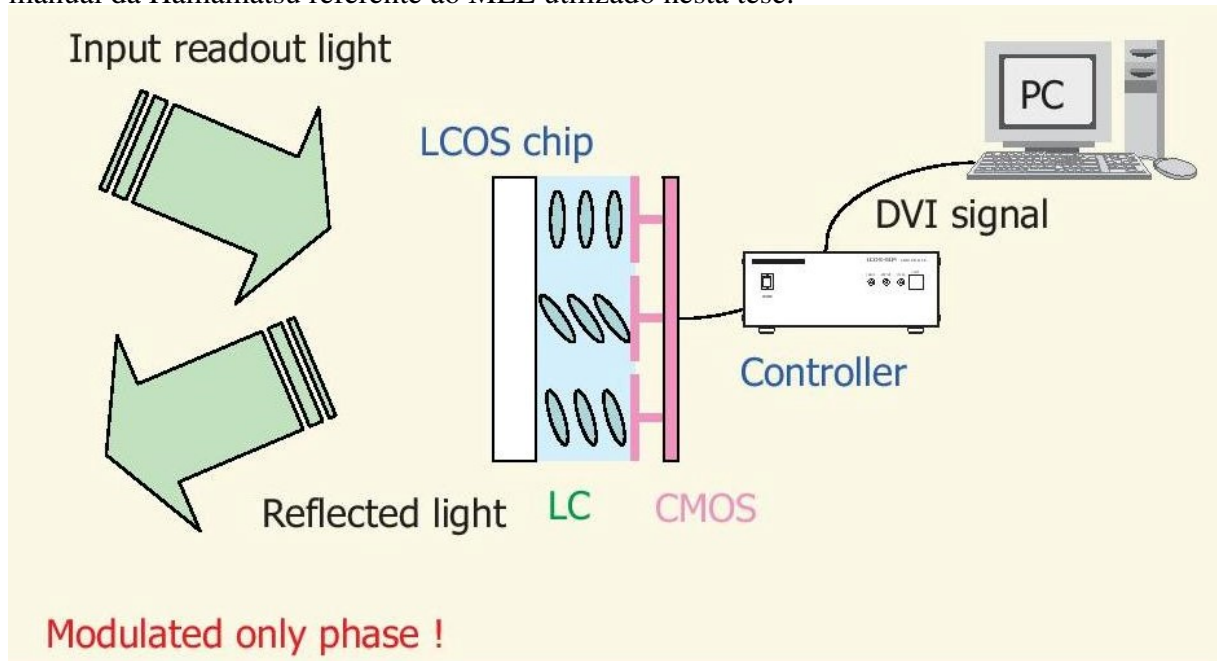
$$LG_{nl}^{\sigma}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m IG_{p=2n+l, m}^{\sigma}(\xi, \eta, \epsilon); \quad (2.23)$$

$$IG_{p, m}^{\sigma}(\xi, \eta, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_{nl} LG_{nl}^{\sigma}(r, \theta); \quad (2.24)$$

onde $\sigma = \{e, o\}$ é a paridade e os coeficientes D correspondem ao *overlap* entre os modos IG e LG e são obtidos aplicando técnicas de teoria de grupo [79], logo:

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} LG_{nl}^{\sigma} \bar{IG}_{pm}^{\sigma'} dS = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{p, 2n+l} (-1)^{n+l+(p+m/2)} \times \sqrt{(1 + \delta_{0,l}) \Gamma(n+l+1) n!} A_{(l+\delta_{\sigma, \sigma'})/2} (a_p^m), \quad (2.25)$$

Figura 2.4: Princípio de funcionamento de um modulador espacial de luz. Imagem retirada do manual da Hamamatsu referente ao MEL utilizado nesta tese.



no qual $A_{(l+\delta_{o,\sigma})/2}(a_p^m)$ é o $((l + \delta_{o,\sigma})/2)$ -ésimo coeficiente de Fourier dos polinômios de Ince C_p^m, S_p^m [45], com A sendo escalado a fim de satisfazer a condição de normalização $\sum_j D_j = 1$. Uma vez que sabemos as expansões para $IG \Leftrightarrow LG$, basta realizarmos a expansão em cascata de $LG \Leftrightarrow HG$ para obtermos as relações para $IG \Leftrightarrow HG$.

2.2 Modulador espacial da luz

A técnica de gerar hologramas é chamada holografia, que está relacionada à gravação e reconstrução de ondas ópticas. Inventada em 1948 por Denis Gabor, teve como objetivo melhorar a resolução do microscópio eletrônico [80], porém passou a ser mais explorada após a descoberta do *laser* em 1960. Como consequência, Gabor foi recompensado com o prêmio Nobel em 1971 [81].

No âmbito deste trabalho, diversas técnicas podem ser utilizadas para gerar os feixes anteriormente descritos [82, 83]. Em particular, é importante explicar brevemente a respeito do método aqui utilizado. O modulador espacial da luz (MEL) é um equipamento baseado em cristais líquidos que modula a fase de um feixe incidente. Os cristais líquidos são controlados via voltagem, onde uma diferença de potencial é aplicada a depender da modulação desejada. A Figura 2.4 mostra um esquema gráfico a fim de facilitar o entendimento de seu funcionamento. O MEL possui um controlador, o qual é conectado a um computador. Nele, através de um *software* que varia a depender da marca do MEL utilizado, é possível inserir o padrão de fase desejado. Assim, a luz refletida carregará o padrão desejado. Nesta tese foi utilizado o Modulador Espacial da Luz de Cristal Líquido em Silício (LCOS-SLM), produzido pela Hamamatsu.

2.3 Equação da onda na matéria

Ao analisarmos a interação da luz com a matéria, algumas alterações nas Equações de Maxwell são necessárias. Essa necessidade surge do meio em consideração ter contribuições no campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e indução magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Assim, faremos uso do deslocamento elétrico $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$, onde as equações de Maxwell serão reescritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho; \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (2.27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (2.29)$$

onde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$. Aqui, \vec{P} é o vetor polarização, \vec{M} é a densidade de momento magnético, ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo. Considerando soluções apenas em regiões sem cargas livres e sem correntes, $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, e assumindo que o meio em questão não é magnético, $\vec{M} = 0$, podemos calcular o rotacional da Equação 2.27 e obter:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (2.30)$$

onde as altas ordens do vetor polarização podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} P_i &= \varepsilon_0 \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \\ &\equiv \varepsilon_0 (P_i^L + P_i^{NL}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Na Equação 2.31, os termos $\chi^{(i)}$ são tensores de ordem $i + 1$ chamados de susceptibilidade óptica de ordem i . Assim, podemos separar as contribuições para o vetor polarização \vec{P} em parte linear, associado à susceptibilidade de primeira ordem $\chi^{(1)}$, e as demais contribuições, chamadas não-linear, contendo as demais ordens de $\chi^{(i)}$. As respostas não-lineares de segunda ordem são conhecidas por efeitos como, por exemplo, osciladores paramétricos ópticos [48], geração de segundo harmônico [46] e conversão espontânea paramétrica descendente [52]. Por outro lado, respostas de terceira ordem são conhecidos por estudos como formação de sólitons ópticos [84], efeito Kerr óptico [85] e instabilidade modulacional [86]. Neste trabalho iremos nos limitar a respostas não-lineares de segunda ordem $\chi^{(2)}$.

Alternativamente, podemos reescrever a Equação 2.30 da forma:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.32)$$

Pela Equação 2.31, ainda podemos utilizar $\vec{P} = \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{NL}$ e reescrever a expressão para o vetor deslocamento elétrico como $\vec{D} = \vec{D}^{(1)} + \vec{P}^{NL}$, no qual $\vec{D}^{(1)} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}^{(1)}$. Dessa forma, a Equação 2.32 se torna:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

Considerando um meio isotrópico, sem dispersão e sem perdas, podemos relacionar o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}^{(1)}$ e o campo elétrico \vec{E} em termos de um tensor dielétrico real e independente da frequência $\varepsilon^{(1)}$ da forma:

$$\vec{D}^{(1)} = \varepsilon_0 \varepsilon^{(1)} \vec{E}, \quad (2.34)$$

no qual $\varepsilon^{(1)}$ é a permissividade relativa, que é uma quantidade escalar, sem dimensão e é diferente para cada material. Neste caso mais simples, considerando um material isotrópico e sem dispersões, a Equação 2.33 se torna:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (2.35)$$

A equação acima pode ser vista como a equação da onda não-homogênea, onde o termo de polarização não-linear atua como uma fonte. Em sua ausência, as soluções da Equação 2.35 correspondem a ondas livres se propagando com velocidade c/n , onde $n = \sqrt{\varepsilon^{(1)}}$ é o índice de refração linear.

Por outro lado, ao considerarmos um meio dispersivo temos que separar a contribuição de cada componente de frequência. Dessa forma, representamos os campos elétrico, deslocamento elétrico linear e polarização como uma soma de várias frequências ω_n ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}'_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (2.36)$$

$$\vec{D}^{(1)}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{D}'_n^{(1)}(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (2.37)$$

$$\vec{P}^{NL}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{P}'_n^{NL}(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c.. \quad (2.38)$$

Assim, utilizando as Equações 2.36, 2.37 e 2.38, obtemos a expressão para o caso geral para a equação da onda não-homogênea:

$$\nabla^2 \vec{E}'_n(\vec{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega_n) \vec{E}'_n(\vec{r}) = -\frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{P}'_n^{NL}(\vec{r}), \quad (2.39)$$

onde o tensor dielétrico é dado por $\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega_n) = 1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega_n)$.

2.4 Processos não-lineares de segunda ordem

Como dito anteriormente, esta tese tem como prioridade estudar efeitos não-lineares de segunda ordem. A susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(2)}$ é um tensor que relaciona o vetor polarização não-linear com os campos elétricos,

$$P_i^{(2)}(\omega_m + \omega_n) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_m + \omega_n, \omega_m, \omega_n) E_j(\omega_m) E_k(\omega_n), \quad (2.40)$$

onde as frequências dos campos ω_m e ω_n , mesmo que assumam valores diferentes, devem manter fixa a quantidade $\omega_m + \omega_n$. Os tensores susceptibilidade têm suas formas restringidas pelas propriedades de simetria do meio óptico em questão. Em particular, o tensor susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(2)}$ possui simetrias características, como:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_n - \omega_m, -\omega_n, -\omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)*}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m), \quad (2.41)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_m, \omega_n), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) \\
&= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \\
&= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \\
&\text{e } \chi_{ijk}^{(2)} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Aqui, temos a simetria causada pela condição de realidade dos campos (Equação 2.41), permutação intrínseca (Equação 2.42) e conservação de energia (Equação 2.43). Além disto, como o meio é aproximadamente sem perdas quando as frequências das ondas são muito menores do que a frequência de ressonância do material, podemos permutar simultaneamente as frequências com os índices i, j, k . Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \\
&= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) = \chi_{kji}^{(2)}(\omega_2 = -\omega_1 + \omega_3) \\
&= \chi_{jik}^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Contudo, como $\chi^{(2)}$ não depende de fato das frequências nas condições apresentadas, podemos rescrever a simetria dada pela Equação 2.44 alterando os índices i, j, k sem permutar as frequências. Portanto,

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\
&= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\
&= \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

O resultado apresentado na Equação 2.45 é conhecido como condição de simetria de Kleinman, e é válida sempre que a dispersão da susceptibilidade pode ser desprezada. Quando esta condição é válida, é comum utilizar uma notação reduzida para o tensor susceptibilidade. Suprimindo os argumentos referentes às frequências, iremos introduzir o tensor:

$$d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}, \tag{2.46}$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ é consequência de uma convenção histórica. Sempre que a condição de Kleinman for satisfeita, o tensor d_{ijk} é simétrico nos dois últimos índices, podendo assim ser simplificada para d_{il} . Assim, para direções fixas de propagação e polarização, é possível expressar a polarização não-linear em termos do valor efetivo de d , que origina a geração de soma de frequências através de

$$P(\omega_3) = 4d_{eff}E(\omega_1)E(\omega_2), \tag{2.47}$$

e para a geração de segundo harmônico,

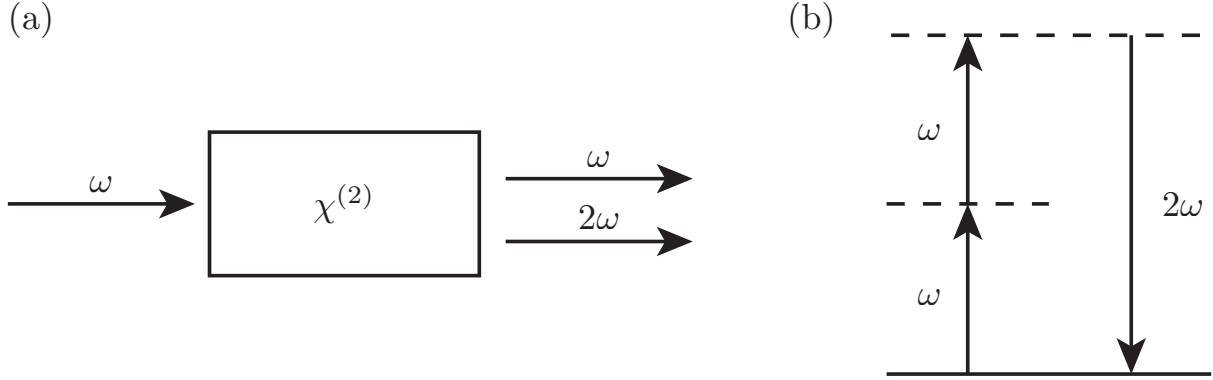
$$P(2\omega) = 2d_{eff}E^2(\omega). \tag{2.48}$$

Detalhes no cálculo de d_{eff} pode ser encontrado em Midwinter e Warner [87].

Para exemplificar como os processos não-lineares de segunda ordem ocorrem, vamos assumir dois feixes colimados e monocromáticos com frequências ω_1 e ω_2 , ambos se propagando no eixo z , incidindo sobre um material não-linear de casamento de fase tipo II com polarizações ortogonais entre si. Podemos escrever os campos elétricos incidentes \vec{E}_1 e \vec{E}_2 como:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(t) &= A_1 e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \hat{e}_1 + c.c. \\
\vec{E}_2(t) &= A_2 e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \hat{e}_2 + c.c.,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Figura 2.5: Esquema para o processo de geração de segundo harmônico. (a) Diagrama da interação. (b) Descrição dos níveis de energia.



onde A_i é a amplitude, k_i é o vetor de onda e \hat{e}_i a polarização do feixe $i = 1, 2$. Portanto, a polarização não-linear de segunda ordem será:

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} [A_1^2 e^{-i2\omega_1 t} + A_2^2 e^{-i2\omega_2 t} + 2A_1 A_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2A_1 A_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.] + 2\epsilon_0 \chi^{(2)} [A_1 A_1^* + A_2 A_2^*]. \quad (2.50)$$

Aqui, podemos identificar os vários processos de mistura de ondas em meios não-lineares de segunda ordem, como a geração de segundo harmônico ($2\omega_i$), geração de soma de frequências ($\omega_1 + \omega_2$), geração de diferença de frequências ($\omega_1 - \omega_2$) e retificação óptica ($\omega_i = 0$). As Figuras 2.5, 2.6, 2.7 mostram um esquema ilustrativo, junto com a descrição de níveis de energia, para os processos anteriormente citados.

Figura 2.6: Esquema para o processo de geração de soma de frequência. (a) Diagrama da interação. (b) Descrição dos níveis de energia.

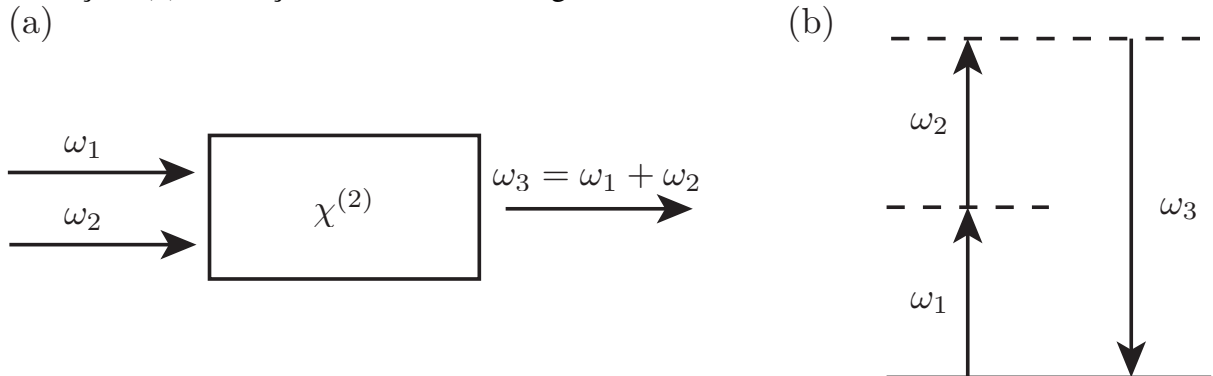
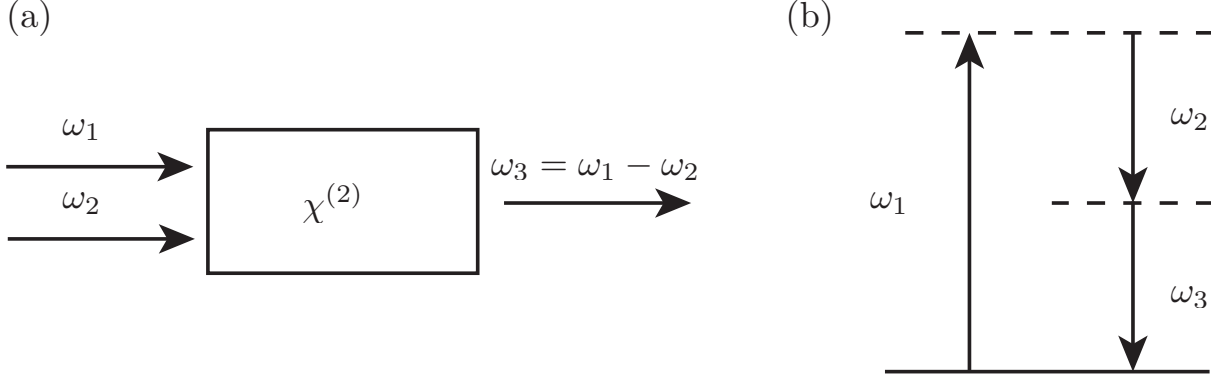


Figura 2.7: Esquema para o processo de geração de diferença de frequência. (a) Diagrama da interação. (b) Descrição dos níveis de energia.



2.5 Mistura de ondas com vórtices ópticos

Agora que a base teórica para o entendimento do processo de mistura não-linear de duas ondas foi apresentada, iremos seguir em frente rumo ao foco principal desta tese. Nesta seção iremos considerar feixes carregando MAO, e estudar como o processo de mistura de ondas ocorre ao considerá-los. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados na Ref [88], cujo trabalho serviu como base para os resultados a serem apresentados nesta tese.

Vamos considerar os campos interagentes como sendo:

$$\vec{E}_\mu = U_\mu e^{i(k_\mu z - \omega_\mu t)} \hat{e}_\mu, \quad (2.51)$$

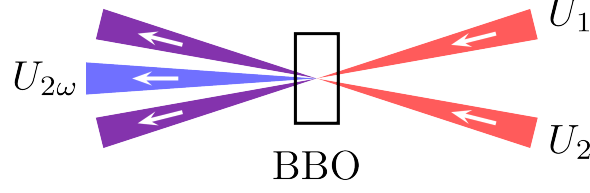
$$U_\mu = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{n_\mu}} \sum_{p,l} A_{pl}^\mu(z) u_{pl}^\mu(\vec{r}, z), \quad (2.52)$$

onde $\mu = 1, 2, 2\omega$ são os índices correspondentes aos feixes iniciais 1, 2 e ao feixe gerado através da mistura de ondas (2ω). Note que estamos expandindo os campos iniciais em termos de uma base ortonormal arbitrária $u_{pl}^\mu(\vec{r})$ que, neste caso, serão os modos LG já apresentados anteriormente na Seção 2.1, expressos pela Equação 2.13. Aqui, $A_{pl}^\mu(z)$ é a amplitude referente à cada modo da expansão na Equação 2.52. É importante ressaltar que a escolha dos modos ortonormais da expansão na Equação 2.52 é arbitrário. Nos Capítulos 4 e 5, por exemplo, iremos considerar modos HG e IG, respectivamente, para a realização do processo de mistura de ondas. A Figura 2.8 apresenta um esquema para uma melhor visualização do processo não-linear em questão. Podemos concluir que dois processos não-lineares ocorrem aqui: geração de segundo harmônico e geração de soma de frequências. O campo que estamos interessado é o gerado por soma de frequências, que carrega a informação dos dois feixes incidentes.

Assim, fazendo uso de $k_\mu^2 = n_\mu \omega_\mu / c$ e assumindo que os campos satisfazem a condição de casamento de fase ($k_{2\omega} = k_1 + k_2$), podemos reescrever a Equação 2.39 na aproximação paraxial como:

$$\begin{aligned} \nabla_\perp^2 U_1 + 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} &= -\frac{\chi \omega^2}{c^2} U_{2\omega} U_2^*, \\ \nabla_\perp^2 U_2 + 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} &= -\frac{\chi \omega^2}{c^2} U_{2\omega} U_1^*, \\ \nabla_\perp^2 U_{2\omega} + 2ik_{2\omega} \frac{\partial U_{2\omega}}{\partial z} &= -4 \frac{\chi \omega^2}{c^2} U_1 U_2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Figura 2.8: Esquema para o processo de mistura não-linear de duas ondas.



Ao substituírmos a Equação 2.52 no sistema de Equações 2.53, obtemos um conjunto de equações acopladas para a amplitude $A_{pl}^\mu = A_{pl}^\mu(z)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{dA_{pl}^1}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''} A_{p'l'}^{2\omega} (A_{p''l''}^2)^*, \\ \frac{dA_{pl}^2}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''} A_{p'l'}^{2\omega} (A_{p''l''}^1)^*, \\ \frac{dA_{pl}^{2\omega}}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} (\Lambda_{pp'p''}^{l'l''})^* A_{p'l'}^1 A_{p''l''}^2.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Aqui, introduzimos os seguintes parâmetros para simplificar as expressões:

$$g = \frac{\chi}{2c} \sqrt{\frac{2\omega^3}{n_1 n_2 n_{2\omega}}} R_{000}^{000}, \quad (2.55)$$

$$\Lambda_{pp'p''}^{l'l''} = \frac{R_{pp'p''}^{l'l''}}{R_{000}^{000}}, \quad (2.56)$$

$$R_{pp'p''}^{l'l''} = \int u_{pl}^{2\omega} (u_{p'l'}^1)^* (u_{p''l''}^2)^* d^2\vec{r}, \quad (2.57)$$

onde $R_{pp'p''}^{l'l''}$ é chamada de integral de *overlap*, e $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ de *integral de overlap normalizada*. A evolução das amplitudes de cada componente da expansão na Equação 2.52 é descrita pela Equação 2.54 e, com base nas grandezas experimentais, podemos ignorar tanto as perdas não-lineares, $\chi = \chi^*$, quanto a fase de Gouy adquirida na propagação ao longo do cristal, $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''} = (\Lambda_{pp'p''}^{l'l''})^*$. Nesta aproximação, assumimos que o cristal é fino (3 mm) comparado com o comprimento de Rayleigh dos feixes interagentes (aproximadamente 20 cm).

Podemos afirmar que atuação de $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ é extremamente importante no processo de mistura por duas ondas, já que, como veremos mais à frente, ela age como seletor dos modos que vão ser criados no cristal não-linear. Vamos então, inicialmente, considerar que os feixes incidentes não possuem ordens radiais ($p' = p'' = 0$) e que os mesmos carregam MAO com cargas topológicas l' e l'' , respectivamente. Assim, vamos analisar como $\Lambda_{p00}^{l'l''}$ atua considerando duas situações: quando os vórtices incidentes co-rotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$) e contra-rotacionam ($l' \cdot l'' < 0$).

Para o caso em que as cargas topológicas dos feixes incidentes têm o mesmo sinal (vórtices co-rotacionando), a integral de *overlap* normalizada resultará em:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{\xi_h^{|l'|} \xi_v^{|l''|} (|l'| + |l''|)!}{|l'|! |l''|!}}, \quad (2.58)$$

para $p = 0$ e zero para os outros casos. Aqui, $\xi_\mu = (w_{2\omega}/w_\mu)^2$ foi utilizado para simplificação dos termos. Portanto, isso indica que o MAO é conservado ($l = l' + l''$) e nenhuma ordem radial adicional é criada ($p = 0$).

Por outro lado, quando as cargas topológicas dos feixes incidentes possuem sinais contrários (vórtices contra-rotacionando), a integral de *overlap* normalizada resulta em:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \frac{(-1)^P}{(P-p)!} \sqrt{\frac{\xi_h^{|l'|} \xi_v^{|l''|} |l'!| |l''!|}{p!(p+|l'+l''|)!}}, \quad (2.59)$$

para $p \leq P$ e zero para os outros casos. Neste caso, $P = \min(|l'|, |l''|)$ irá reger o valor máximo para as novas ordem radiais a serem criadas. Portanto, para vórtices contra-rotacionando, devemos observar ordens radiais adicionais no campo gerado através da mistura por duas ondas. Assim, como para vórtices co-rotacionando nenhuma ordem radial é criada, iremos nos concentrar no caso em que os vórtices contra-rotacionam. Detalhes a cerca da derivação das Equações 2.58 e 2.59 podem ser encontrados no Apêndice A.

Para a análise da criação de ordens radiais adicionais no processo de mistura por duas ondas envolvendo vórtices que contra-rotacionam, vamos considerar que $l' = m$ e $l'' = n$, onde os modos iniciais são A_{0m}^1 e A_{0n}^2 , respectivamente. Podemos ainda assumir que $|m| < |n|$. Assim, as equações acopladas que descrevem a dinâmica não-linear podem ser reescritas como:

$$\frac{dA_{0m}^1}{dz} = ig A_{0n}^{2*} \sum_{p=0}^{|m|} \Lambda_{p00}^{lmn} A_{pl}^{2\omega}, \quad (2.60)$$

$$\frac{dA_{0n}^2}{dz} = ig A_{0m}^{1*} \sum_{p=0}^{|m|} \Lambda_{p00}^{lmn} A_{pl}^{2\omega}, \quad (2.61)$$

$$\frac{dA_{pl}^{2\omega}}{dz} = ig \Lambda_{p00}^{lmn} A_{0m}^1 A_{0n}^2 \quad (0 \leq p \leq |m|). \quad (2.62)$$

Na equação 2.62, quando $p = 0$, teremos:

$$\frac{dA_{0l}^{2\omega}}{dz} = ig \Lambda_{000}^{lmn} A_{0m}^1 A_{0n}^2. \quad (2.63)$$

Portanto, podemos reescrever a Equação 2.62 em termos da amplitude do campo gerado de ordem radial nula $A_{0l}^{2\omega}$, levando à:

$$\frac{dA_{pl}^{2\omega}}{dz} = \frac{\Lambda_{p00}^{lmn}}{\Lambda_{000}^{lmn}} \frac{dA_{0l}^{2\omega}}{dz}. \quad (2.64)$$

Assumindo que o campo gerado é inicialmente nulo [$A_{pl}^{2\omega}(z=0) = 0$], obtemos:

$$A_{pl}^{2\omega}(z) = \frac{\Lambda_{p00}^{lmn}}{\Lambda_{000}^{lmn}} A_{0l}^{2\omega}(z). \quad (2.65)$$

Ao compararmos as Equações 2.65 e 2.52 fica claro que a integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ atua como um seletor de modos para o campo gerado pelo processo não-linear, pois a mesma irá filtrar quais modos u_{pl}^μ serão criados na superposição de campo gerado. Portanto, para o caso em que os modos iniciais têm cargas topológicas com sinais opostos e não possuem ordens radiais, o cristal não-linear irá selecionar os modos de ordem p até $P = \min(|l'|, |l''|)$. Veremos no Capítulo 3 o comportamento geral para a mistura de duas ondas para vórtices ópticos, considerando ordens radiais iniciais arbitrárias e carregando cargas topológicas fracionárias.

2.6 Resumo do capítulo

Neste capítulo foi mostrado uma introdução teórica para o entendimento do processo de mistura por duas ondas. Partindo das equações de Maxwell, mostramos soluções da equação paraxial da onda que são importantes para os resultados que serão apresentados. Ao analisarmos a equação paraxial da onda na matéria é possível estudar os chamados efeitos não-lineares que, dentro do interesse da presente tese, focamos nos efeitos não-lineares de segunda ordem. Os processos de geração de segundo harmônico e de geração de soma de frequências foram apresentados ao considerar dois campos iniciais, levando a vários termos na polarização não-linear de segunda ordem. Finalmente, consideramos vórtices ópticos como campos iniciais. Analisando a dinâmica dos feixes interagentes pelas equações acopladas na aproximação paraxial, apresentamos a integral de *overlap* normalizada. Ela, por sua vez, tem uma atuação muito importante no processo de mistura por duas ondas agindo como um seletor de modos na superposição de campos gerados no processo não-linear. Portanto, no próximo capítulo apresentaremos um comportamento geral da mistura não-linear de vórtices ópticos ao considerar feixes iniciais contendo ordens radiais não-nulas e carregando cargas topológicas fracionárias.

Capítulo 3

Mistura de feixes Laguerre-Gauss

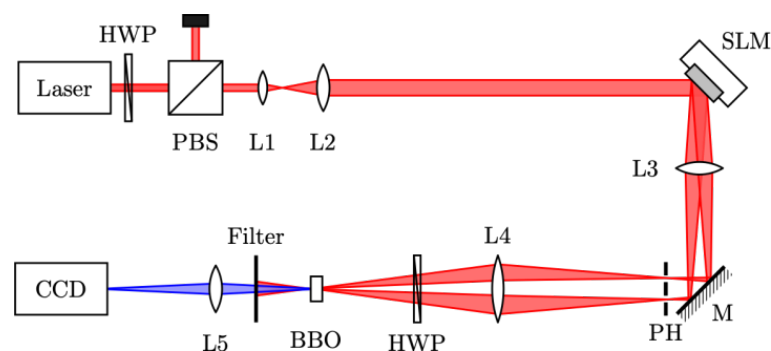
Neste capítulo apresentaremos os resultados referentes ao processo de mistura não-linear de duas ondas utilizando feixes LG. Primeiramente, introduziremos na Seção 3.1 o aparato experimental que foi utilizado para obter todos os resultados presentes nesta tese. Na Seção 3.2 vamos considerar como feixes iniciais modos LG carregando cargas topológicas arbitrárias e ordens radiais não-nulas. Nesta seção discutiremos mais profundamente a criação de anéis adicionais na zona de Fraunhofer. Posteriormente, na Seção 3.3, trataremos da mistura de dois feixes carregando cargas topológicas fracionárias. Mostraremos o nascimento de um vórtice e a criação das ordens radiais adicionais através do processo não-linear já apresentado anteriormente.

3.1 Aparato experimental

Particularmente, nesta seção iremos considerar como campos iniciais feixes LG carregando cargas topológicas arbitrárias e ordens radiais não-nulas. Por outro lado, o aparato experimental utilizado foi o mesmo para todos os resultados presentes nesta tese e, portanto, iremos iniciar esta seção descrevendo-o.

Foi utilizado como aparato experimental um *laser* de Ti:Safira pulsado com comprimento de onda 780 nm, que ilumina um MEL gerando os dois feixes iniciais desejados. Como dito anteriormente, nesta seção iremos utilizar feixes LG carregando cargas topológicas arbitrárias e ordens radiais não-nulas. Para gerar os feixes iniciais utilizamos hologramas gerados computacionalmente [89, 90], implementando também uma fase linear em cada um dos feixes gerados

Figura 3.1: Esquema do aparato experimental utilizado para os resultados a serem apresentados. Aqui, SLM corresponde ao Modulador Espacial da Luz, HWP corresponde à placa de meia-onda, PBS ao divisor de feixe polarizado, M ao espelho, PH à íris e CCD à câmera de cargas acopladas.



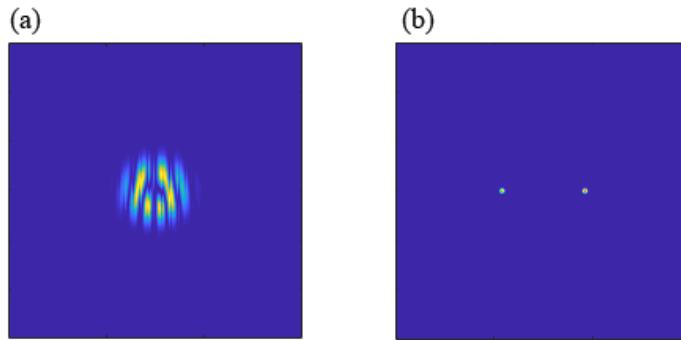
no MEL. Com isso, os feixes se afastam ao longo da propagação. Este método é útil para experimentos em que é necessário garantir que o caminho percorrido pelos dois feixes sejam iguais. Em trabalhos anteriores é comum notar o uso de um suporte móvel com espelhos em um dos braços do experimento para o ajuste de caminho percorrido [55], porém, com o método aqui utilizado, garantimos que os feixes percorrem caminhos equidistantes após suas criações no MEL. Assim, ambos os feixes iniciais passam por uma placa de meia-onda (HWP) a fim de obter máxima eficiência no processo de mistura de ondas. Para isso, foi utilizado um cristal não-linear de Borato de Bário (BBO) do tipo I. Após a interação não-linear, separamos o feixe de interesse com um filtro espectral e capturamos sua distribuição de intensidade na zona de Fraunhofer com uma câmera de cargas acopladas (CCD). Para melhor visualização, um esquema do aparato experimental utilizado nesta tese pode ser visto na Figura 3.1.

Vamos agora exemplificar a implementação da fase linear nos hologramas utilizados nessa tese. Se queremos gerar dois modos iniciais $U_1 = \text{LG}_{01}$ e $U_2 = \text{LG}_{0-1}$, escrevemos então o campo a ser implementado:

$$U_{SLM} = \text{LG}_{01}e^{i2\pi(u_0x+v_0y)} + \text{LG}_{0-1}e^{i2\pi(-u_0x+v_0y)}, \quad (3.1)$$

onde (u_0, v_0) e $(-u_0, v_0)$ são as coordenadas de deslocamento que a fase linear atuará em cada campo LG. Apesar dos campos iniciais estarem sobrepostos no plano do MEL, quando analisarmos a distribuição de intensidade no plano focal de uma lente arbitrária (transformada de Fourier, pelo ponto de vista matemático) os campos estarão espacialmente separados. Na Figura 3.2 podemos observar a distribuição de intensidade dos feixes iniciais nos planos do MEL e focal de uma lente.

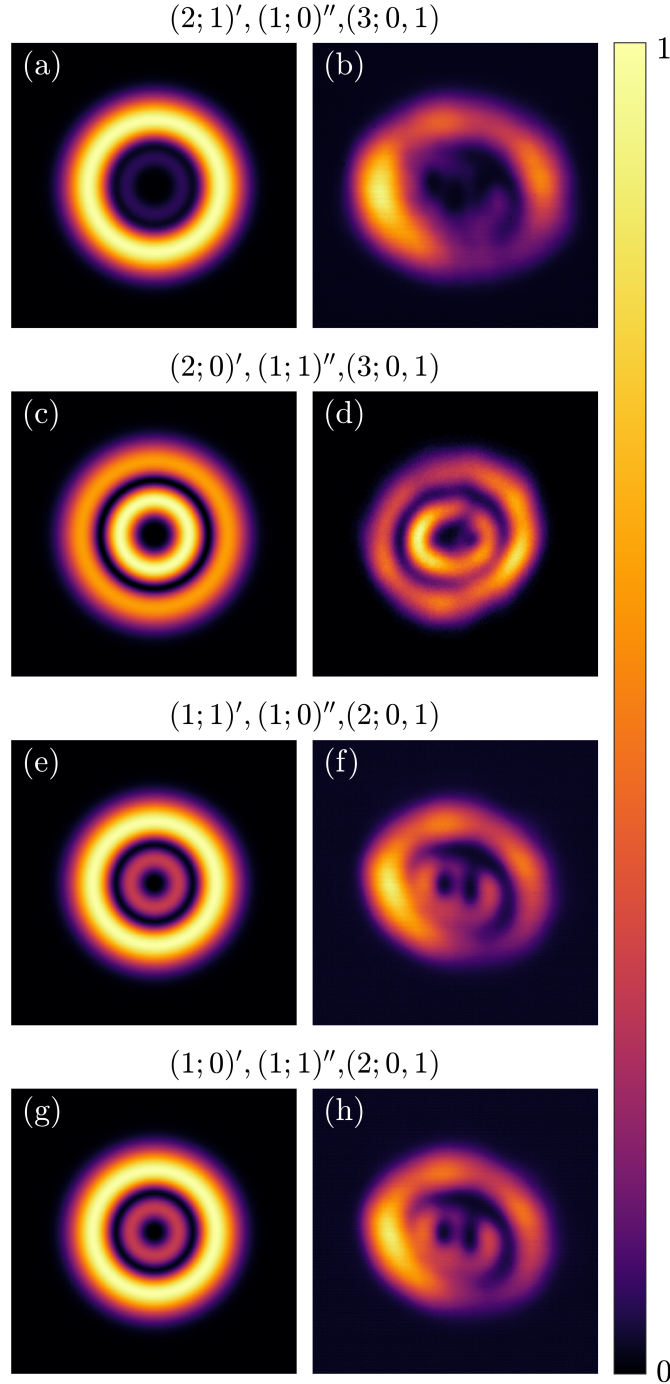
Figura 3.2: Distribuições de intensidade teóricas exemplificando a geração de dois campos iniciais $U_1 = \text{LG}_{01}$ e $U_2 = \text{LG}_{0-1}$ (a) no plano do MEL e (b) sua transformada de Fourier, ou plano focal de uma lente convexa.



3.2 Mistura de feixes Laguerre-Gauss com ordens radiais não-nulas

Vimos no Capítulo 2 uma base teórica necessária para a compreensão dos resultados a serem discutidas nesta tese. Para os resultados presentes nos Capítulos 3, 4 e 5, foram realizadas simulações computacionais e experimento com o intuito de validar as previsões teóricas. De uma forma geral, em cada futura seção calcularemos a integral de recobrimento normalizada referente ao feixe incidente em questão e realizaremos a propagação da superposição de modos

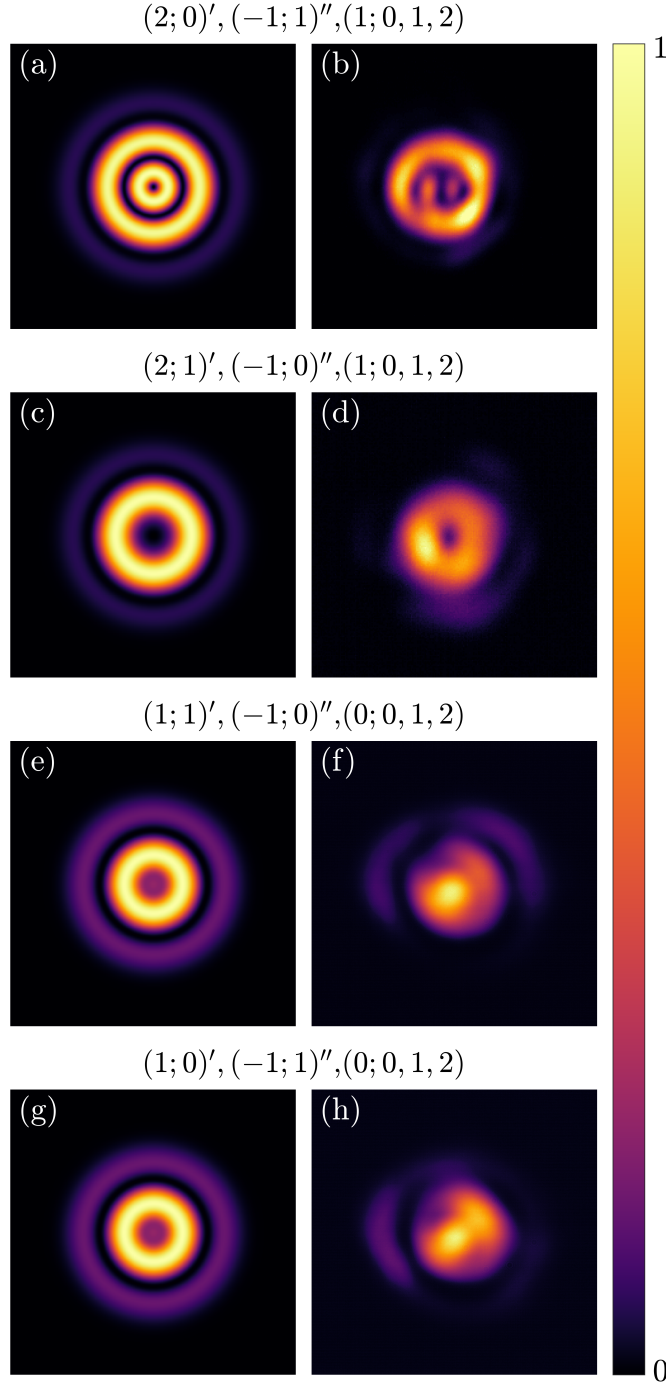
Figura 3.3: Distribuições de intensidade teórico (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices co-rotacionando. Aqui, os índices $(l'; p)'$, $(l''; p)''$ referem-se aos campos iniciais U_1 , U_2 , respectivamente, e $(l; p)$ ao campo gerado em $U_{2\omega}$.



resultante até a zona de Fraunhofer, obtendo assim a distribuição de intensidade de seu campo distante.

Agora, focaremos nas seleções de modos vindo da integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ para a mistura não-linear de feixes LG carregando cargas topológicas l', l'' e ordens radiais p', p'' , respectivamente. Inicialmente, para vórtices co-rotacionando ($l' \cdot l'' \geq 0$) interagindo no

Figura 3.4: Distribuições de intensidade teórico (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices contra-rotacionando. Aqui, os índices $(l'; p)'$, $(l''; p)''$ referem-se aos campos iniciais U_1 , U_2 , respectivamente, e $(l; p)$ ao campo gerado em $U_{2\omega}$.



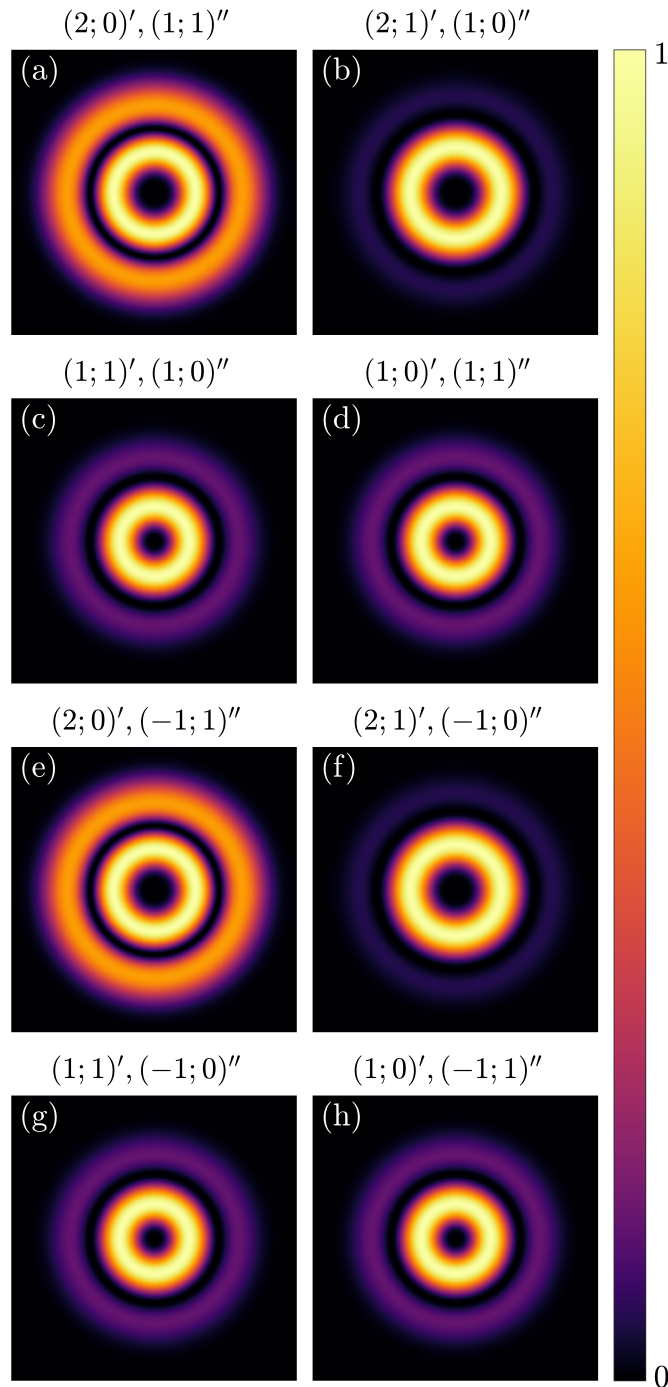
crystal não-linear, a integral de *overlap* normalizada será:

$$\Lambda_{pp'p''}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_v^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \quad (3.2)$$

$$\times \frac{(-1)^{m+n}(m+n)! (|l'+l''|+m+n)!}{m!n!(p'-m)!(p''-n)! (|l'|+m)! (|l''|+n)! (m+n-p)!}$$

para $p \leq p'+p''$ e zero para os outros casos. Portanto, pela equação 3.2, esperamos que o campo

Figura 3.5: Distribuições de intensidade teóricas para o campo próximo associado às Figuras 3.2 (a-d) e 3.3 (e-h). Aqui, os índices $(l'; p')$, $(l''; p'')$ referem-se aos campos iniciais U_1 , U_2 , respectivamente.



gerado será uma superposição de modos com carga topológica ($l = l' + l''$) e ordens radiais até $p = p' + p''$. Note que, quando os feixes iniciais não possuem ordens radiais ($p' = p'' = 0$), o campo gerado não possui ordens radiais adicionais.

Se vórtices contra-rotacionando ($l' \cdot l'' < 0$) são utilizados como feixes iniciais, a integral

de *overlap* normalizada será:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = \delta_{l,|l'+l''|} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_v^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \quad (3.3)$$

$$\times \frac{(-1)^{m+n+P}(P+m+n)! (|l'+l''|+P+m+n)!}{m!n!(p'-m)!(p''-n)! (|l'|+m)! (|l''|+n)! (P+m+n-p)!},$$

para $p \leq P + p' + p''$ e zero para os demais casos. Como apresentado no Capítulo 2, $\xi_\mu = (w_{2\omega}/w_\mu)^2$ e $P = \min(|l'|, |l''|)$. Agora, quando feixes com helicidades opostas são utilizados como campos iniciais esperamos observar ordens radiais adicionais até a soma do valor mínimo entre $|l'|$ e $|l''|$ com as ordens radiais iniciais. Se $p' = p'' = 0$, devemos observar um número de anéis adicionais até P , como apresentado anteriormente. A derivação detalhada das Equações 3.2 e 3.3 se encontra no Apêndice A.

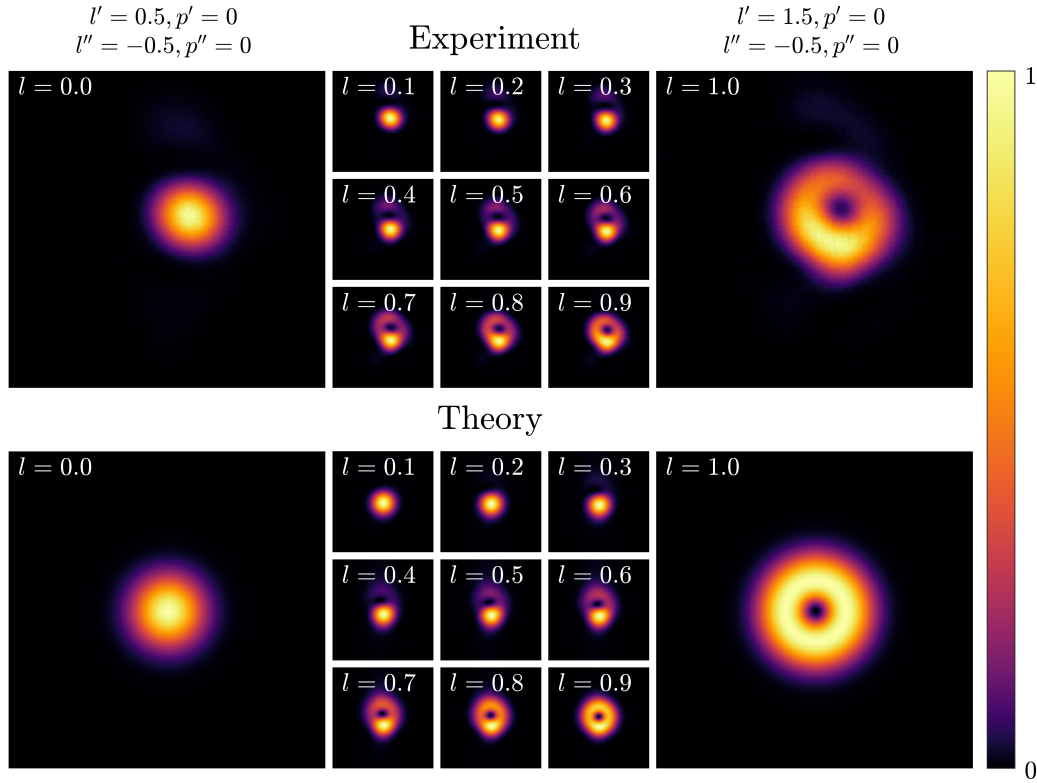
Analizando os resultados das integrais de *overlap* normalizadas descritas pelas Equações 3.2 e 3.3, fica claro que o número de anéis adicionais também depende das ordens radiais dos feixes iniciais. A fase de Gouy adquirida por cada modo na superposição gerada pelo processo de mistura de ondas produzem as distribuições de intensidade apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.4, que correspondem a vórtices co-rotacionando e contra-rotacionando, respectivamente. Os resultados teóricos são apresentados nas colunas da esquerda de cada figura, enquanto os resultados experimentais estão na coluna da direita. Aqui, os índices dos modos são referenciados como $(l'; p')$, $(l''; p'')$ para os campos iniciais U_1 , U_2 , respectivamente, e $(l; p)$ para a superposição de modos gerada em $U_{2\omega}$. Singularidades ópticas com $|l| > 1$ são conhecidos por serem estáveis em sistemas altamente simétricos, e pequenas perturbações podem separá-los em singularidades com força $l = 1$. Tais perturbações são geralmente presentes em ambientes experimentais, e os pontos de singularidade podem ser facilmente vistos na Figura 3.3, que se somam e resultam no valor esperado para $|l|$ devido à conservação de MAO ($l = l' + l''$). Para mostrar a diferença entre a distribuição de intensidade do campo próximo e distante, podemos ver na Figura 3.5 o perfil de intensidade teórico do campo próximo dos feixes misturados aqui considerados.

Contudo, um comportamento interessante surge aqui. Ao analisarmos as Figuras 3.4 (c,d) podemos ver que o número de anéis adicionais não corresponde ao esperado, que seria $p \leq 2$ como nas Figuras 3.4 (a,b). Porém, mesmo que para os dois casos apresentados na Figura 3.4 temos carga topológica $l = 2$ e ordens radiais adicionais $p \leq 2$, a integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{ll''}$ assume valores diferentes em cada caso. Da mesma forma, podemos ver nas Figuras 3.3 (a,b) e (c,d) que obtemos diferentes distribuições de intensidade na zona de Fraunhofer para o caso em que os vórtices iniciais co-rotacionam. Isso faz com que a superposição de modos seja diferente, mesmo que a regra de seleção seja a mesma e os campos próximos tenham mesmas distribuições de intensidade. Podemos notar pelos fatoriais nas Equações 3.2 e 3.3 e pelas Figuras 3.3 (a,b,c,d) e 3.4 (a,b,c,d) que esse comportamento surge sempre que $|l'| \neq |l''|$. Logo, como conclusão podemos afirmar que apesar de termos uma superposição de modos $p \leq 2$, nem sempre iremos obter o mesmo padrão de intensidade do campo gerado $U_{2\omega}$ na zona de Fraunhofer.

3.3 Mistura de feixes Laguerre-Gauss com cargas topológicas fracionárias

Podemos ainda expandir mais a análise da mistura não-linear de duas ondas utilizando vórtices ópticos. Até então, foram considerados apenas feixes ópticos carregando um valor de

Figura 3.6: Distribuições de intensidade experimentais (superior) e teóricas (inferior) na zona de Fraunhofer mostrando o nascimento de um vórtice.



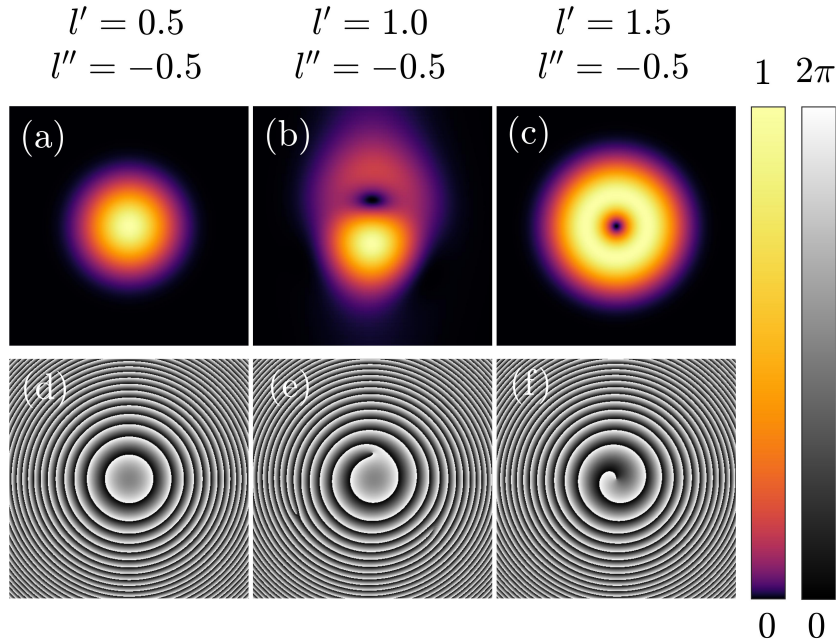
carga topológico inteiro. Porém, como mostrado por Berry [37], é possível ainda considerar feixes carregando MAO fracionário. Com isso, foi mostrado que o nascimento de um vórtice no campo distante se dá quando o valor da carga topológica assume valores inteiros [38]. Dentro do contexto da mistura não-linear de duas ondas, iremos considerar agora a interação de dois vórtices ópticos carregando cargas topológicas fracionárias. Novas regras de seleção de modos são analiticamente derivadas a partir da integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$ para demonstrar teoricamente e experimentalmente o nascimento de um vórtice através do processo de mistura de ondas, assim como a formação passo a passo de ordens radiais adicionais na zona de Fraunhofer.

Seguindo o modelo teórico já apresentado anteriormente, iremos considerar feixes LG carregando cargas topológicas fracionárias l', l'' e ordens radiais p', p'' para obter a integral de *overlap* normalizada. Para vórtices co-rotacionando ($l' \cdot l'' \geq 0$), $\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$ é descrita exatamente como mostra a Equação 3.2 e nenhum comportamento interessante surge. Por outro lado, para vórtices contra-rotacionando ($l' \cdot l'' < 0$) interagindo no cristal não-linear, a integral de *overlap* normalizada será:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_v^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \times \frac{(-1)^{m+n+\lfloor P \rfloor} (\lfloor P \rfloor + m + n)! (|l' + l''| + \lfloor P \rfloor + m + n)!}{m!n!(p'-m)!(p''-n)! (|l'| + m)! (|l''| + n)! (\lfloor P \rfloor + m + n - p)!}, \quad (3.4)$$

para $p \leq \lfloor P \rfloor + p' + p''$ e zero para os demais valores. Aqui, a função piso $\lfloor \cdot \rfloor$ atuando sobre $P = \min(|l'|, |l''|)$ surge quando aplicamos a expansão $x^{P+m+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor P \rfloor + m + n} c_k L_k^q(x)$, onde $c_k = (\lfloor P \rfloor + m + n)! (q + \lfloor P \rfloor + m + n)! / (\lfloor P \rfloor + m + n - k)! (q + k)!$. Como P pode assumir

Figura 3.7: Distribuições teóricas de intensidade (superior) e padrões de fase (inferior) para o início (a,d), meio (b,e) e fim (c,f) do processo de nascimento de um vórtice.

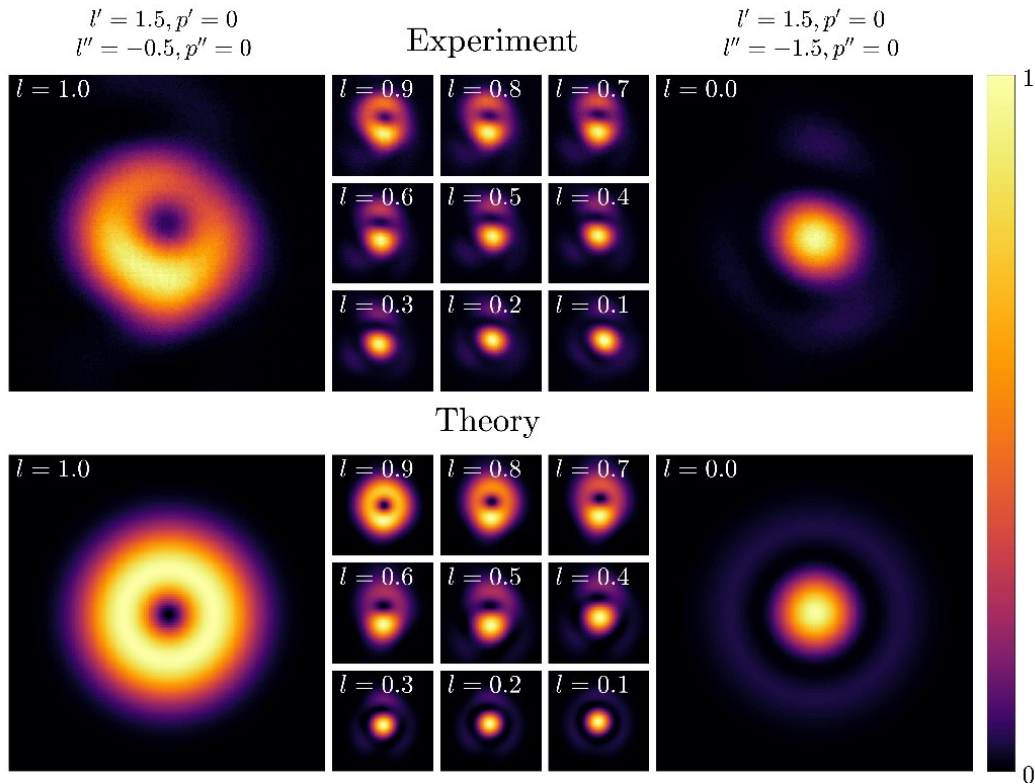


valores não-inteiros e cada passo k assume apenas valores inteiros, temos que utilizar a função piso.

O nascimento de um vórtice a partir de mistura não-linear de duas ondas pode ser observado quando a carga topológica de um dos feixes que estão interagindo no cristal não-linear é lentamente incrementado, onde aqui foi utilizado um incremento de 0.1 em l' . Experimentalmente, basta alterarmos os hologramas inseridos no MEL para gerar os modos iniciais. Começando com uma mistura de ondas onde os feixes carregam cargas topológicas $l' = 0.5$ e $l'' = -0.5$, respectivamente, o campo gerado inicialmente não carrega MAO devido à conservação da carga topológica. Ao decorrer que l' é aumentado, o feixe gerado começa a adquirir carga topológica não-inteira até eventualmente obter $l = 1$. Este processo pode ser visto na Figura 3.6, onde os resultados teóricos e experimentais são mostrados. Com o intuito de demonstrar que o vórtice de fato é formado, podemos observar seu padrão de fase na Figura 3.7 para o início ($l = 0$), meio ($l = 0.5$) e fim ($l = 1$) do processo. Naturalmente, quando o feixe não tem MAO, seu padrão de fase não apresenta singularidades. Na Figura 3.7 (b) o feixe carrega uma carga topológica $l = 0.5$ e, ao analisarmos as singularidades apresentadas no padrão de fase, podemos ver que a força total do vórtice é 1, como esperado [38]. Para uma melhor visualização da contagem das singularidades, podemos observar a Figura 3.7. Finalmente, na Figura 3.7 (c), podemos observar que temos um vórtice completamente criado carregando carga topológica $l = 1$. Ainda é possível notar na Figura 3.7 singularidades adicionais que não estão associados ao nascimento do vórtice, caracterizado por anéis em que o valor de fase não pode ser determinado. Tais singularidades estão associadas às superfícies de Riemann e indicam o corte entre planos complexos se encontrando ao longo de uma certa linha de corte.

A formação de anéis externos também pode ser estudada utilizando a teoria apresentada anteriormente. Quando os feixes iniciais não contém ordens radiais ($p' = p'' = 0$), a regra de seleção resultante da integral de *overlap* normalizada nos diz que o número de anéis externos criados é limitado ao maior inteiro menor ou igual ao valor mínimo entre $|l'|$ e $|l''|$. Neste

Figura 3.8: Distribuições de intensidade experimentais (superior) e teóricas (inferior) na zona de Fraunhofer mostrando a formação de novas ordens radiais.



caso, começamos com uma mistura de feixes carregando cargas topológicas $l' = 1.5$ e $l'' = -0.5$ e incrementamos l'' em passos de -0.1 . Assim, a carga topológica do feixe resultante diminui lentamente e começa a criar um anel externo. Podemos ver os resultados teóricos e experimentais para o processo aqui descrito na Figura 3.8.

3.4 Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentado a primeira parte dos resultados desta tese. Inicialmente, fizemos uma análise geral para o processo de mistura não-linear por duas ondas considerando feixes LG carregando cargas topológicas e ordens radiais arbitrárias. Através da superposição de modos gerada pela integral de *overlap* normalizada fomos capazes de observar que, apesar de obtermos uma regra de seleção que nos informa o número de anéis externos que deveríamos observar no campo distante, os valores que $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ assume faz com que sua distribuição de intensidade não apresente o número de anéis esperado em alguns casos particulares. Posteriormente, feixes carregando cargas topológicas fracionárias foram utilizadas para mostrar o nascimento de um vórtice e a criação de ordens radiais adicionais através do processo de mistura não-linear por duas ondas. Para isso, uma nova regra de seleção foi derivada para vórtices contra-rotacionando e ambos processos de criação, vórtice e ordens radiais, foram demonstrado teoricamente e experimentalmente incrementando a carga topológica de um dos feixes iniciais. Com isso, finalizamos o estudo de mistura não-linear de duas ondas utilizando vórtices ópticos. No Capítulo 4 iremos tratar de mistura por duas ondas com feixes HG, onde mostraremos uma importante característica que surge na regra de seleção, mais precisamente na integral de *overlap* normalizada, para feixes HG. Essa característica abre portas para uma aplicação como conversor de modos

ópticos, que também será discutida no próximo capítulo.

Capítulo 4

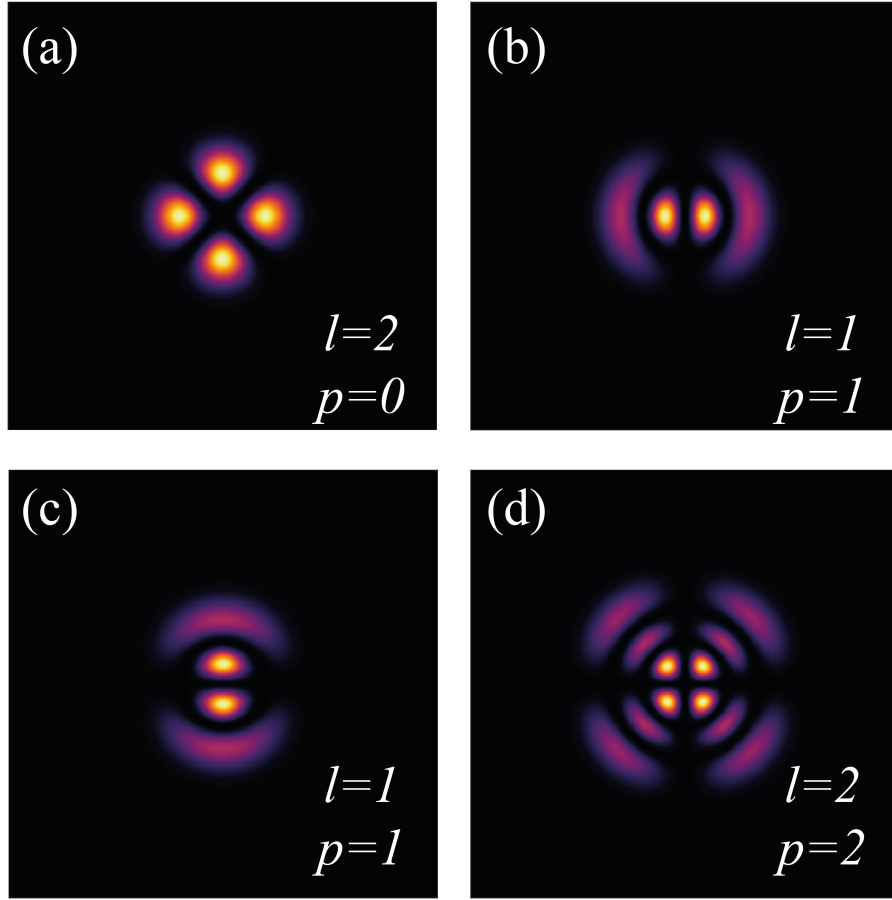
Mistura de feixes Hermite-Gauss

Neste capítulo trataremos dos resultados referentes à mistura não-linear de duas ondas utilizando modos HG como feixes iniciais. Na Seção 4.1 apresentaremos que a mistura de duas ondas com modos HG gera um modo dominante possuindo uma regra bem definida para determinar seus índices, enquanto a realização do mesmo não é possível para mistura de modos LG com paridade definida. Utilizando essa propriedade, mostraremos que é possível realizar uma conversão de modos ópticos utilizando esse processo não-linear. Assim, conseguimos utilizar o processo não-linear para converter modos que assumem simetrias diferentes.

4.1 Bases de estado adequado para protocolos de conversão de modos ópticos

Vimos nos capítulos anteriores que, ao considerar feixes LG para a realização do processo de mistura não-linear por duas ondas, o campo gerado será uma superposição de modos. Aqui, a integral de *overlap* normalizada age como um seletor de modos onde a carga topológica será conservada e as ordens radiais criadas são determinadas pelas expressões para $\Lambda_{pp'l''}^{l'l''}$. Agora, vamos considerar como feixes iniciais modos HG e analisar mais profundamente como acontece a seleção de modos dentro do cristal não-linear. Nesta seção, por questões de praticidade, iremos calcular a integral de *overlap* para os dois modos iniciais numericamente.

Para estudar a interação não-linear de modos HG, iremos comparar os modos gerados através do processo de mistura por duas ondas utilizando feixes HG e LG com paridade definida. A justificativa da escolha dessas bases está associada ao número de graus de liberdade, que pode ser definido como o número de canais de comunicação úteis disponíveis independentes e disponíveis para a transmissão de informação [91]. Além dos graus de liberdade espaciais, os modos LG completos possuem graus de liberdade adicionais devido à presença de MAO. Por outro lado, modos HG e LG com paridade definida possuem o mesmo número de graus de liberdade e por isso eles são uma boa escolha para realizar tal comparação. Assim, ao separarmos a dependência azimutal $\exp il\theta$ característico dos modos LG completo em $\cos l\theta$ e $\sin l\theta$, obtemos os modos LG par e ímpar, respectivamente. Os modos LG com paridade definida podem ser escritos como[45]:

Figura 4.1: Distribuições de intensidade para os modos (a) LG_{02}^e , (b) LG_{11}^e , (c) LG_{11}^o e (d) LG_{22}^o .

$$\text{LG}_{pl}^{e,o}(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{4p!}{(1 + \delta_{0,l}) \pi(p+l)! w(z)}} \frac{1}{(\cos l\theta)} \begin{pmatrix} \cos l\theta \\ \sin l\theta \end{pmatrix} \times \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - \Psi_{LG}(z) \right]}, \quad (4.1)$$

onde os índices p e l controlam as ordens radiais e carga topológica, respectivamente. Como ilustração, a Figura 4.1 exemplifica algumas distribuições de intensidade dos modos LG com paridades par e ímpar.

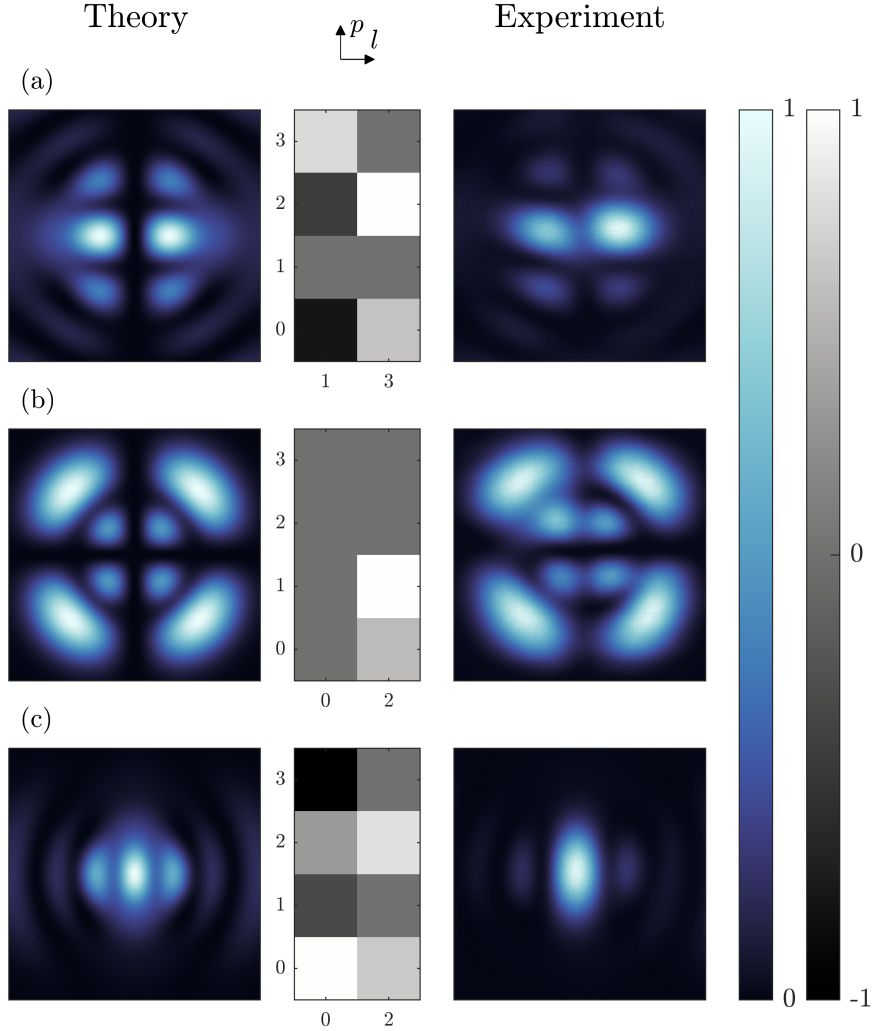
Como já mostrado anteriormente nos Capítulos 2 e 3, a mistura não-linear por duas ondas de feixes LG completos carregando MAO resulta, de forma geral, numa superposição de modos p juntamente com a conservação da carga topológica. Por outro lado, os modos LG com paridade definida apresentam um comportamento diferente. A superposição de modos gerada através da mistura de dois feixes LG carregando, respectivamente, paridades σ' , σ'' , cargas topológicas l' , l'' e ordens radiais p' , p'' é:

$$\text{LG}_{p'l'}^{\sigma'} \cdot \text{LG}_{p''l''}^{\sigma''} = \sum_{p=0}^{\frac{N-l}{2}} \sum_{l=\{|l'-l''|, |l'+l''|\}} \Lambda_{l'l''}^{pp'p''} \text{LG}_{pl}^{\sigma}, \quad (4.2)$$

onde $\sigma = \text{mod}(\sigma' + \sigma'', 2)$ e $N = 2(p' + p'') + l' + l''$. Acima, indicamos a mistura de dois modos iniciais $\text{LG}_{p'l'}^{\sigma'} \cdot \text{LG}_{p''l''}^{\sigma''}$ pelo produto entre os modos inicialmente interagentes. Isso

4.1. BASES DE ESTADO ADEQUADO PARA PROTOCOLOS DE CONVERSÃO DE MODOS ÓPTICO

Figura 4.2: Distribuições de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) para o campo gerado através do processo de mistura de duas ondas para feixes LG, juntamente com os histogramas para os modos gerados em cada caso.

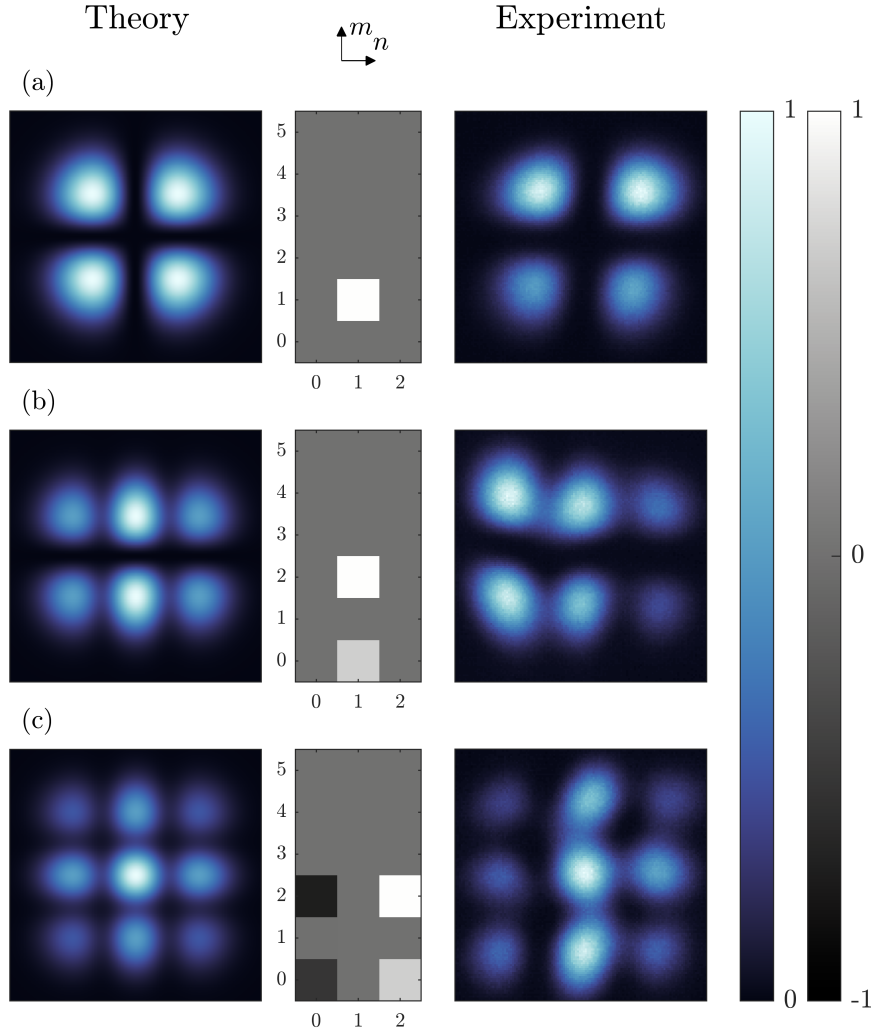


significa que esperamos um campo que consiste em uma superposição de ordens radiais até o valor máximo p permitido pela ordem N dos feixes iniciais com carga topológica l . Além disso, a mistura de modos carregando inicialmente paridades iguais (diferentes) resulta em modos com paridade par (ímpar).

A Figura 4.2 (a) representa a mistura não-linear de $U_1 = \text{LG}_{12}^o$ e $U_2 = \text{LG}_{11}^o$, resultando em uma superposição de modos mostrada pelo histograma entre as janelas dos resultados teóricos e experimentais. Aqui, os histogramas se referem aos valores assumidos pela integral de *overlap* para cada caso considerado. Na Figura 4.2 (b) os modos iniciais são $U_1 = \text{LG}_{11}^e$ e $U_2 = \text{LG}_{01}^e$, enquanto na Figura 4.2 (c) $U_1 = \text{LG}_{11}^e$ e $U_2 = \text{LG}_{11}^e$ foram usados como modos iniciais. Os resultados teóricos e experimentais concordam muito bem. Ao analisarmos os histogramas da Figura 4.2 fica claro que não há uma relação bem definida para determinar o modo gerado dominante.

Vamos agora considerar como feixes iniciais os modos HG, cuja expressão é dada pela Equação 2.12. Assim, considerando a mistura de dois modos HG carregando, respectivamente, índices m', n' e m'', n'' resulta uma superposição da forma [92]:

Figura 4.3: Distribuições de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) para o campo gerado através do processo de mistura de duas ondas para feixes HG, juntamente com os histogramas para os modos gerados em cada caso.



$$\text{HG}_{m'n'} \cdot \text{HG}_{m''n''} = \sum_{m=0}^{m'+m''} \sum_{n=0}^{n'+n''} \Lambda_{mm'n''}^{nn'm''} \text{HG}_{mn}. \quad (4.3)$$

Na equação acima, m assume valores pares (ímpares) se $\text{mod}(m'+m'', 2) = 0$ (1). Ao compararmos as Equações 4.2 e 4.3, pode-se esperar um comportamento semelhante devido à proximidade das expressões. Contudo, após calcularmos os valores para a integral de *overlap* as diferenças entre eles ficam mais claras.

A Figura 4.3 (a) ilustra a mistura de $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{10}$, levando à HG_{11} como modo dominante. Na Figura 4.3 obtemos como modo dominante HG_{21} quando $U_1 = \text{HG}_{10}$ e $U_2 = \text{HG}_{11}$ são usados como feixes iniciais. A Figura 4.3 representa a mistura de $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{21}$ gerando HG_{22} como modo dominante. Através dos histogramas podemos ver que, para a mistura não-linear de feixes HG, o modo dominante será sempre o que carrega os índices $m = m' + m''$ e $n = n' + n''$. Este comportamento nos leva a concluir que, apesar dos modos HG e LG serem soluções da equação paraxial da onda e possuem propriedades semelhantes no espaço livre, eles respondem diferentemente quando interagem em meios não-lineares.

Portanto, podemos afirmar que para uma mistura não-linear de modos HG, o campo gerado carregará um modo dominante com os índices $m = m' + m''$ e $n = n' + n''$. Essa característica cria a possibilidade de utilizar o meio não-linear para a realização de conversão de modos ópticos, que será abordada na próxima seção.

4.2 Conversão de modos ópticos através de mistura de feixes Hermite-Gauss

Como visto anteriormente, a mistura não-linear de modos HG gera um modo dominante no campo criado. Com isso, podemos usar o processo de mistura por duas ondas para a conversão de modos. Apesar da conversão de modos ópticos já ser conhecida através de óptica linear e difrativa [78, 93, 94], aqui apresentamos uma forma de realizá-lo utilizando meios não-lineares de segunda ordem. Foi mostrado no Capítulo 2 algumas soluções da equação paraxial da onda, os modos HG (sistema de coordenadas retangulares), os modos LG (sistema de coordenadas cilíndricas) e os modos IG (sistema de coordenadas elípticas). Podemos assim reescrever, por exemplo, os modos LG e IG em termos de uma superposição de modos HG [77, 45]. A Figura 4.4 mostra um esfera de Poincaré para uma determinada base composta por modos HG para ilustrar a possibilidade de conversão de modos entre diferentes simetrias. A conversão e decomposição de modos HG já foi considerada antes em graus de liberdade espaço-temporais, com o intuito de controlar sua estrutura temporal [95, 96, 97, 98].

Agora, iremos considerar como campos iniciais uma superposição de modos HG com diferentes índices. Em outras palavras, a partir de agora teremos $U_1 = \sum_{m,n} \alpha_{mn} \text{HG}_{mn}$ e $U_2 = \sum_{m,n} \beta_{mn} \text{HG}_{mn}$, onde α_{mn}, β_{mn} são os pesos de cada modo na superposição e, fisicamente, podem ser vistos como parâmetros de controle de intensidade. Note que, após realizar o cálculo da integral de *overlap* normalizada, teremos agora uma superposição de integrais de *overlap* normalizadas:

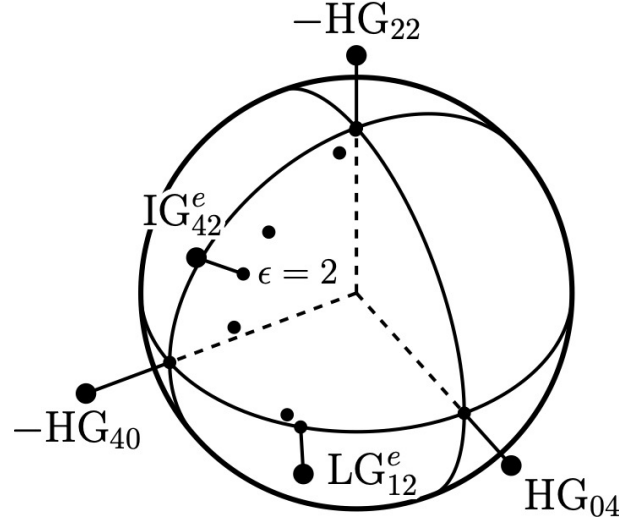
$$\Lambda_{\text{Net}} = \sum_i \Lambda_i, \quad (4.4)$$

onde cada Λ_i irá selecionar um modo HG na superposição do campo gerado. Podemos expressá-los por [92]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,m',m''}^{n,n',n''} = & \Lambda_{000}^{000} D_{m,m',m''}^{n,n',n''} \frac{\partial^{m'+m''}}{\partial t_1^{m'} \partial t_2^{m''}} \left[(t_1 + t_2)^m e^{-(t_1-t_2)^2/2} \right] \Bigg|_{t_i=0} \\ & \times \frac{\partial^{n'+n''}}{\partial t_1^{n'} \partial t_2^{n''}} \left[(t_1 + t_2)^n e^{-(t_1-t_2)^2/2} \right] \Bigg|_{t_i=0}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $D_{m,m',m''}^{n,n',n''} = \sqrt{2^{-(m+m'+m''+n+n'+n'')}/m!m'!m''!n!n'!n''!}$ e Λ_{000}^{000} é uma constante de normalização. Os detalhes para a derivação da Equação 4.5 encontram-se no Apêndice B. Aqui, $u_{m',n'}^h$ e $u_{m'',n''}^v$ são os modos HG iniciais. É possível mostrar através de propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Hermite que $m \leq m' + m''$ e $n \leq n' + n''$, o que gera uma superposição de modos de forma semelhante ao caso de feixes LG, como mostrado anteriormente. Contudo, vimos na seção anterior que iremos obter um modo dominante carregando índices $m = m' + m''$ e $n = n' + n''$. Ao escolher os campos iniciais corretamente, é possível convertê-los em outros tipos de modos, como os modos LG e IG, por exemplo. A base é escolhida ao expandir os modos LG ou IG em termos de modos HG [77, 45]. É importante ressaltar que para este trabalho em específico foi utilizado um cristal não-linear de BBO do tipo

Figura 4.4: Representação gráfica de uma esfera de Poincaré para o modo IG_{42}^e com vários valores de excentricidade expandido em uma base de modos HG.



II. Portanto, para obtermos os modos iniciais com polarizações ortogonais entre si, utilizamos placas de meia-onda posicionadas após o MEL (Figura 3.1).

4.2.1 Cálculo dos pesos para o processo de conversão de modos

Como dito anteriormente, é necessário escolher corretamente cada feixe inicial U_1 e U_2 . Por exemplo, para o modo $IG_{2,2}$ precisamos realizar uma expansão em termos de HG_{20} e HG_{02} . Porém, para obter uma combinação desses modos no campo gerado através da mistura de ondas devemos usar:

$$U_1 = \alpha_{10}HG_{10} + \alpha_{01}HG_{01}, \quad (4.6)$$

$$U_2 = \beta_{10}HG_{10} + \beta_{01}HG_{01}. \quad (4.7)$$

Aqui, os valores de $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m'n''}$ para as superposições utilizadas nesta tese podem ser vistas na Tabela 4.1. A integral de *overlap* normalizada é a responsável por selecionar os modos que vão ser criados no campo gerado $U_{2\omega}$.

Para ilustrar como os pesos de cada decomposição são obtidos, vamos considerar cada paridade separadamente. O primeiro passo é expandir o modo em questão na base de HG. Como um exemplo para paridade ímpar, vamos exemplificar com o modo IG_{31}^o . Esse modo pode ser expandido em termos de modos HG como:

$$IG_{31}^o = A \cdot HG_{21} + B \cdot HG_{03}, \quad (4.8)$$

com as constantes A e B assumindo valores a depender da excentricidade do feixe. Agora precisamos escolher uma combinação de modos HG como feixes iniciais com o intuito de resultar nos modos acima depois do processo de mistura de duas ondas. Por exemplos, se queremos gerar o modo HG_{mn} devemos usar $HG_{m'n'}$ e $HG_{m''n''}$ como modos iniciais U_1 e U_2 , em qualquer ordem, já que o modo dominante carrega índices $m = m' = m''$ e $n = n' + n''$. Seguindo esta ideia, uma possível configuração pode ser:

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_{20}HG_{20} + \alpha_{02}HG_{02}, \\ U_2 &= \beta_{01}HG_{01}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde as constantes α_{20} , α_{02} e β_{01} devem ser determinadas. Note que essas constantes podem ser vistas como parâmetros de controle de intensidade. Após seguir os passos já descrito anteriormente, o campo gerado pelo processo de mistura de duas ondas será:

$$U_{2\omega} = \alpha_{20}\beta_{01}\Lambda_{220}^{101}\text{HG}_{21} + \alpha_{02}\beta_{01}\Lambda_{000}^{321}\text{HG}_{03}. \quad (4.10)$$

Como queremos gerar um campo da forma descrita pela Equação 4.8, temos que ajustar as constantes α_{20} , α_{02} e β_{01} para este propósito. Portanto, o seguinte sistema linear deve ser resolvido para estas constantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{20}\beta_{01}\Lambda_{220}^{101} &= A, \\ \alpha_{02}\beta_{01}\Lambda_{000}^{321} &= B, \end{aligned} \quad (4.11)$$

com a única solução possível sendo:

$$\alpha_{20} = \frac{A}{\Lambda_{220}^{101}}, \alpha_{02} = \frac{B}{\Lambda_{000}^{321}}, \beta_{01} = 1. \quad (4.12)$$

Esse método pode ser generalizado para qualquer modo com paridade ímpar escrita na base HG:

$$\text{IG}_{pm}^o = \sum_{m'n'} \alpha_{m'n'} \text{HG}_{m'n'}, \quad (4.13)$$

com feixes iniciais:

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{m''n''} \beta_{m''n''} \text{HG}_{m''n''}, \\ U_2 &= \text{HG}_{10} \quad \text{ou} \quad U_2 = \text{HG}_{01}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e pesos:

$$\beta_{m''n''} = \frac{\alpha_{m'n'}}{\Lambda_{mm'm''}^{nn'n''}}. \quad (4.15)$$

Para modos com paridade par, usaremos o modo IG_{42}^e como exemplo. Podemos escrevê-lo em termos da base HG como:

$$\text{IG}_{42}^e = A \cdot \text{HG}_{40} + B \cdot \text{HG}_{22} + C \cdot \text{HG}_{04}. \quad (4.16)$$

Neste caso, vamos decompor os feixes iniciais como:

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_{20}\text{HG}_{20} + \alpha_{02}\text{HG}_{02}, \\ U_2 &= \beta_{20}\text{HG}_{20} + \beta_{02}\text{HG}_{02}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

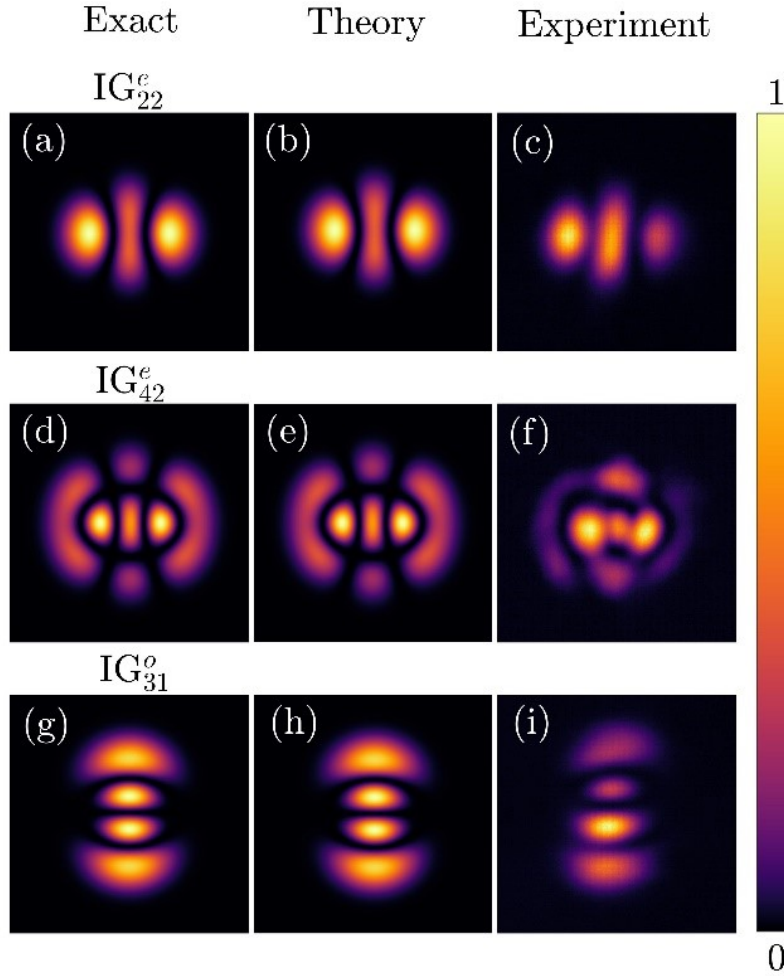
com as constantes α_{20} , α_{02} , β_{20} e β_{02} a serem determinadas. Utilizando esses feixes iniciais, o campo gerado terá a forma:

$$\begin{aligned} U_{2\omega} &= \alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000}\text{HG}_{40} + \alpha_{20}\beta_{02}\Lambda_{220}^{202}\text{HG}_{22} \\ &+ \alpha_{02}\beta_{20}\Lambda_{202}^{220}\text{HG}_{22} + \alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422}\text{HG}_{04}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como $\Lambda_{220}^{202} = \Lambda_{202}^{220}$, podemos agrupar os termos de HG_{22} e reescrever como

$$\begin{aligned} U_{2\omega} &= \alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000}\text{HG}_{40} \\ &+ (\alpha_{20}\beta_{02} + \alpha_{02}\beta_{20})\Lambda_{220}^{202}\text{HG}_{22} + \alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422}\text{HG}_{04}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Figura 4.5: Modo IG exato (a,d,g) comparado com as distribuições de intensidade teórico (b,e,h) e experimental (c,f,i) para paridades pares e ímpares.



Isso resulta em um sistema linear:

$$\begin{aligned} \alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000} &= A, \\ (\alpha_{20}\beta_{02} + \alpha_{02}\beta_{20})\Lambda_{220}^{202} &= B, \\ \alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422} &= C. \end{aligned} \quad (4.20)$$

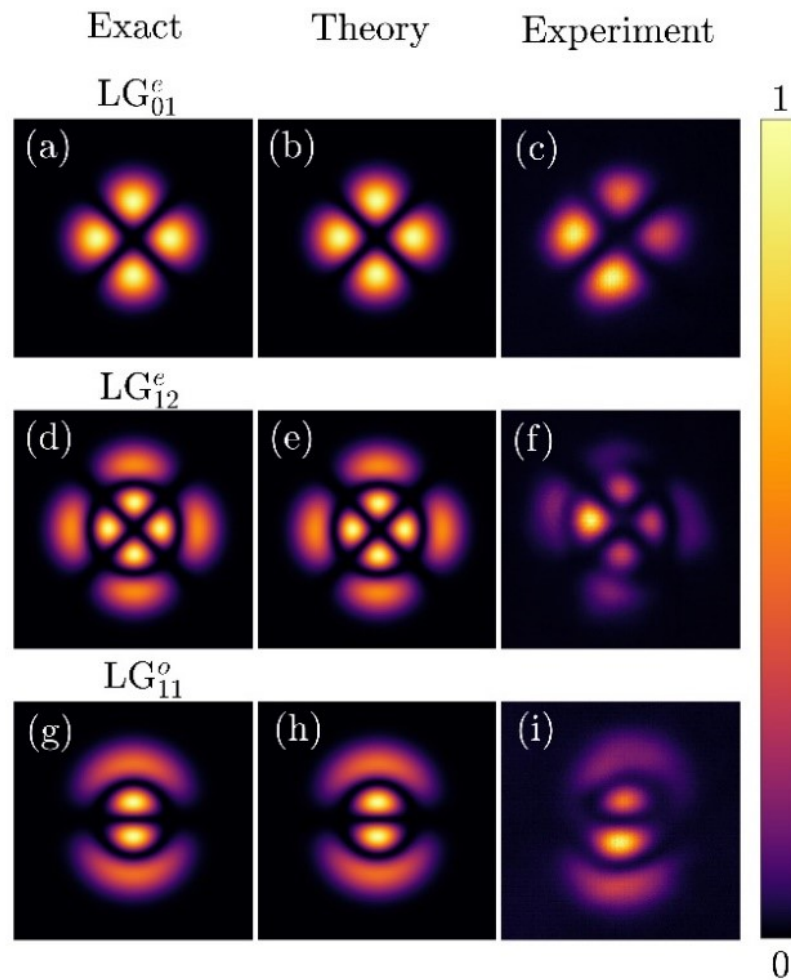
Uma possível solução é:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} &= 1, \quad \alpha_{02} = \frac{B/\Lambda_{220}^{202} \sqrt{(B/\Lambda_{220}^{202})^2 - 4AC/\Lambda_{220}^{202}\Lambda_{000}^{422}}}{2A/\Lambda_{422}^{000}}, \\ \beta_{20} &= \frac{A}{\alpha_{20}\Lambda_{422}^{000}}, \quad \beta_{02} = \frac{C}{\alpha_{02}\Lambda_{000}^{422}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2.2 Conversões para modos com paridade definida

Primeiramente, selecionamos um grupo com três modos diferentes com paridades bem definidas. Os resultados para as conversões de feixes IG e LG podem ser vistas nas Figuras 4.5 e 4.6,

Figura 4.6: Modo LG exato (a,d,g) comparado com as distribuições de intensidade teórico (b,e,h) e experimental (c,f,i) para paridades pares e ímpares.



respectivamente, cujos valores dos pesos utilizados em cada caso podem ser vistos na Tabela 4.1. A primeira coluna representa a distribuição de intensidade exata para os modos IG e LG desejados, obtidos como solução da equação paraxial da onda em um respectivo sistema de coordenadas. As expressões para tais feixes foram apresentadas no Capítulo 2, Seção 2.1. A segunda coluna mostra os resultados teóricos, que representam o campo gerado através do processo de mistura não-linear por duas ondas. Este foi calculado usando a expressão da integral de *overlap* normalizada para os feixes HG e então propagado até a zona de Fraunhofer. A terceira coluna mostra os resultados experimentais, que validam a teoria apresentada. Os pesos α_{mn} e β_{mn} foram calculados considerando as expansões dos modos IG e LG numa base composta por modos HG, além de levar em consideração os valores da integral de *overlap* normalizada. Adicionalmente, mostramos a transição entre os modos LG e HG ao alterar o parâmetro de excentricidade de um modo IG_{42}^e . A Figura 4.7 mostra a distribuição de intensidade do campo gerado na zona de Fraunhofer, obtido teoricamente e experimentalmente, para valores de excentricidade entre 0 e 1000. Aqui, podemos sempre encontrar um conjunto de pesos para os quais o campo gerado terá a decomposição exata de um modo desejado na base HG.

Figura 4.7: Distribuição de intensidade do campo distante para vários valores de excentricidade do modo IG_{42}^e . Aqui, mostramos a transição entre os modos LG e HG ao alterarmos a excentricidade de 0 até 1000.

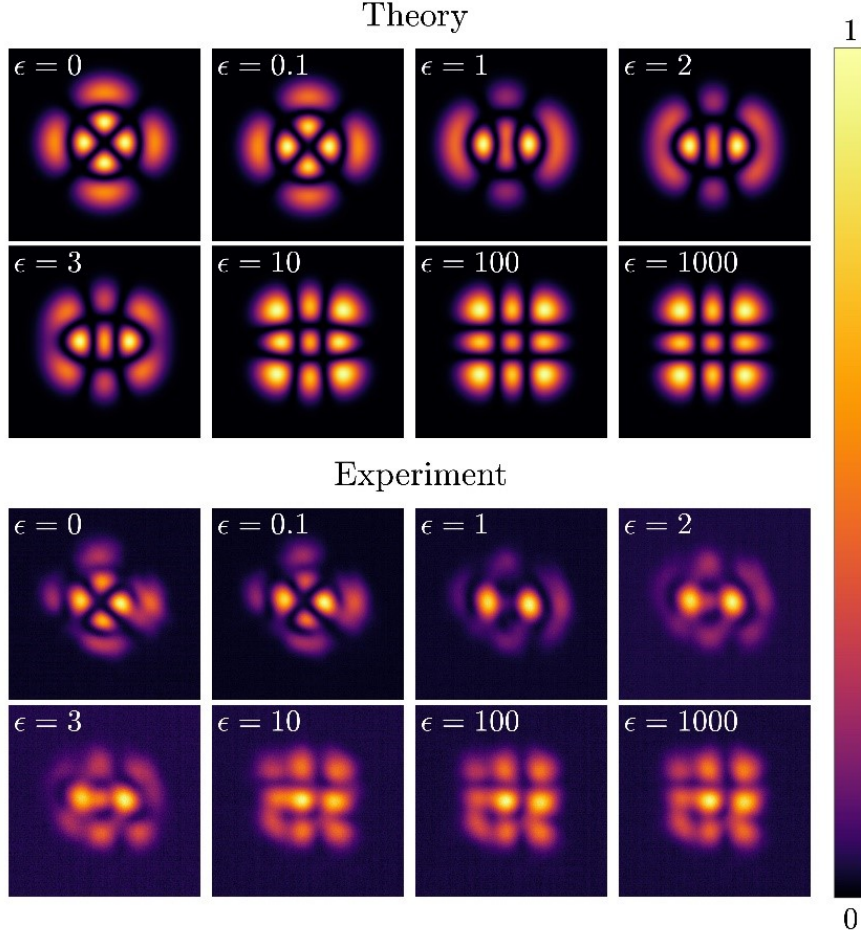
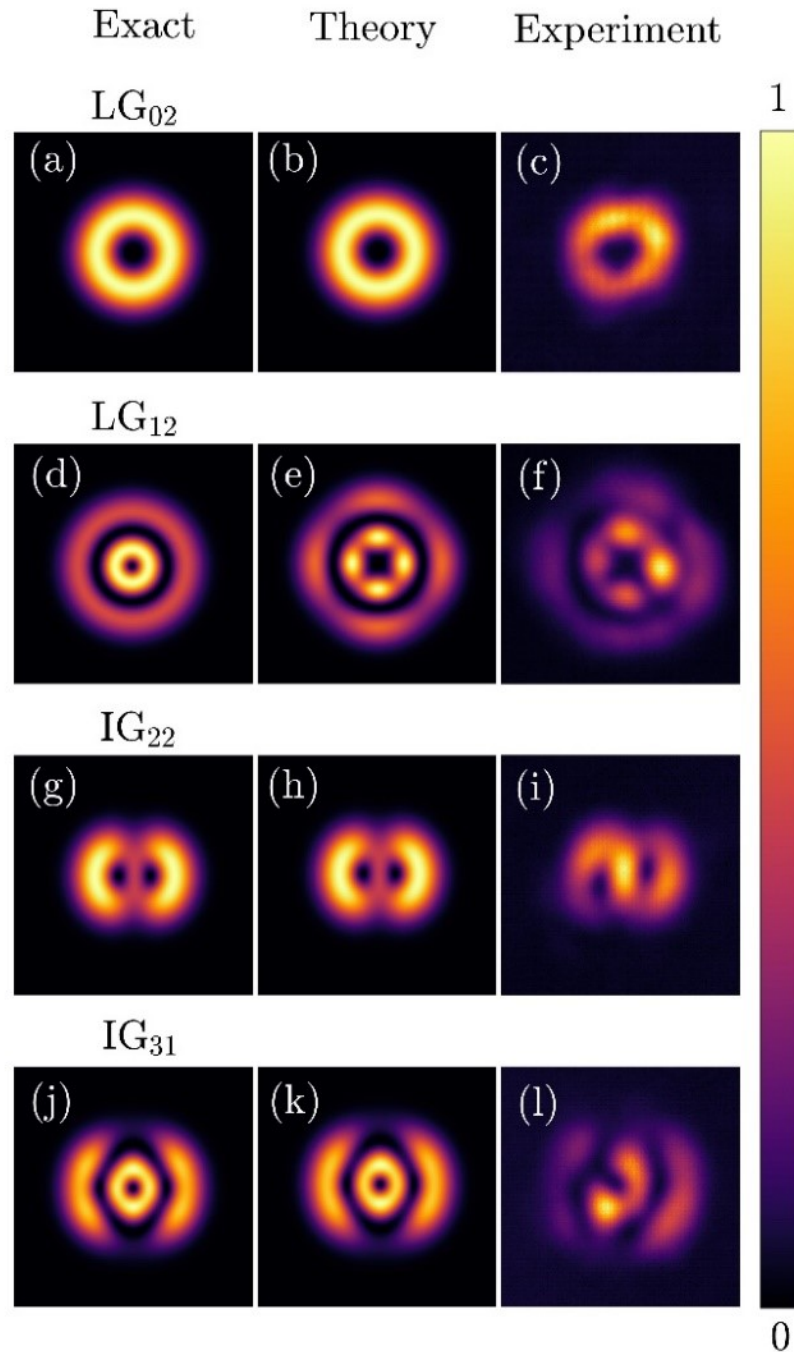


Tabela 4.1: Decomposição dos modos iniciais na base HG que gera um modo IG ou LG específico através do processo de mistura não-linear de duas ondas. Os modos marcados com * correspondem àqueles para os quais não é possível encontrar uma solução para o sistema linear para os pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m'n'}$ que compensa a integral de *overlap* $\Lambda_{mm'm''}^{nn'n''}$.

Mode	U_1	U_2
IG_{22}^e	$HG_{10} + 0.486HG_{01}$	$3.892HG_{10} - 1.892HG_{01}$
IG_{42}^e	$HG_{20} - 0.155HG_{02}$	$-12.000HG_{20} - 25.843HG_{02}$
IG_{31}^o	$2.072HG_{20} + 4.460HG_{02}$	HG_{01}
LG_{01}^e	$HG_{10} + HG_{01}$	$HG_{10} - HG_{01}$
LG_{12}^e	$HG_{20} + HG_{02}$	$HG_{20} - HG_{02}$
LG_{11}^o	$HG_{20} + HG_{02}$	HG_{01}
LG_{02}	$HG_{10} - 1.017iHG_{01}$	$-2.828HG_{10} + 2.779iHG_{01}$
* LG_{12}	$HG_{20} + HG_{02}$	$HG_{20} - HG_{02} - iHG_{02}$
IG_{22}	$HG_{10} - 1.267iHG_{01}$	$-3.892HG_{10} + 0.726iHG_{01}$
* IG_{31}	$2.859HG_{20} + 0.983HG_{02}$	$1.577iHG_{10} + 2.405HG_{01}$

Figura 4.8: Distribuições de intensidade exatas para os modos LG (a,d) e IG (g,j) comparadas com os resultados teóricos (b,e,h,k) e experimentais (c,f,i,l) para feixes carregando MAO.



4.2.3 Conversões para modos carregando MAO

Como estávamos convertendo modos HG em LG com paridades bem definidas, eles não possuem MAO. Portanto, para gerar um feixe carregando uma carga topológica específica, a superposição de modos no campo gerado deve combinar feixes com paridades ímpar e par. Assim,

devemos adicionar uma diferença de fase com valor $\pi/2$ a um dos conjuntos de modos com paridade ímpar ou par para que seja possível acessar um ponto específico da esfera de Poincaré. A Figura 4.8 mostra um conjunto de feixes LG e IG gerados a partir de uma superposição de modos HG que carregam MAO. As últimas quatro linhas da Tabela 4.1 mostram os valores dos pesos utilizados para esse caso. Note que os resultados teóricos e experimentais para LG_{12} não casam perfeitamente com o seu modo transversal exato. Neste caso, o conjunto de equações para os pesos não pode ser resolvido exatamente. Porém, mesmo que o seu perfil de intensidade não possa ser obtido precisamente, ele ainda carrega MAO. A Figura 4.9 mostra as medidas de carga topológica para os casos aqui considerados utilizando o método de lente inclinada [99]. Detalhes sobre a teoria da lente convexa inclinada estão disponíveis no Apêndice C.

4.2.4 Limitações do método

Com isso, vamos discutir as limitações do método aqui apresentado. Diferentemente do caso para paridade ímpar, nem sempre é possível encontrar uma combinação não-trivial para os feixes iniciais no qual o campo gerado seja o modo desejado. Nesses casos, o sistema linear a ser resolvido para os pesos é inconsistente, portanto não há solução. Seja, por exemplo, o modo IG_{62}^e :

$$IG_{62}^e = A \cdot HG_{60} + B \cdot HG_{42} + C \cdot HG_{24} + D \cdot HG_{06}, \quad (4.22)$$

que pode ser decomposto nos campos iniciais:

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_{40}HG_{40} + \alpha_{04}HG_{04}, \\ U_2 &= \beta_{20}HG_{20} + \beta_{02}HG_{02}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O sistema linear para os pesos será:

$$\begin{aligned} \alpha_{40}\beta_{20}\Lambda_{642}^{000} &= A, \\ \alpha_{40}\beta_{02}\Lambda_{440}^{202} &= B, \\ \alpha_{04}\beta_{20}\Lambda_{202}^{440} &= C, \\ \alpha_{04}\beta_{02}\Lambda_{000}^{642} &= D. \end{aligned} \quad (4.24)$$

que é inconsistente e não possui solução.

Um comportamento similar ocorre para feixes carregando MAO. Para demonstrar essa limitação vamos usar o modo LG_{12} , que pode ser decomposto em termos da base HG como:

$$LG_{12} = LG_{12}^e + iLG_{12}^o = HG_{40} - HG_{04} + i(HG_{31} + HG_{13}), \quad (4.25)$$

com todas as constantes multiplicativas, como no caso anterior para IG_{62}^e . Isso significa que teremos um sistema linear inconsistente para os pesos. Porém, mesmo que não possamos gerar o modo LG_{12} exato, é possível encontrar uma decomposição para os feixes iniciais para que o campo gerado contenha MAO.

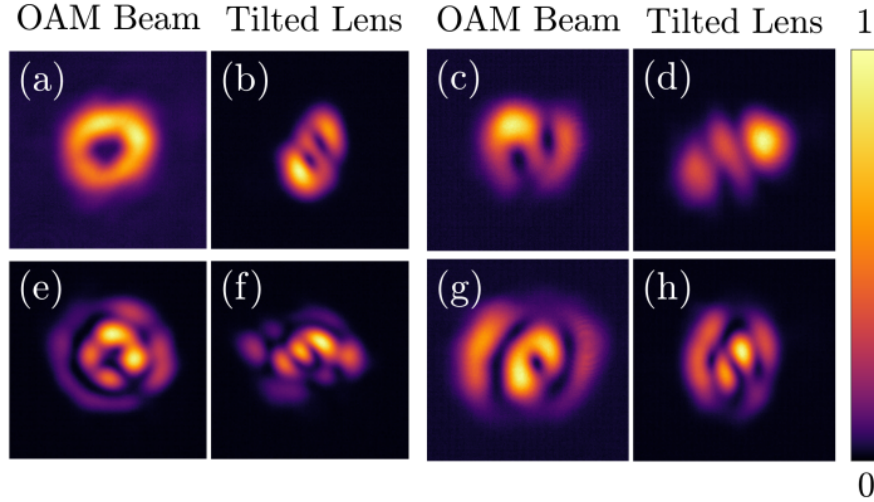
Neste caso, podemos usar os seguintes modos iniciais:

$$\begin{aligned} U_1 &= HG_{20} - HG_{02} - iHG_{11}, \\ U_2 &= HG_{20} + HG_{02}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assim, o campo gerado será:

$$\begin{aligned} U_{2\omega} &= \Lambda_{422}^{000}HG_{40} + \Lambda_{220}^{202}HG_{22} - \Lambda_{202}^{220}HG_{22} \\ &\quad - \Lambda_{000}^{422}HG_{04} - i\Lambda_{312}^{110}HG_{31} - i\Lambda_{110}^{312}HG_{13}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Figura 4.9: Distribuições de intensidade na zona de Fraunhofer para feixes carregando MAO, referente aos modos (a) LG_{02} , (c) IG_{22} , (e) $^*LG_{12}$ e (g) $^*IG_{31}$, juntamente com as medidas das cargas topológicas associadas através do método da lente inclinada (b), (d), (f) e (h), respectivamente.



Note que se todos os valores para a integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$ fossem iguais, teríamos $U_{2\omega} = LG_{12}$, exceto por alguma constante de proporcionalidade. Porém, como esses valores não são iguais, a integral de *overlap* impõe pesos aos modos HG diferentes dos que iriam gerar o modo LG_{12} exatamente. Por outro lado, apesar dessa variação, a distribuição de intensidade de $U_{2\omega}$ ainda lembra a do modo LG_{12} e carrega a singularidade referente à carga topológica, como mostra a Figura 4.9.

Contudo, mesmo se não pudermos encontrar valores apropriados para os pesos para que os valores da integral de *overlap* sejam compensados, é possível otimizá-los numericamente utilizando métodos de função de muitas variáveis [100, 101]. No nosso caso, encontramos os pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m'n'}$ para que o campo resultante $U_{2\omega}$ se aproxime do modo IG_{pm}^{σ} desejado com um específico valor para excentricidade ϵ e paridade σ . Isso é obtido ao minimizar a quantidade $\sum_{ij} |U_{2\omega} - IG_{pm}^{\sigma}|$, onde os índices i, j variam sobre todos os pontos do campo discretizado.

4.3 Resumo do capítulo

Neste capítulo foi apresentado os resultados envolvendo o processo de mistura por duas ondas com modos HG. Através da análise da integral de *overlap* normalizada, mostramos que a seleção de modos ocorre de uma forma diferente para modos HG quando comparado aos modos LG. Aqui, o campo gerado $U_{2\omega}$ gera um modo dominante carregando índices $m = m' + m''$ e $n = n' + n''$. Utilizando essa propriedade das misturas de dois modos HG, mostramos a possibilidade de converter modos ópticos utilizando este processo não-linear. Se um conjunto de modos é utilizado em cada feixe inicial, teremos uma superposição de modos no campo gerado $U_{2\omega}$ onde, se os modos iniciais forem escolhidos corretamente, ocorrerá uma conversão de modos. Os resultados aqui apresentados, juntamente com avanços no controle espaço-temporal de feixes estruturados [102, 103], são importantes para o desenvolvimento de sistemas de comunicação. Com isso, no próximo capítulo estudaremos a interação não-linear de modos IG.

Capítulo 5

Mistura de feixes Ince-Gauss

Neste capítulo apresentaremos os resultados para a mistura não-linear por duas ondas utilizando modos IG como feixes iniciais. Possivelmente devido à complexidade de se trabalhar matematicamente com os polinômios de Ince, os feixes IG nunca antes foram estudados no contexto de mistura não-linear de ondas. Na Seção 5.1 iremos apresentar a abordagem teórica baseada em funções de Green utilizada neste trabalho. Em seguida, na Seção 5.2, a mistura não-linear de modos IG par e ímpar é então considerada, sendo determinada a regra de seleção referente a tais modos. A Seção 5.3 é utilizada para estudar a mistura não-linear utilizando modos IG helicoidais (HIG) carregando MAO arbitrários. Por final, na Seção 5.4, demonstramos a transição dos modos IG para modos LG e HG, onde variamos o parâmetro de excentricidade ϵ e analisamos como ocorre cada transição sobre o processo de mistura por duas ondas considerando campos iniciais com paridades definidas e carregando MAO.

5.1 Método de função de Green

Para contornar a dificuldade matemática inerente aos polinômios de Ince, iremos apresentar uma abordagem teórica alternativa para o estudo de processos não-lineares baseado no método de função de Green [104]. Partindo da equação paraxial da onda não-homogênea na Eq. 2.53, temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) U_{2\omega} = \frac{ik}{2\epsilon_0} P(U_0), \quad (5.1)$$

onde k é o número de onda, ϵ_0 é a constante dielétrica, P é a polarização e $U_{2\omega}, U_0$ representam os campos gerado e iniciais, respectivamente. Podemos ainda tratar a Eq. 5.1 como um problema de valor inicial e essa teoria pode ser utilizada para modelar vários processos não-lineares como geração de segundo e terceiro harmônico, mistura por quatro ondas e conversão paramétrica espontânea descendente, por exemplo.

Primeiramente, iremos resolver a Eq. 5.1 em sua forma homogênea no espaço livre, ou seja, com $P = 0$. Assim, teremos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right) U_{2\omega} = \hat{L}U = 0, \quad (5.2)$$

com $\hat{L} = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \right)$ e o valor inicial sendo a amplitude do campo incidente U_0 . Utilizando o método de função de Green [105], temos que encontrar a expressão para o propagador K

definido por:

$$\hat{L}K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (z > z'); \quad (5.3)$$

$$K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(r - r')\delta(\phi - \phi') \quad (z = z'); \quad (5.4)$$

$$K \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad (5.5)$$

de tal forma que ao conhecermos K , o problema homogêneo é resolvido:

$$U_{hom} = \int r' dr' d\phi' K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}'')|_{z=z'}. \quad (5.6)$$

Naturalmente, é possível expandir os campos interagentes em qualquer base ortonormal, que aqui vamos chamar $u_{pm}(\mathbf{r})$. Assim, ao expandirmos um feixe paraxial arbitrário $B(\mathbf{r})$ obtemos:

$$B(\mathbf{r}) = \sum_{pm} c_{pm} u_{pm}(\mathbf{r}), \quad (5.7)$$

com $c_{pm} = \int d\mathbf{r} u_{pm}^*(\mathbf{r}) B(\mathbf{r})$. Após substituir a expressão para c_{pm} na Eq. 5.7, obtemos:

$$B(\mathbf{r}) = \int r' dr' d\phi' B(r', \phi', z_0) \left(\sum_{pm} u_{pm}^*(r', \phi', z_0) u_{pm}(r, \phi, z) \right). \quad (5.8)$$

Ao impor $z = z_0$ devido à Eq. 5.4, estabelecemos que:

$$K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \sum_{pm} u_{pm}^*(r', \phi', z) u_{pm}(r, \phi, z). \quad (5.9)$$

Assim, as expressões para o propagador K serão:

$$\hat{L}K = \sum_{pm} u_{pm}^*(\mathbf{r}') \left[\hat{L}u_{pm}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (z > z'); \quad (5.10)$$

$$K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(r - r')\delta(\phi - \phi') \quad (z = z'); \quad (5.11)$$

$$u_{pm} \rightarrow 0 \Rightarrow K \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (5.12)$$

Com isso, solucionamos o problema homogêneo.

Para solucionar o problema não-homogêneo no espaço livre, precisamos trabalhar em uma função de Green definida por:

$$\hat{L}G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(r - r')\delta(\phi - \phi')\delta(z - z'), \quad (5.13)$$

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (z < z'), \quad (5.14)$$

$$G \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad (5.15)$$

tal que quando a expressão para G é conhecida, o problema não-homogêneo é resolvido:

$$U_{nh} = \int r' dr' d\phi' dz' G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{ik}{2\epsilon_0} P(\mathbf{r}'). \quad (5.16)$$

Baseado no método utilizado para resolver o problema homogêneo, vamos definir a função de Green G em termos dos modos da base escolhida:

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \equiv \Theta(z - z') K(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad (5.17)$$

onde $\Theta(z - z')$ representa a função Heaviside. Facilmente se vê que a Eq. 5.17 satisfaz as condições das Eqs. 5.13, 5.14 e 5.15. Portanto, a solução final do problema será a combinação das soluções homogênea e não-homogênea. Podemos ainda notar que a Eq. 5.17 apenas contribui após uma distância $z > z' = z_i$ e, devido à função Heaviside, se reduz ao propagador K . Logo, modificamos a integral em dz para que a contribuição ao longo da propagação comece em z_i até alguma posição z_f . Assim, teremos:

$$\begin{aligned} U &= \int r' dr' d\phi' K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r}')|_{z=z'} + \int_{z_i}^{z_f} dz' \int r' dr' d\phi' K(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \frac{ik}{2\epsilon_0} P(\mathbf{r}') \\ &= U_0 + \sum_{pm} u_{pm}(\mathbf{r}) \int_{z_i}^{z_f} dz' \int r' dr' d\phi' u_{pm}^*(\mathbf{r}') \frac{ik}{2\epsilon_0} P(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Agora que resolvemos o problema, podemos ainda simplificar o resultado utilizando as propriedades da base ortonormal em questão. Vamos expandir o termo de fonte não-linear em termos da base u_{pm} :

$$\frac{ik}{2\epsilon_0} P(\mathbf{r}) = \sum_{pm} c_{pm}(z) u_{pm}(\mathbf{r}), \quad (5.19)$$

onde $c_{pm}(z) = \int r dr d\phi u_{pm}^*(\mathbf{r}) \frac{ik}{2\epsilon_0} P(\mathbf{r})$. Note que aqui, c_{pm} atua como a integral de *overlap* já introduzida anteriormente na Eq. 2.57. É importante ressaltar que os coeficientes da expansão para a fonte não-linear *não são independentes da distância de propagação* z . Assim, após alguma álgebra utilizando a propriedade de ortogonalidade da base, obtemos:

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + \sum_{pm} u_{pm}(\mathbf{r}) \int_{z_i}^{z_f} dz' c_{pm}(z'). \quad (5.20)$$

Note que a Eq. 5.20 representa o mesmo problema apresentado no Capítulo 2, onde o primeiro termo representa os feixes iniciais e o segundo termo está associado ao modos criados através da interação não-linear com o meio. O modelo apresentado nesta seção utiliza uma base ortonormal u_{pm} e uma polarização P arbitrários para resolver o problema porém, como estamos interessados em estudar o processo de mistura por duas ondas utilizando feixes paraxiais elípticos, iremos usar como base os modos IG anteriormente apresentados na Seção 2.1 e o termo de polarização associado à mistura por duas ondas $P(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi^{(2)} U_1(\mathbf{r}) U_2(\mathbf{r})$, considerando um cristal não-linear fino.

5.2 Mistura de modos Ince-Gauss com paridade definida

Aqui estudaremos o processo de mistura por duas ondas utilizando os modos IG, já introduzidos na Seção 2.1. Naturalmente, os modos IG são ortonormais com relação aos índices e à paridade:

$$\int \text{IG}_{pm}^\sigma \overline{\text{IG}}_{p'm'}^{\sigma'} dS = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{p,p'} \delta_{m,m'}, \quad (5.21)$$

onde a barra está associado ao complexo conjugado, $\sigma = \{e, o\}$ é a paridade, δ é a função delta de Kronecker e dS é o elemento diferencial de superfície associado ao plano transversal dos modos em questão. Neste capítulo, devido à complexidade de trabalhar matematicamente com os polinômios de Ince $C_p^m(\cdot, \epsilon)$, $S_p^m(\cdot, \epsilon)$, calculamos numericamente a integral de *overlap*. Para os resultados experimentais, mais uma vez utilizamos o aparato experimental apresentado na Seção 3.2.

Figura 5.1: Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$, (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$. A superposição de modos gerada é mostrada através dos histogramas situados entre os resultados teóricos e experimentais.

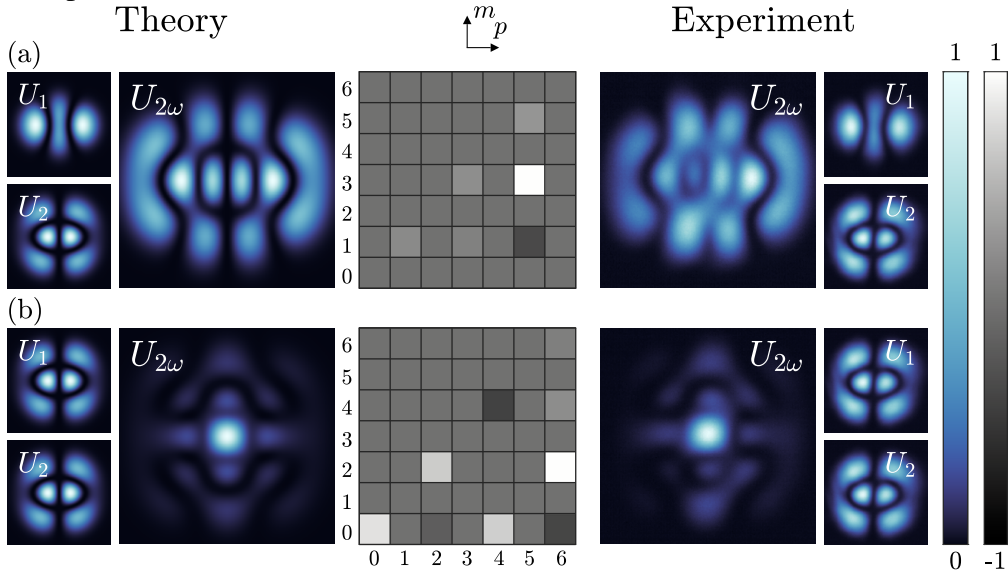
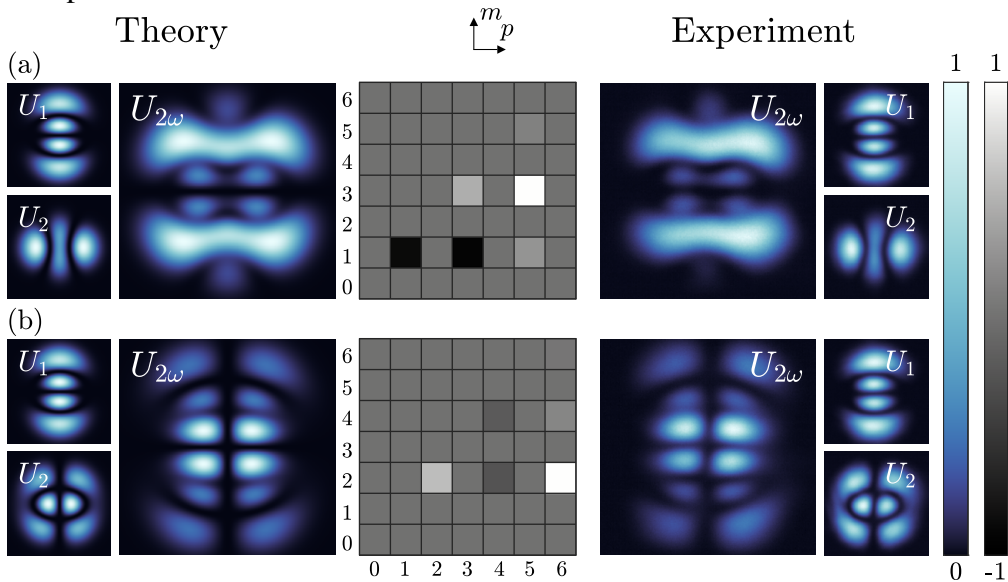
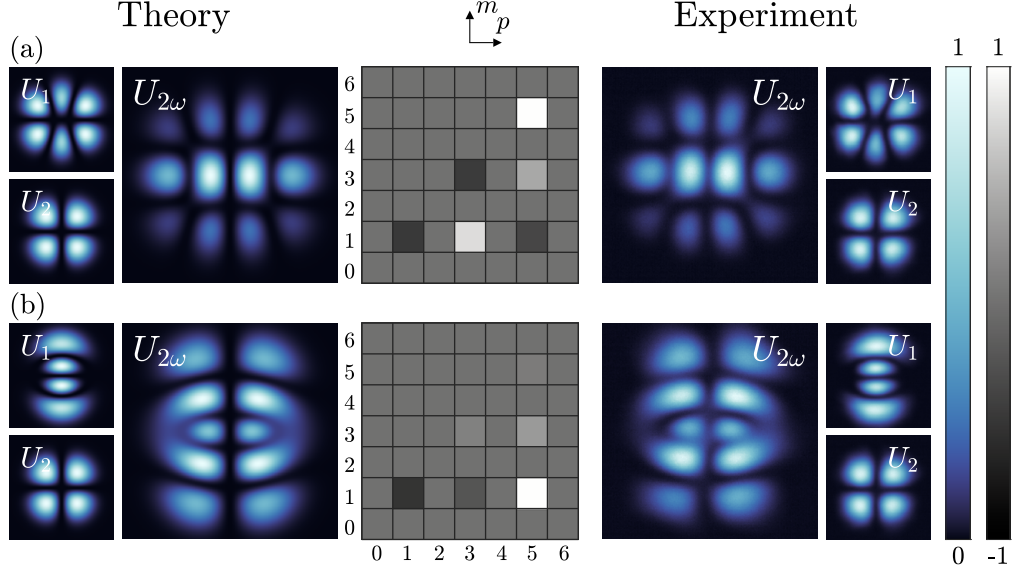


Figura 5.2: Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{22}^e$, (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$. A superposição de modos gerada é mostrada através dos histogramas situados entre os resultados teóricos e experimentais.



Consideramos aqui a mistura não-linear das possíveis combinações de paridade dos modos IG, apresentando resultados teóricos e experimentais. Na Figura 5.1, apresentamos a mistura de modos par-par, onde os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e$, $U_2 = \text{IG}_{31}^e$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e$, $U_2 = \text{IG}_{31}^e$. Misturas par-ímpar são mostradas na Figura 5.2, com feixes incidentes (a) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{22}^e$, (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$. Na Figura 5.3, referente às misturas ímpar-ímpar,

Figura 5.3: Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{IG}_{33}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{22}^o$, (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{22}^o$. A superposição de modos gerada é mostrada através dos histogramas situados entre os resultados teóricos e experimentais.



utilizamos (a) $U_1 = \text{IG}_{33}^o$, $U_2 = \text{IG}_{22}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o$, $U_2 = \text{IG}_{22}^o$ como modos iniciais. Nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 representamos a superposição de modos gerada por histogramas situados entre as janelas dos resultados teóricos e experimentais. Apesar de não termos uma derivação analítica, podemos inferir uma regra de seleção para a mistura de modos IG em processos de mistura por duas-ondas. Considerando uma mistura não-linear de $U_1 = \text{IG}_{p'm'}^{\sigma'}$ e $U_2 = \text{IG}_{p''m''}^{\sigma''}$, esperamos uma superposição de modos em $U_{2\omega}$ com $p < p' + p'' \pmod{2}$, onde para cada valor de p disponível o índice m segue $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$. Adicionalmente, se os modos iniciais tem paridades iguais (diferentes) iremos obter uma paridade par (ímpar) no campo gerado.

5.3 Mistura de modos Ince-Gauss carregando MAO

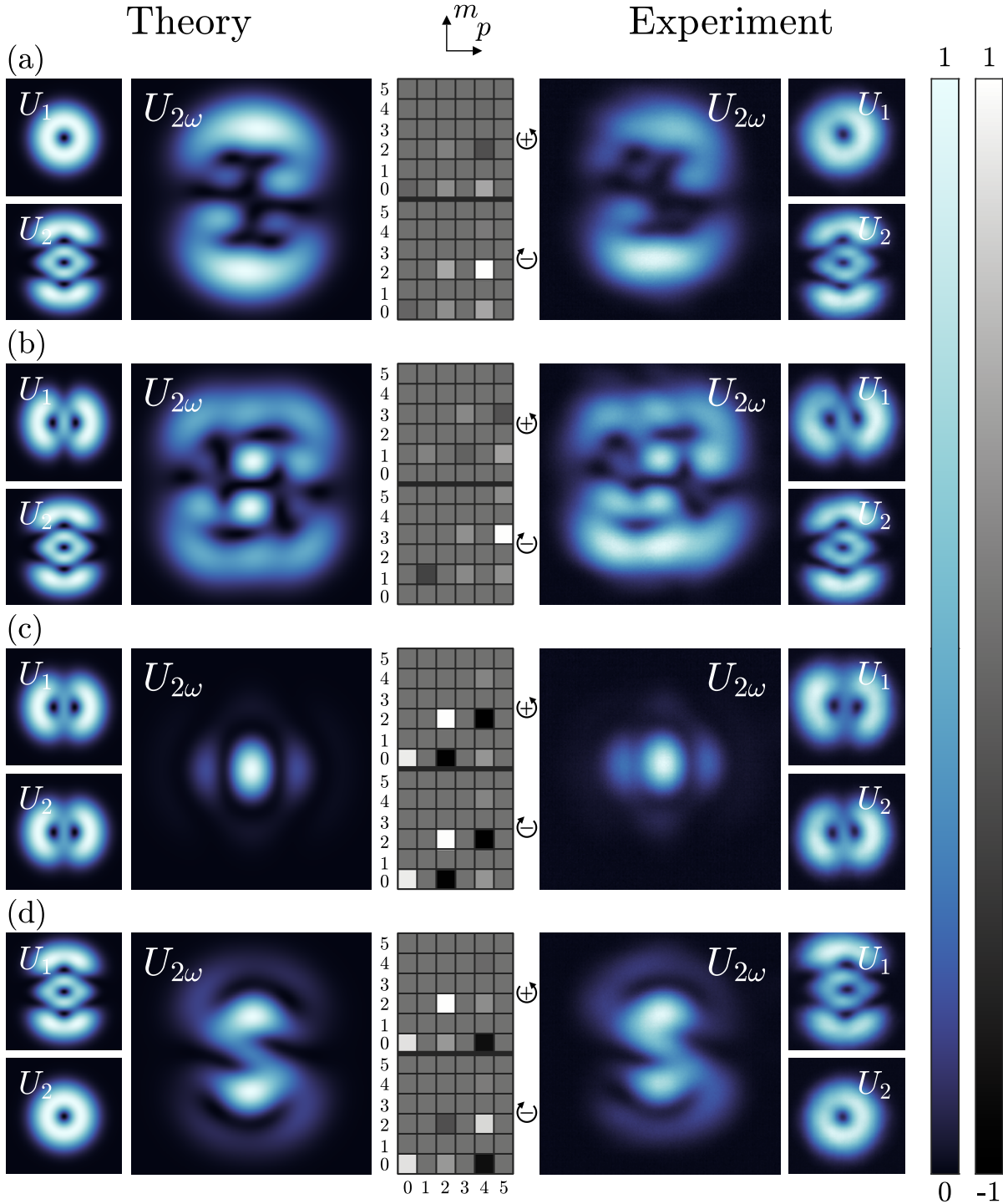
Modos LG completos, i.e., carregando MAO, são caracterizados pela singularidade de fase azimutal expressa por $\exp \pm i l \phi$, cuja frente de onda roda circularmente em torno do eixo de propagação. Ainda podemos expressar tais feixes como a soma de modos LG com paridade definida, como $\text{LG}_{nl} = \text{LG}_{nl}^e + i \text{LG}_{nl}^o$. De forma análoga, definimos os modos IG hélicos (HIG) como [45]:

$$\text{HIG}_{pm}^{\pm}(\mathbf{r}, \epsilon) = \text{IG}_{pm}^e(\mathbf{r}, \epsilon) \pm i \text{IG}_{pm}^o(\mathbf{r}, \epsilon), \quad (5.22)$$

onde agora a frente de onda rotaciona elipticamente em torno da linha definida por $(|x| \leq f, 0, z)$, com direção de rotação definida pelo sinal da Equação 5.22, e m corresponde a carga topológica. Como os feixes IG com paridade ímpar não são definidos para $m = 0$, a Equação 5.22 é definida apenas para $m > 0$.

Os padrões de intensidade para a mistura por duas ondas utilizando modos HIG estão mostrados na Figura 5.4. Para os casos em que o campo resultante carrega MAO, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{HIG}_{11}^+$, $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$ e (b) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$, $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$. Por outro lado, para misturas que resultam em campos sem MAO, utilizamos como modos iniciais (c) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$,

Figura 5.4: Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{HIG}_{11}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (b) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (c) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{22}^-$ and (d) $U_1 = \text{HIG}_{31}^-$ e $U_2 = \text{HIG}_{11}^+$. A superposição de modos gerada é mostrada através dos histogramas para vórtices com sentido positivo e negativo situados entre os resultados teóricos e experimentais.



$U_2 = \text{HIG}_{22}^-$ e (d) $U_1 = \text{HIG}_{31}^-$, $U_2 = \text{HIG}_{11}^+$. Apresentamos também, posicionado entre os resultados teóricos e experimentais, os histogramas referentes à superposição de modos criados

Figura 5.5: Distribuições de fase numericamente calculadas para os feixes gerados considerando os modos iniciais carregando MAO apresentados na Figura 5.4. Aqui, os círculos sólidos vermelhos representam as cargas positivas e os círculos tracejados azuis se referem à cargas negativas.

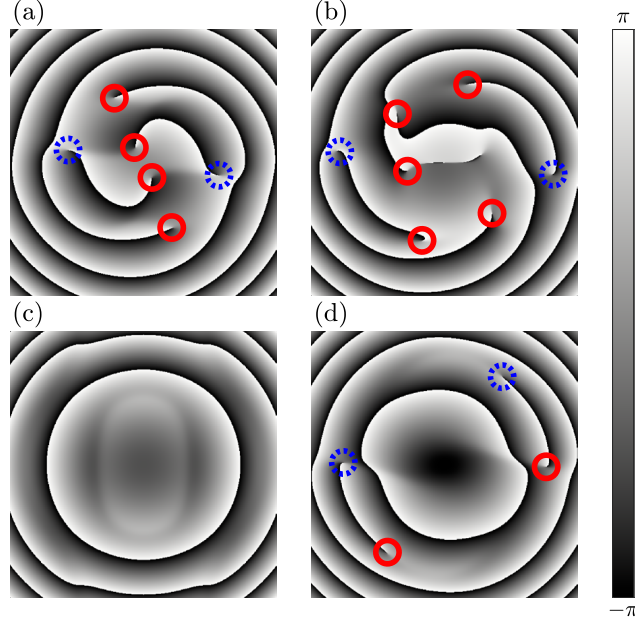


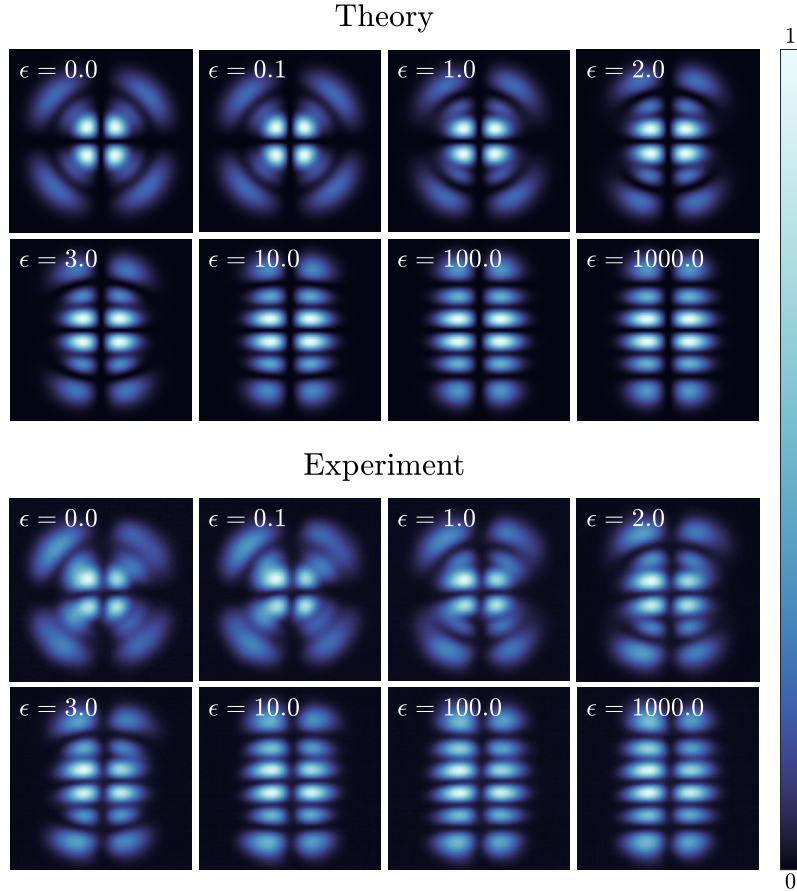
Tabela 5.1: Regras de seleção para feixes paraxiais sobre o processo de mistura por duas ondas, onde $P = \min(|l'|, |l''|)$.

Basis	Order	Selection Rule
$HG_{n_x n_y}$	$N = n_x + n_y$	$n_x \leq n'_x + n''_x \pmod{2}$ $n_y \leq n'_y + n''_y \pmod{2}$
LG_{nl}	$N = 2n + l $	$l = l' + l''$ $n \leq n' + n'' \ (l' \cdot l'' > 0)$ $n \leq P + n' + n'' \ (l' \cdot l'' \leq 0)$
LG_{nl}^σ	$N = 2n + l $	$l = \{ l' - l'' , l' + l'' \}$ $n \leq ((N' + N'') - l)/2$
IG_{pm}^σ	$N = p$	$p \leq p' + p''$ $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$
HIG_{pm}^\pm	$N = p$	$p \leq p' + p''$ $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$ $m_{\text{Net}} = m' + m''$

para vórtices girando em sentido anti-horário (positivo) e horário (negativo).

Baseado no princípio da conservação de MAO, também esperamos que a carga topológica seja conservada no processo de mistura por duas ondas ($m_{\text{Net}} = m' + m''$). Contudo, como o campo gerado $U_{2\omega}$ consiste em uma superposição de modos, métodos experimentais para medir cargas topológicas como difração por uma abertura [106, 107] e método da lente inclinada [99], por exemplo, se tornam não adequados. Neste caso, estudaremos a conservação da carga topológica contando as singularidades apresentadas na distribuição de fase associada à cada padrão de intensidade apresentado na Figura 5.4. Na Figura 5.5 apresentamos as respectivas distribuições de fase, onde as cargas positivas são representadas por círculos sólidos vermelhos,

Figura 5.6: Padrões de intensidade teóricos e experimentais para os vários valores de excentricidade com modos iniciais $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$. Aqui, mostramos a transição entre os modos LG com paridade definida e HG alterando o valor da excentricidade de 0 até 1000.

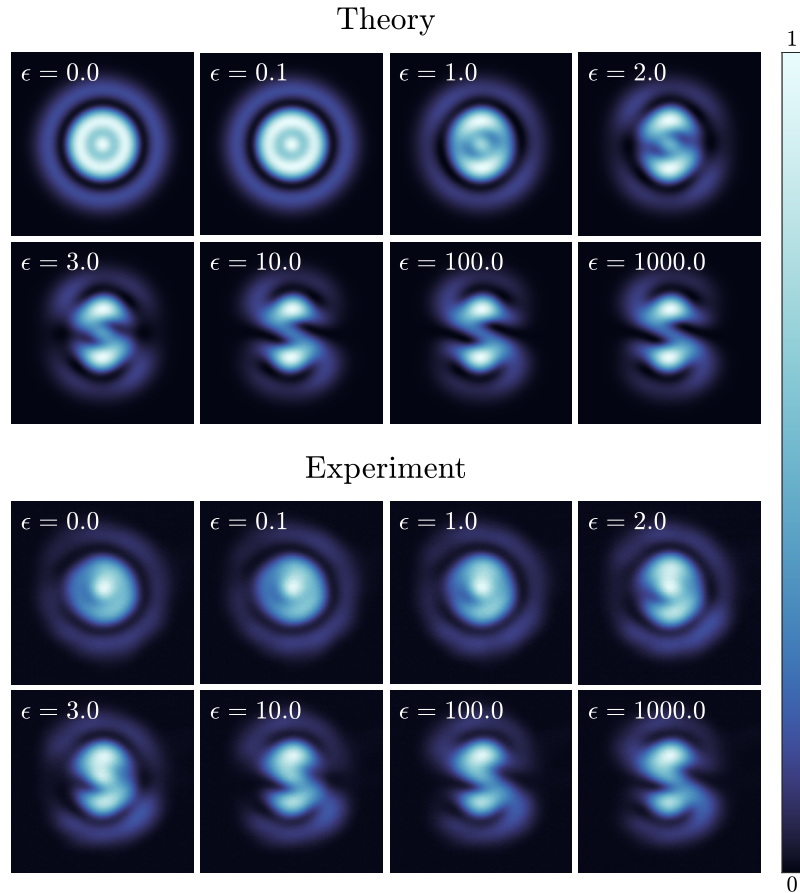


enquanto as cargas negativas estão associadas aos círculos tracejados azuis. Portanto, ao somar as cargas positivas e negativas da Figura 5.5, a conservação de MAO ($m_{Net} = m' + m''$) se torna evidente. Com isso, conseguimos finalizar o estudo de mistura não-linear por duas ondas utilizando feixes paraxiais. As regras de seleção associada a cada modo paraxial estão apresentadas na Tabela 5.1.

5.4 Transição entre modos Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss

Como citado anteriormente na Seção 4.2, é possível transformar um modo $\text{IG}_{pm}^{e,o}$ em outro $\text{LG}_{nl}^{e,o}$ ou HG_{n_x, n_y} ao diminuir ou aumentar o valor do parâmetro de excentricidade ϵ , respectivamente [45]. Para uma transição entre $\text{IG} \leftrightarrow \text{LG}$, os índices se relacionam da forma $p = 2n + l$ e $m = l$. Por outro lado, a transição $\text{IG} \leftrightarrow \text{HG}$ nos leva a dois conjuntos de relações: para modos IG pares temos $n_x = m$ e $n_y = p - m$, enquanto para modos IG ímpares a relação é $n_x = m - 1$ e $n_y = p - m + 1$. Note que em qualquer transição a fase de Gouy permanece a mesma, visto que ela depende da ordem do modo $p = 2n + l = n_x + n_y$. Aqui, mostramos na Figura 5.6 a transição entre os modos $\text{LG} \leftrightarrow \text{IG} \leftrightarrow \text{HG}$ alterando o valor do parâmetro de excentricidade ϵ entre 0 e 1000 considerando como modo inicial $U_1 = \text{IG}_{31}^o$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^e$, os mesmos utilizados na Figura 5.2 (b). Ambos resultados teóricos e experimentais visivelmente mostram uma simetria cilíndrica quando $\epsilon \rightarrow 0$, enquanto a simetria retangular se torna evidente

Figura 5.7: Padrões de intensidade teóricos e experimentais para os vários valores de excentricidade com modos iniciais $U_1 = \text{HIG}_{3-1}$ e $U_2 = \text{HIG}_{11}$. Aqui, mostramos a transição entre os modos LG completo e HG carregando MAO alterando o valor da excentricidade de 0 até 1000.



quando $\epsilon \rightarrow 1000$. Seguindo o mesmo procedimento, apresentamos na Figura 5.7 a transição entre as simetrias cilíndrica e retangular considerando modos carregando MAO. Neste caso, utilizamos como modos iniciais $U_1 = \text{HIG}_{31}^-$ e $U_2 = \text{HIG}_{11}^+$, os mesmos utilizados na Figura 5.4 (d). Aqui, a transição entre modos LG completos e modos HG carregando MAO, passando por alguns modos HIG intermediários, fica evidente ao variarmos o valor de ϵ .

5.5 Resumo do capítulo

Apresentamos neste capítulo o estudo referente à mistura por duas ondas envolvendo modos IG. Através de resultados teóricos e experimentais mostramos a regra de seleção para a mistura de feixes paraxiais elípticos considerando as possíveis combinações de paridade entre eles. Neste caso, considerando modos iniciais $U_1 = \text{IG}_{p'm'}^{\sigma'}$ e $U_2 = \text{IG}_{p''m''}^{\sigma''}$, esperamos uma superposição de modos em $U_{2\omega}$ com $p < p' + p'' \pmod{2}$, onde para cada valor de p disponível o índice m segue $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$, e para modos iniciais com paridades iguais (diferentes) obtemos uma paridade par (ímpar) no campo gerado. A mistura de modos HIG carregando MAO também foi considerada, nos levando à finalização dos estudos fundamentais de mistura por duas ondas envolvendo feixes paraxiais. A transição entre modos $\text{LG} \leftrightarrow \text{IG} \leftrightarrow \text{HG}$ através do valor do parâmetro de excentricidade, tanto para o caso em que os feixes iniciais possuem paridade definida quanto para o caso em que carregam MAO, foi mostrada.

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Considerações finais

Nesta tese apresentamos o processo não-linear de mistura por duas ondas, onde os resultados foram divididos em três partes. Primeiramente, no Capítulo 2, introduzimos uma base teórica necessária para o entendimento do processo de mistura de dois vórtices ópticos.

Iniciamos a apresentação dos resultados no Capítulo 3, onde a mistura de feixes LG foi considerada. Aqui, utilizando vórtices ópticos carregando carga topológica arbitrária e ordens radiais iniciais não-nulas, levantamos uma discussão mais profunda sobre a criação de novas ordens radiais na zona de Fraunhofer pelo processo não-linear aqui considerado. Portanto, em contradição à trabalhos publicados anteriormente, podemos afirmar que um cuidado maior deve ser tomado ao analisar as ordens radiais pela distribuição de intensidade de um campo gerado por mistura por duas ondas. Particularmente para o caso em que os vórtices iniciais carregam cargas topológicas com valores absolutos diferentes, a superposição de campos gerada apresentará uma quantidade de anéis adicionais diferentes quando $p' = 0, p'' \neq 0$ ou $p' \neq 0, p'' = 0$. Isso ocorre pois a integral de *overlap* normalizada assume valores diferentes para os dois casos, levando a uma superposição de modos diferentes no campo gerado, apesar da regra de seleção nos dizer que deveríamos observar o mesmo número de anéis adicionais.

Ainda no Capítulo 3, consideramos a mistura não-linear de dois vórtices carregando cargas topológicas fracionárias com o intuito de observar o nascimento de um vórtice e a formação de novas ordens radiais na zona de Fraunhofer. Para isso, extendemos o cálculo da integral de *overlap* normalizada considerando que os vórtices podem carregar cargas topológicas não-inteiras, nos levando a uma nova regra de seleção. Ao incrementar lentamente a carga topológica de um dos feixes iniciais, podemos observar na distribuição de intensidade do campo distante tanto o nascimento de um vórtice quando a formação de anéis adicionais. Adicionalmente, confirmamos que o procedimento reproduz exatamente o que é previsto na literatura ao analisarmos o padrão de fase de cada mistura aqui considerada.

Partindo para o Capítulo 4, a mistura não-linear de feixes HG é agora considerada. Iniciamos a segunda parte dos resultados apresentando uma propriedade interessante. Ao considerarmos a mistura de dois feixes HG com índices n', m' e n'', m'' , respectivamente, o campo gerado carregará um modo dominante com índices $n = n' + n''$ e $m = m' + m''$. Assim, utilizando essa propriedade, apresentamos uma possível aplicação para este processo não-linear. Se agora considerarmos inicialmente uma superposição de campos, ao invés de um único modo inicial, iremos obter através do cálculo da integral de *overlap* normalizada uma superposição de modos no campo gerado. Logo, se os pesos dos modos iniciais forem escolhidos corretamente, podemos gerar no campo distante uma superposição de modos que representam um outro feixe

expandido na base HG. Isso possibilita a conversão modos HG em modos de diferentes simetrias, como LG e IG, por exemplo. Mostramos como a escolha dos pesos de cada modo inicial deve ser realizada para que seja possível a conversão, juntamente com a limitação do método aqui apresentado.

Por fim, no Capítulo 5 estudamos a mistura não-linear de modos IG. Para isso, utilizamos uma abordagem teórica alternativa que se baseia no método de função de Green. Realizando a mistura de modos IG com paridade definida, conseguimos obter a regra de seleção para tais modos em processos de mistura por duas ondas. Modos HIG carregando MAO arbitrário também foram considerados, completando o estudo fundamental de feixes paraxiais em mistura de duas ondas. A transição entre modos HG e LG também foi mostrado ao alterarmos o valor para o parâmetro de excentricidade dos feixes iniciais, considerando também o caso em que os campos carregam MAO.

6.2 Propostas de continuidade

Ainda se referindo a processos não-lineares de segunda ordem, temos propostas de realizar a mistura de duas ondas utilizando niobato de sódio em pó como meio não-linear. Este é um trabalho inovador pois, baseado nas publicações recentes, a mistura de campos ópticos em meios não-lineares altamente difusivos ainda não foi considerada. Partindo para misturas envolvendo outros tipos de feixes, está em andamento a análise do processo de mistura por duas ondas utilizando feixes não-paraxiais (feixe Bessel, por exemplo). Uma recente colaboração com pesquisadores da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) nos possibilitou expandir os estudos de conversão de frequências aqui realizados para sua utilização em processos de mistura por quatro ondas utilizando vapor de rubídio (Rb^{85}) como meio não-linear.

Outras perspectivas são consideradas envolvendo outros efeitos não-lineares. Baseando-se em um trabalho realizado com a colaboração da Prof. Natalia Litchinitser na Duke University, pretendemos analisar a indução de instabilidade modulacional em feixes carregando MAO ao se propagar em meios com nanocolóides metálicos suspensos. Aqui, o efeito térmico passa a ser importante na dinâmica, juntamente com as propriedades de absorção e espalhamento das nanopartículas metálicas. Ainda neste conceito, a análise teórico-computacional de formação de sólitons em nanocolóides suspensos utilizando feixes Airy está sendo desenvolvida. Por último, a formação de redes ópticas utilizando cristais não-lineares fotorefrativos é outra perspectiva, onde a propagação de feixes estruturados em redes ópticas pode ser estudada.

6.3 Artigos publicados e submetidos pelo autor da tese

6.3.1 Artigos referentes à tese

1. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Optical mode conversion through nonlinear two-wave mixing*. Physical Review A, 100(4), 043819 (2019).
2. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Interaction of fractional orbital angular momentum in two-wave mixing processes*. J. Opt. 22, 035502 (2020).
3. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Higher radial orders of Laguerre-Gaussian beams in two-wave mixing processes* (2020) (aceito no Journal of the Optical Society of America B).
4. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Suitable state basis for nonlinear optical mode conversion protocols* (2020) (submetido para o Optics Letters).
5. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Nonlinear wave-mixing of Ince-Gaussian beams* (2020) (submetido para o Physical Review A).

6.3.2 Outros artigos

1. D. R. B. Valadão, **D. G. Pires**, M. A. R. C. Alencar, J. M. Hickmann, C. Fantini, M. A. Pimenta and E. J. S. Fonseca. *Investigation of the electronic nonlinear refraction index of single-wall carbon nanotubes wrapped with different surfactants*. Optical Materials Express, 2 (6), 749-756 (2012).
2. P. A. Brandão and **D. G. Pires**. *Transmission and reflection of vector Bessel beams through an interface between dielectrics*. Physics Letters A, 381(8), 813-816 (2017).
3. **D. G. Pires**, A. F. Sonsin, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Three-dimensional speckle light self-healing-based imaging system*. Scientific reports, 8(1), 1-6 (2018).
4. **D. G. Pires**, J. C. A. Rocha and P. A. Brandão. *Ergoregion in metamaterials mimicking a Kerr spacetime*. Journal of Optics, 20(2), 025101 (2018).
5. **D. G. Pires**, W. Walasik and N. M. Litchinitser. *Stability analysis of elliptical vortex beams propagating in negative polarizability colloidal suspensions* (2020) (submetido ao Optics Letters).

Bibliografia

- [1] Mike Woerdemann et al. “Advanced optical trapping by complex beam shaping”. Em: *Laser & Photonics Reviews* 7.6 (2013), pp. 839–854.
- [2] Alan E Willner et al. “Optical communications using orbital angular momentum beams”. Em: *Advances in Optics and Photonics* 7.1 (2015), pp. 66–106.
- [3] Les Allen et al. “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”. Em: *Physical Review A* 45.11 (1992), p. 8185.
- [4] Alison M Yao e Miles J Padgett. “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications”. Em: *Advances in Optics and Photonics* 3.2 (2011), pp. 161–204.
- [5] JM Hickmann, EJS Fonseca e AJ Jesus-Silva. “Born’s rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit”. Em: *EPL (Europhysics Letters)* 96.6 (2011), p. 64006.
- [6] Miles Padgett e Richard Bowman. “Tweezers with a twist”. Em: *Nature photonics* 5.6 (2011), p. 343.
- [7] Xiaoyan Y. Z. Xiong et al. “Mixing of spin and orbital angular momenta via second-harmonic generation in plasmonic and dielectric chiral nanostructures”. Em: *Phys. Rev. B* 95 (16 2017), p. 165432.
- [8] Miles J Padgett e Johannes Courtial. “Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum”. Em: *Optics letters* 24.7 (1999), pp. 430–432.
- [9] DP Caetano et al. “Quantum image control through polarization entanglement in parametric down-conversion”. Em: *Physical Review A* 68.2 (2003), p. 023805.
- [10] CER Souza et al. “Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam”. Em: *Physical review letters* 99.16 (2007), p. 160401.
- [11] Eleonora Nagali et al. “Quantum information transfer from spin to orbital angular momentum of photons”. Em: *Physical review letters* 103.1 (2009), p. 013601.
- [12] B Neethi Simon et al. “Nonquantum entanglement resolves a basic issue in polarization optics”. Em: *Physical review letters* 104.2 (2010), p. 023901.
- [13] Annemarie Holleczek et al. “Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light”. Em: *Optics express* 19.10 (2011), pp. 9714–9736.
- [14] Filippo Cardano et al. “Polarization pattern of vector vortex beams generated by q-plates with different topological charges”. Em: *Applied optics* 51.10 (2012), pp. C1–C6.
- [15] Giovanni Milione et al. “Measuring the self-healing of the spatially inhomogeneous states of polarization of vector Bessel beams”. Em: *Journal of Optics* 17.3 (2015), p. 035617.

- [16] B Pinheiro da Silva et al. “Spin-orbit mode transfer via a classical analog of quantum teleportation”. Em: *arXiv preprint arXiv:1509.06826* (2015).
- [17] Jérémie Harris et al. “Structured quantum waves”. Em: *Nature Physics* 11.8 (2015), pp. 629–634.
- [18] Christian Maurer et al. “What spatial light modulators can do for optical microscopy”. Em: *Laser & Photonics Reviews* 5.1 (2011), pp. 81–101.
- [19] Victor Galitski e Ian B Spielman. “Spin–orbit coupling in quantum gases”. Em: *Nature* 494.7435 (2013), pp. 49–54.
- [20] L Aolita e SP Walborn. “Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states”. Em: *Physical review letters* 98.10 (2007), p. 100501.
- [21] Lixiang Chen e Weilong She. “Teleportation of a controllable orbital angular momentum generator”. Em: *Physical Review A* 80.6 (2009), p. 063831.
- [22] Julio T Barreiro, Tzu-Chieh Wei e Paul G Kwiat. “Remote preparation of single-photon “hybrid” entangled and vector-polarization states”. Em: *Physical review letters* 105.3 (2010), p. 030407.
- [23] Vincenzo D’ambrosio et al. “Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication”. Em: *Nature communications* 3 (2012), p. 961.
- [24] AZ Khoury e P Milman. “Quantum teleportation in the spin-orbit variables of photon pairs”. Em: *Physical Review A* 83.6 (2011), p. 060301.
- [25] Seyed Mohammad Hashemi Rafsanjani et al. “State transfer based on classical nonseparability”. Em: *Physical Review A* 92.2 (2015), p. 023827.
- [26] Manuel Erhard et al. “Real-time imaging of spin-to-orbital angular momentum hybrid remote state preparation”. Em: *Physical Review A* 92.2 (2015), p. 022321.
- [27] Diego Guzman-Silva et al. “Demonstration of local teleportation using classical entanglement”. Em: *Laser & Photonics Reviews* 10.2 (2016), pp. 317–321.
- [28] B Pinheiro da Silva et al. “Spin–orbit laser mode transfer via a classical analogue of quantum teleportation”. Em: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 49.5 (2016), p. 055501.
- [29] CER Souza et al. “Quantum key distribution without a shared reference frame”. Em: *Physical Review A* 77.3 (2008), p. 032345.
- [30] AN De Oliveira, SP Walborn e CH Monken. “Implementing the Deutsch algorithm with polarization and transverse spatial modes”. Em: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 7.9 (2005), p. 288.
- [31] CER Souza e AZ Khoury. “A Michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter”. Em: *Optics express* 18.9 (2010), pp. 9207–9212.
- [32] ARC Pinheiro et al. “Vector vortex implementation of a quantum game”. Em: *JOSA B* 30.12 (2013), pp. 3210–3214.
- [33] Malena Hor-Meyll et al. “Environment-induced entanglement with a single photon”. Em: *Physical Review A* 80.4 (2009), p. 042327.
- [34] Falk Töppel et al. “Classical entanglement in polarization metrology”. Em: *New Journal of Physics* 16.7 (2014), p. 073019.

- [35] Melanie McLaren, Thomas Konrad e Andrew Forbes. “Measuring the nonseparability of vector vortex beams”. Em: *Physical Review A* 92.2 (2015), p. 023833.
- [36] Bienvenu Ndagano et al. “Characterizing quantum channels with non-separable states of classical light”. Em: *Nature Physics* 13.4 (2017), pp. 397–402.
- [37] MV Berry. “Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps”. Em: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 6.2 (2004), p. 259.
- [38] Alcenisio J Jesus-Silva, Eduardo JS Fonseca e Jandir M Hickmann. “Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone”. Em: *Optics letters* 37.21 (2012), pp. 4552–4554.
- [39] Robert Charles Devlin et al. “Spin-to-orbital angular momentum conversion in dielectric metasurfaces”. Em: *Optics express* 25.1 (2017), pp. 377–393.
- [40] Kun Huang et al. “Spiniform phase-encoded metagratings entangling arbitrary rational-order orbital angular momentum”. Em: *Light: Science & Applications* 7.3 (2018), pp. 17156–17156.
- [41] Peng Chen et al. “Arbitrary and reconfigurable optical vortex generation: a high-efficiency technique using director-varying liquid crystal fork gratings”. Em: *Photonics Research* 3.4 (2015), pp. 133–139.
- [42] Peng Chen et al. “Generation of equal-energy orbital angular momentum beams via photopatterned liquid crystals”. Em: *Physical Review Applied* 5.4 (2016), p. 044009.
- [43] Holger Laabs e Ari T Friberg. “Nonparaxial eigenmodes of stable resonators”. Em: *IEEE journal of quantum electronics* 35.2 (1999), pp. 198–207.
- [44] Sandile Ngcobo et al. “Exciting higher-order radial Laguerre–Gaussian modes in a diode-pumped solid-state laser resonator”. Em: *Applied optics* 52.10 (2013), pp. 2093–2101.
- [45] Miguel A Bandres e Julio C Gutiérrez-Vega. “Ince–Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators”. Em: *JOSA A* 21.5 (2004), pp. 873–880.
- [46] K Dholakia et al. “Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light”. Em: *Physical Review A* 54.5 (1996), R3742.
- [47] A Berzanskis et al. “Conversion of topological charge of optical vortices in a parametric frequency converter”. Em: *Optics communications* 140.4-6 (1997), pp. 273–276.
- [48] Catherine Schwob et al. “Transverse effects and mode couplings in OPOs”. Em: *Applied Physics B* 66.6 (1998), pp. 685–699.
- [49] Marcelo Martinelli et al. “Orbital angular momentum exchange in an optical parametric oscillator”. Em: *Physical Review A* 70.1 (2004), p. 013812.
- [50] B Coutinho Dos Santos, AZ Khoury e JAO Huguenin. “Transfer of orbital angular momentum in a multimode parametric oscillator”. Em: *Optics letters* 33.23 (2008), pp. 2803–2805.
- [51] A Aadhi et al. “Controlled switching of orbital angular momentum in an optical parametric oscillator”. Em: *Optica* 4.3 (2017), pp. 349–355.
- [52] SP Walborn et al. “Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion”. Em: *Physical Review A* 69.2 (2004), p. 023811.
- [53] Eleonora Nagali e Fabio Sciarrino. “Generation of hybrid polarization-orbital angular momentum entangled states”. Em: *Optics express* 18.17 (2010), pp. 18243–18248.

- [54] Alon Bahabad e Ady Arie. “Generation of optical vortex beams by nonlinear wave mixing”. Em: *Optics express* 15.26 (2007), pp. 17619–17624.
- [55] Thomas Roger et al. “Non-collinear interaction of photons with orbital angular momentum”. Em: *Scientific reports* 3 (2013), p. 3491.
- [56] JWR Tabosa e DV Petrov. “Optical pumping of orbital angular momentum of light in cold cesium atoms”. Em: *Physical review letters* 83.24 (1999), p. 4967.
- [57] S Barreiro e JWR Tabosa. “Generation of light carrying orbital angular momentum via induced coherence grating in cold atoms”. Em: *Physical review letters* 90.13 (2003), p. 133001.
- [58] G Walker, AS Arnold e S Franke-Arnold. “Trans-spectral orbital angular momentum transfer via four-wave mixing in Rb vapor”. Em: *Physical review letters* 108.24 (2012), p. 243601.
- [59] JV Hajnal. “Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves. I. Theory”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 414.1847 (1987), pp. 433–446.
- [60] JV Hajnal. “Singularities in the transverse fields of electromagnetic waves. II. Observations on the electric field”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 414.1847 (1987), pp. 447–468.
- [61] MV Berry e MR Dennis. “Polarization singularities in isotropic random vector waves”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 457.2005 (2001), pp. 141–155.
- [62] JV Hajnal. “Observations of singularities in the electric and magnetic fields of freely propagating microwaves”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 430.1879 (1990), pp. 413–421.
- [63] John Frederick Nye. *Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations*. CRC Press, 1999.
- [64] Michael V Berry. “Singularities in waves and rays”. Em: *Physics of Defects* 35 (1981), pp. 453–543.
- [65] Anthony E Siegman. “Lasers university science books”. Em: *Mill Valley, CA* 37.208 (1986), p. 169.
- [66] H He et al. “Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity”. Em: *Physical review letters* 75.5 (1995), p. 826.
- [67] Stephen H Simpson e Simon Hanna. “Rotation of absorbing spheres in Laguerre-Gaussian beams”. Em: *JOSA A* 26.1 (2009), pp. 173–183.
- [68] Graham Gibson et al. “Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum”. Em: *Optics express* 12.22 (2004), pp. 5448–5456.
- [69] Fabrizio Tamburini et al. “Encoding many channels on the same frequency through radio vorticity: first experimental test”. Em: *New Journal of Physics* 14.3 (2012), p. 033001.
- [70] Simin Feng e Herbert G Winful. “Physical origin of the Gouy phase shift”. Em: *Optics letters* 26.8 (2001), pp. 485–487.
- [71] Robert W Boyd. “Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams”. Em: *JOSA* 70.7 (1980), pp. 877–880.

- [72] P Hariharan e PA Robinson. “The Gouy phase shift as a geometrical quantum effect”. Em: *Journal of Modern Optics* 43.2 (1996), pp. 219–221.
- [73] Michael Victor Berry. “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”. Em: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 392.1802 (1984), pp. 45–57.
- [74] D Subbarao. “Topological phase in Gaussian beam optics”. Em: *Optics letters* 20.21 (1995), pp. 2162–2164.
- [75] R Simon e N Mukunda. “Bargmann invariant and the geometry of the Gouy effect”. Em: *Physical review letters* 70.7 (1993), p. 880.
- [76] Hermann A Haus. *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
- [77] Isidoro Kimel e Luis R Elias. “Relations between hermite and laguerre gaussian modes”. Em: *IEEE Journal of quantum electronics* 29.9 (1993), pp. 2562–2567.
- [78] Anna T O’Neil e Johannes Courtial. “Mode transformations in terms of the constituent Hermite–Gaussian or Laguerre–Gaussian modes and the variable-phase mode converter”. Em: *Optics communications* 181.1-3 (2000), pp. 35–45.
- [79] CP Boyer, Ernie G Kalnins e W Miller Jr. “Lie theory and separation of variables. 7. The harmonic oscillator in elliptic coordinates and Ince polynomials”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 16.3 (1975), pp. 512–517.
- [80] RD Guenther. “Modern Optics John Wiley & Sons”. Em: *Inc., New York* (1990).
- [81] Dennis Gabor. “Holography, 1948-1971”. Em: *Science* 177.4046 (1972), pp. 299–313.
- [82] GA Turnbull et al. “The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate”. Em: *Optics communications* 127.4-6 (1996), pp. 183–188.
- [83] YF Chen et al. “Generation of Hermite-Gaussian modes in fiber-coupled laser-diode end-pumped lasers”. Em: *IEEE journal of quantum electronics* 33.6 (1997), pp. 1025–1031.
- [84] HS Eisenberg et al. “Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays”. Em: *Physical Review Letters* 81.16 (1998), p. 3383.
- [85] N Imoto, HA Haus e Y Yamamoto. “Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect”. Em: *Physical Review A* 32.4 (1985), p. 2287.
- [86] Wieslaw Krolikowski et al. “Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media”. Em: *Physical Review E* 64.1 (2001), p. 016612.
- [87] JE Midwinter e J Warner. “The effects of phase matching method and of uniaxial crystal symmetry on the polar distribution of second-order non-linear optical polarization”. Em: *British Journal of Applied Physics* 16.8 (1965), p. 1135.
- [88] Leonardo J Pereira et al. “Orbital-angular-momentum mixing in type-II second-harmonic generation”. Em: *Physical Review A* 96.5 (2017), p. 053856.
- [89] CK Hsueh e AA Sawchuk. “Computer-generated double-phase holograms”. Em: *Applied optics* 17.24 (1978), pp. 3874–3883.
- [90] Omel Mendoza-Yero, Gladys Miénguez-Vega e Jesús Lancis. “Encoding complex fields by using a phase-only optical element”. Em: *Optics letters* 39.7 (2014), pp. 1740–1743.

- [91] Rafael Piestun e David AB Miller. “Electromagnetic degrees of freedom of an optical system”. Em: *JOSA A* 17.5 (2000), pp. 892–902.
- [92] GB Alves et al. “Conditions for optical parametric oscillation with a structured light pump”. Em: *Physical Review A* 98.6 (2018), p. 063825.
- [93] Takayuki Ohtomo, Shu-Chun Chu e Kenju Otsuka. “Generation of vortex beams from lasers with controlled Hermite-and Ince-Gaussian modes”. Em: *Optics express* 16.7 (2008), pp. 5082–5094.
- [94] Shu-Chun Chu e Kenju Otsuka. “Stable donutlike vortex beam generation from lasers with controlled Ince-Gaussian modes”. Em: *Applied optics* 46.31 (2007), pp. 7709–7719.
- [95] Benjamin Brecht et al. “From quantum pulse gate to quantum pulse shaper—engineered frequency conversion in nonlinear optical waveguides”. Em: *New Journal of Physics* 13.6 (2011), p. 065029.
- [96] Paritosh Manurkar et al. “Programmable optical waveform reshaping on a picosecond timescale”. Em: *Optics letters* 42.5 (2017), pp. 951–954.
- [97] Dileep V Reddy e Michael G Raymer. “Photonic temporal-mode multiplexing by quantum frequency conversion in a dichroic-finesse cavity”. Em: *Optics express* 26.21 (2018), pp. 28091–28103.
- [98] Vahid Ansari et al. “Tomography and purification of the temporal-mode structure of quantum light”. Em: *Physical review letters* 120.21 (2018), p. 213601.
- [99] Pravin Vaity, J Banerji e RP Singh. “Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens”. Em: *Physics letters a* 377.15 (2013), pp. 1154–1156.
- [100] Jeffrey C Lagarias et al. “Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions”. Em: *SIAM Journal on optimization* 9.1 (1998), pp. 112–147.
- [101] Charles George Broyden. “The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations”. Em: *IMA Journal of Applied Mathematics* 6.1 (1970), pp. 76–90.
- [102] B Brecht et al. “Photon temporal modes: a complete framework for quantum information science”. Em: *Physical Review X* 5.4 (2015), p. 041017.
- [103] Bereneice Sephton et al. “Spatial mode detection by frequency upconversion”. Em: *Optics letters* 44.3 (2019), pp. 586–589.
- [104] R Nicholas Lanning et al. “Gaussian-beam-propagation theory for nonlinear optics involving an analytical treatment of orbital-angular-momentum transfer”. Em: *Physical Review A* 96.1 (2017), p. 013830.
- [105] György Barton e Gabriel Barton. *Elements of Green’s functions and propagation: potentials, diffusion, and waves*. Oxford University Press, 1989.
- [106] Leandro A Melo et al. “Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture”. Em: *Scientific reports* 8.1 (2018), pp. 1–8.
- [107] JM Hickmann et al. “Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light’s orbital angular momentum”. Em: *Physical review letters* 105.5 (2010), p. 053904.

- [108] Anthony Gerrard e James M Burch. *Introduction to matrix methods in optics*. Courier Corporation, 1994.

Apêndice A

Cálculo da integral de *overlap* para os modos Laguerre-Gauss

Aqui calcularemos explicitamente as expressões para a integral de *overlap* considerando a mistura não-linear de modos LG carregando MAO e ordens radiais arbitrários. Substituindo a Equação 2.13 na Equação 2.57:

$$R_{pp'p''}^{ll'l''} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3}} \frac{M_{pl}M_{p'l'}M_{p''l''}}{w_{2\omega}w_1w_2} \int_0^\infty r dr \frac{(\sqrt{2}r)^{|l|+|l'|+|l''|}}{w_{2\omega}^{|l|}w_1^{|l'|}w_2^{|l''|}} \times L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right) L_{p'}^{|l'|} \left(\frac{2r^2}{w_1^2} \right) L_{p''}^{|l''|} \left(\frac{2r^2}{w_2^2} \right) e^{-\left(\frac{r^2}{w_{2\omega}^2} + \frac{r^2}{w_1^2} + \frac{r^2}{w_2^2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(l-l'-l'')\theta}. \quad (\text{A.1})$$

Facilmente se vê que as condições de casamentos de fase ($k_{2\omega} = k_1 + k_2$) e de frente de onda ($z_{R2\omega} = z_{R1} = z_{R2}$) geram o cancelamento de alguns termos na equação acima e cria uma relação entre os diâmetros dos feixes:

$$\frac{1}{w_{2\omega}^2} = \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2}, \quad (\text{A.2})$$

além de explicitar a conservação das cargas topológicas $l = l' + l''$ através da integral em θ .

Após realizar a mudança de variável $x = 2r^2/w_{2\omega}^2$ e $\xi_j = (w_{2\omega}/w_j)^2$, com $j = 1, 2$ representando os feixes iniciais, obtemos:

$$R_{pp'p''}^{ll'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{pl}M_{p'l'}M_{p''l''}}{w_{2\omega}^{|l|+|l'|+|l''|+1}} \sqrt{\xi_1^{|l|+1}\xi_2^{|l''|+1}} \times \int_0^\infty dx (w_{2\omega}\sqrt{x})^{|l|+|l'|+|l''|} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(\xi_1 x) L_{p''}^{|l''|}(\xi_2 x) e^{-x} \quad (\text{A.3})$$

$$= \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{pl}M_{p'l'}M_{p''l''}}{w_{2\omega}} \sqrt{\xi_1^{|l|+1}\xi_2^{|l''|+1}} \times \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(\xi_1 x) L_{p''}^{|l''|}(\xi_2 x) e^{-x}.$$

Para normalizar a Equação A.3 faremos uso do *overlap* fundamental:

$$R_{000}^{000} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\xi_1\xi_2}}{w_{2\omega}}, \quad (\text{A.4})$$

que nos leva à integral normalizada de *overlap*:

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} &= \frac{R_{pp'p''}^{l'l''}}{R_{000}^{000}} = \delta_{l,l'+l''} M_{pl} M_{p'l'} M_{p''l''} \sqrt{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|}} \\ &\times \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(\xi_1 x) L_{p''}^{|l''|}(\xi_2 x) e^{-x}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Agora, continuaremos a derivação das expressões separando em duas situações: considerando os modos LG iniciais com ordens radiais nulas e não-nulas.

A.1 Ordens radiais iniciais nulas

Considerando $p' = p'' = 0$, podemos reduzir a Equação A.5 fazendo uso de:

$$\begin{aligned} L_0^{|l'|} &= L_0^{|l''|} = 1, \\ M_{0l'} &= \frac{1}{\sqrt{|l'|!}}, \\ M_{0l''} &= \frac{1}{\sqrt{|l''|!}}, \\ P = \min(|l'|, |l''|) &= \frac{|l'| + |l''| - |l' + l''|}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Assim, a integral normalizada de *overlap* é simplificada para:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \sqrt{\frac{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|} p!}{(p + |l' + l''|)! |l'|! |l''|!}} \int_0^\infty dx x^{P+|l'+l''|} L_p^{|l'+l''|}(x) e^{-x}, \quad (\text{A.7})$$

no qual já foi aplicada a delta de Kronecker associada à conservação de carga topológica $\delta_{l,l'+l''}$ e, por isso, foi omitido o índice l em $\Lambda_{p00}^{l'l''}$. Agora, utilizando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre,

$$\int_0^\infty x^k L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{n,m}, \quad (\text{A.8})$$

e a expansão do monômio em termos dos polinômios de Laguerre,

$$x^P = \sum_{m=0}^P \frac{(-1)^m P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} L_m^k(x), \quad (\text{A.9})$$

obtemos a expressão:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \frac{(-1)^P P!(P + |l' + l''|)!}{(P-p)!} \sqrt{\frac{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|}}{p!(p + |l' + l''|)! |l'|! |l''|!}} \quad (\text{A.10})$$

para $(p \leq P)$ e $\Lambda_{p00}^{l'l''} = 0$ para $p > P$.

Devemos agora tratar duas situações diferentes a depender das helicidades relativas entre os feixes iniciais, i.e., a depender o sinal das cargas topológicas associadas aos modos incidentes. Assim, obtemos as regras de seleção para os vórtices co-rotacionando e contra-rotacionando. Para o caso em que os vórtices co-rotacionam ($l' \cdot l'' > 0$), obtemos:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \sqrt{\frac{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|} (|l' + l''|)!}{|l'|! |l''|!}}, \quad (\text{A.11})$$

para $p = 0$ e $\Lambda_{p00}^{l'l''} = 0$ para $p > 0$. Aqui, $P = 0$ e não há ordens radiais adicionais criadas no campo gerado pelo processo de mistura não-linear. Quando os vórtices contra-rotacionam ($l' \cdot l'' \leq 0$) obtemos:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \frac{(-1)^P}{(P-p)!} \sqrt{\frac{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|} |l'|! |l''|!}{p!(p+|l'+l''|)!}}, \quad (\text{A.12})$$

para $p \leq P$ e $\Lambda_{p00}^{l'l''} = 0$ para $p > P$. Neste caso, $P = \min(|l'|, |l''|)$ e novas ordens radiais são criadas até o valor mínimo entre $|l'|$ e $|l''|$.

A.2 Ordens radiais iniciais não-nulas

Com o intuito de generalizar a expressão para a regra de seleção, vamos considerar agora que as ordens radiais iniciais dos modos incidentes são não-nulos ($p' = p'' \neq 0$). Com isso, alguns passos são adicionados na derivação para a expressão de $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$. Primeiramente, vamos aplicar a seguinte expansão para os polinômios de Laguerre na Eq. A.5:

$$L_p^l(x) = \sum_{m=0}^p (-1)^m \frac{(p+l)!}{(p-m)!(l+m)!} \frac{x^m}{m!}, \quad (\text{A.13})$$

a fim de obter:

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} &= \delta_{l,l'+l''} M_{pl} M_{p'l'} M_{p''l''} \sqrt{\xi_1^{|l'|} \xi_2^{|l''|}} \int_0^\infty dx x^{\frac{|l'+l''|+|l'|}{2}} L_p^{|l|}(x) \\ &\times \sum_{m=0}^{p'} \frac{(-1)^m (p'+l')!}{(p'-m)!(l'+m)!} \frac{(\xi_1 x)^m}{m!} \sum_{n=0}^{p''} \frac{(-1)^n (p''+l'')!}{(p''-n)!(l''+n)!} \frac{(\xi_2 x)^n}{n!} e^{-x} \\ &= \delta_{l,l'+l''} M_{pl} M_{p'l'} M_{p''l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_1^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_2^{\frac{|l''|}{2}+n} \\ &\times \frac{(-1)^{m+n} (p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{m!n!(p'-m)!(|l'|+m)!(p''-n)!(|l''|+n)!} \int_0^\infty dx x^{|l'+l''|+P+m+n} L_p^{|l|}(x) e^{-x}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Fazendo uso de $M_{pl} = \sqrt{p!/(p+|l|)!}$, da expansão apresentada na Equação A.9 e da propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre (Equação A.8), chegamos na expressão para a integral de *overlap* normalizada:

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} &= \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_1^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_2^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p'+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \\ &\times \frac{(-1)^{P+m+n} (P+m+n)! (|l'+l''+P+m+n|)!}{m!n!(p'-m)!(|l'|+m)!(p''-n)!(|l''|+n)!(P+m+n-p)!}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

para $p \leq P + m + n$ e $\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = 0$ para $p > P + m + n$. Novamente, aqui separamos os comportamentos da integral de *overlap* para vórtices co-rotacionando e contra-rotacionando. Para os modos co-rotacionando ($l' \cdot l'' > 0, P = 0$), obtemos:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_1^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_2^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p'+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \quad (\text{A.16})$$

$$\times \frac{(-1)^{m+n}(m+n)!(|l'+l''+m+n|)!}{m!n!(p'-m)!(|l'|+m)!(p''-n)!(|l''|+n)!(m+n-p)!},$$

para $p \leq m + n$ e $\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = 0$ para $p > m + n$. Utilizando vórtices contra-rotacionando ($l' \cdot l'' \leq 0$), a integral de *overlap* normalizada resulta em:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_1^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_2^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p'+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \quad (\text{A.17})$$

$$\times \frac{(-1)^{P+m+n}(P+m+n)!(|l'+l''+P+m+n|)!}{m!n!(p'-m)!(|l'|+m)!(p''-n)!(|l''|+n)!(P+m+n-p)!},$$

para $p \leq P + m + n$ e $\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = 0$ para $p > P + m + n$. Neste caso em que as ordens radiais iniciais são não-nulas, novas ordens radiais são criadas independentemente se os vórtices co-rotacionam ou contra-rotacionam. Note que o procedimento para obter a expressão referente à vórtices interagindo carregando MAO fracionário segue igualmente ao realizado nesta seção, porém a expansão na Equação A.9 se torna $x^{P+m+n} = \sum_{k=0}^{\lfloor P \rfloor + m+n} c_k L_k^q(x)$, onde $c_k = (\lfloor P \rfloor + m + n)!(q + \lfloor P \rfloor + m + n)! / (\lfloor P \rfloor + m + n - k)!(q + k)!$. Como P pode assumir valores não-inteiros e cada passo k assume apenas valores inteiros, temos que utilizar a função piso.

Apêndice B

Cálculo da integral de *overlap* para os modos Hermite-Gauss

Agora iremos realizar os cálculos a fim de obter a expressão para a integral de *overlap* normalizada referente aos modos Hermite-Gauss dada pela Equação 4.5. Primeiramente faremos uso da seguinte relação para a função geradora dos polinômios de Hermite:

$$H_n(\gamma x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\exp(2\gamma x t - t^2)] \Big|_{t=0}, \quad (\text{B.1})$$

que ao substituirmos na integral envolvendo três polinômios de Hermite na Equação 2.57 obtemos:

$$\begin{aligned} \int dx e^{-x^2} H_m(x) H_p(\gamma_1 x) H_r(\gamma_2 x) &= \sqrt{\pi} \frac{\partial^m}{\partial t_0^m} \frac{\partial^p}{\partial t_1^p} \frac{\partial^r}{\partial t_2^r} \\ &\times \int dx e^{-x^2} e^{2x(t_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) - (t_0^2 + t_1^2 + t_2^2)} \Big|_{t_i=0}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde a integral acima resulta em:

$$\int dx e^{-x^2} e^{2x(t_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) - (t_0^2 + t_1^2 + t_2^2)} = \sqrt{\pi} e^{(t_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)^2 - (t_0^2 + t_1^2 + t_2^2)}. \quad (\text{B.3})$$

Aqui, podemos simplificar o cálculo da integral de *overlap* normalizado para o caso em que o diâmetro dos feixes são iguais ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1/\sqrt{2}$). Assim, após derivar a expressão m vezes para a coordenada x e n vezes para a coordenada y e fazer $t_0 = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,p,r}^{n,q,s} &= \Lambda_{000}^{000} D_{m,p,r}^{n,q,s} \frac{\partial^{p+r}}{\partial t_1^p \partial t_2^r} \left[(t_1 + t_2)^m e^{-(t_1 - t_2)^2/2} \right] \Big|_{t_i=0} \\ &\times \frac{\partial^{q+s}}{\partial t_1^q \partial t_2^s} \left[(t_1 + t_2)^n e^{-(t_1 - t_2)^2/2} \right] \Big|_{t_i=0}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

com $D_{m,p,r}^{n,q,s} = \sqrt{2^{-(m+p+r+n+q+s)}/m!p!r!n!q!s!}$ e Λ_{000}^{000} é uma constante de normalização.

Apêndice C

Teoria da lente convexa inclinada

Será apresentado neste apêndice a teoria para o entendimento do processo de medir a carga topológica de um vórtice óptico utilizando uma lente convexa inclinada [99]. Vamos considerar um campo óptico $U_1(x_1, y_1)$ se propagando através de uma lente com inclinação θ e distância focal f localizada em z_0 , até alcançar uma distância z arbitrária. Aqui, faremos uso do método da matriz transferência [108]. Para esse caso, as matrizes transferência para uma lente inclinada e para uma propagação no espaço livre são, respectivamente:

$$\mathbf{M}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}/f & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{M}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & z\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

$$(\text{C.3})$$

onde \mathbf{I} é a matriz 2×2 identidade e \mathbf{C} é:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sec \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Portanto, a matriz transferência total \mathbf{M}_{tot} é dada por:

$$\mathbf{M}_{tot} = \mathbf{M}_z \mathbf{M}_l \mathbf{M}_{z_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C}/f & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Aqui, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes diagonais 2×2 com elementos a_j, b_j, c_j e d_j , respectivamente. Os elementos dessas matrizes são:

$$c_1 = \sec \theta, c_2 = \cos \theta; \quad (\text{C.6})$$

$$a_j = 1 - zc_j/f, d = 1 - z_0c_j/f, b_j = z_0 + zd_j, \quad (\text{C.7})$$

com $j = 1, 2$. Agora, definimos dois vetores coluna $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ de tal forma que seus respectivos transpostos são dados por vetores linha $\mathbf{r}_i^T = (x_i, y_i)$, com $i = 1, 2$. Utilizando a integral generalizada de Huygens-Fresnel [65], o campo $U_2(x_2, y_2)$ a uma distância z após a lente é dada por:

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{i/\lambda}{|B|^{1/2}} \int \int dx_1 dy_1 U_1(x_1, y_1) e^{-i(\pi/\lambda)\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}, \quad (\text{C.8})$$

onde $|B| = |b_1 b_2|$ é o determinante de \mathbf{B} , λ é o comprimento de onda do campo óptico e

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_1^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}_2. \quad (\text{C.9})$$

Como exemplo, iremos utilizar como vórtice óptico um campo inicial complexo com modulação Gaussiana da forma:

$$U_1(x_1, y_1) = (x_1 + i\varepsilon y_1)^m e^{-\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{w_0^2}\right)}, \quad (\text{C.10})$$

com $\varepsilon = \pm 1$ e w_0 é a cintura do vórtice. Em geral, vórtices ópticos carregando carga topológica m podem ser abordados matematicamente utilizando $(x_1 + i\varepsilon y_1)^m$ que, ao ser expandido binomialmente, é possível realizar a integração apresentada na Equação C.9 em termos dos polinômios de Hermite $H_m(x)$. Após a integração, o campo $U_2(x_2, y_2)$ é dado por:

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{k w_1 w_2 (i/2)^{m+1}}{|b_1 b_2|^{1/2}} e^{-(\beta_1 x_2^2 + \beta_2 y_2^2)} \gamma^m H_m\left(\frac{\alpha_1 x_2 + i\varepsilon \alpha_2 y_2}{\gamma}\right), \quad (\text{C.11})$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ e

$$\frac{1}{w_j^2} = \frac{1}{w_0^2} + i \frac{k a_j}{2b_j}; \quad (\text{C.12})$$

$$\alpha_j = \frac{k w_j^2}{2b_j}, \beta_j = \left(\frac{k w_j}{2b_j}\right)^2 + i \frac{k d_j}{2b_j}, \gamma = (w_1^2 - w_2^2)^{1/2}. \quad (\text{C.13})$$

Portanto, o campo final é modulado pelo polinômio de Hermite $H_m(x)$, com o índice m sendo a carga topológica do vórtice óptico inicial.